Université de Jijel
Faculté S.E.I
Département de Mathématiques

Master1 « Analyse fonctionnelle »
Module : Fonctions spéciales
Octobre 2024

Série de TD N°1

Exercice 1:

Montrer que : $\Gamma(n+1) = \text{n}!, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

Montrer que : $\Gamma(z) = \Gamma(z+n)\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z+k}, \forall n \geq 1$.

Exercice 3 :

Démontrer le Corollaire 1.1.

Exercice 4 : **1)** Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

2) Montrer que $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n\, n!}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5:

I- Soient les deux intégrales suivantes

$$\boldsymbol{I} = \int_0^{+\infty} t^{-3/2}\,(1-e^{-t})\,\mathrm{d}t \qquad , \qquad \boldsymbol{K} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}\;\mathrm{d}t$$

1) Réécrire $\boldsymbol{I}$ par la fonction gamma et $\boldsymbol{K}$ par la fonction bêta, puis par la fonction gamma.
2) Montrer que $\boldsymbol{I} = 2\sqrt{\pi}$ et $\boldsymbol{K} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

II- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer la formule :

$$\beta(x,x) = 2^{-2x+1}\beta\left(\frac{1}{2},x\right).$$

Indication : Utiliser deux changement de variables : $\mathrm{t} = \frac{1}{2}(1+\mathrm{s})$, puis $= \mathrm{s}^2$.

- Déduire La formule dupliquée de Legendre :

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Exercice 6:

Démontrer la formule de Gauss : Si $\mathcal{R}e(c) > \mathcal{R}e(a) + \mathcal{R}e(b)$, on a :

$${}_2F_1(a,b,c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Exercice 6:

Démontrer que la fonction hypergéométrique vérifie les équations suivantes :

1) $\frac{d}{d\mathfrak{z}} \quad {}_2F_1(a, b, c; \mathfrak{z}) = \frac{ab}{c} \quad {}_2F_1(a + 1, b + 1, c + 1; \mathfrak{z})$

2) $\frac{d^n}{d\mathfrak{z}^n} \quad {}_2F_1(a, b, c; \mathfrak{z}) = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} \quad {}_2F_1(a + n, b + n, c + n; \mathfrak{z})$

3) $\frac{d^n}{d\mathfrak{z}^n} \quad {}_2F_1(a, b, c; \mathfrak{z})\Big|_{\mathfrak{z}=0} = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}$