Chapitre 3

Séries entières, séries de $\mathcal{F}$ourier

3.1 Séries entières

Les séries entières sont des séries de fonctions de forme particulière. Elles sont bien adaptées à l'opération de dérivation, et donc à la résolution d'équations différentielles.

Définition 3.1.1 *On appelle série entière une série de fonctions* $\sum_n f_n$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *est définie comme suit :*

$$f_n(z) = a_n z^n,$$

la variable z *peut être réelle ou complexe.*

3.1.1 Rayon de convergence

Le rayon de convergence d'une série entière caractérise à peu près les modes de convergence de la série de fonctions $\sum_n a_n z^n$ et les propriétés analytiques de la somme.

Lemme 3.1.2 *(d'Abel) Soit* $\sum_n a_n z^n$ *une série entière. On suppose que la suite* $(a_n z_0^n)_n$ *est bornée pour un certain* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Alors pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *si* $|z| < |z_0|$, *la série de terme général* $a_n z^n$ *est absolument convergente.*

Preuve. Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n z_0^n| \leq M$. Alors pour $|z| < |z_0|$ et $n \geq 0$,

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z^n}{z_0^n} \right| \leq M r^n \text{ où } r = \left| \frac{z}{z_0} \right| \in [0, 1[\,.$$

Donc la série $\sum_n a_n z^n$ est absolument convergente. ■

Théorème 3.1.3 *Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière. L'ensemble des réels r positifs tels que la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée est un inervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant* 0.

Preuve. Si $(a_n r^n)_n$ est bornée et si $0 \leq s < r$, alors la série de terme général $a_n s^n$ est absolument convergente d'après le lemme précédent, donc la suite $(a_n s^n)_n$ tend vers 0 et est donc bornée. ■

Définition 3.1.4 *(Rayon de convergence)*

On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ l'élément

$$\sup \{r \geq 0, (a_n r^n)_n \ \textit{est bornée}\} \ \textit{de} \ [0, +\infty]$$

Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$, l'ensemble des $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée est $[0, R]$.

Théorème 3.1.5 *1. Si $R = +\infty$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente.*

2. Si $R = 0$, pour tout $z \in \mathbb{C}/\{0\}$, la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée, en particulier, la série diverge.

3. Si $R \neq 0$ et $R \neq +\infty$:

- *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente.*
- *Si $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée, donc la série diverge grossièrement.*
- *Si $|z| = R$, on ne peut rien dire en général. On a ainsi une partition du plan complexe en trois parties(dans le dernier cas).*

Preuve. 1) Si $R = +\infty$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $r \geq 0$ tel que $r > |z|$ et $(a_n r^n)_n$ est bornée. D'après le lemme d'Abel, la série est absolument convergente.

2) Trivial.

3) Pour $R \neq 0$, la suite $(a_n |z|^n)_n$ n'est pas bornée (définition du rayon de convergence)

- Si $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée.
- Si $|z| < R$, il existe $r \in]|z|, R[$ tel que $(a_n r^n)_n$ est bornée. Puis, d'après le lemme d'Abel, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente. ■

Exemple 3.1.6 *La série $\sum_n z^n$ est absolument convergente si $|z| < 1$ et diverge si $|z| \geq 1$, donc on conclut que le rayon de convergence est $R = 1$.*

3.1.2 Rayon de convergence d'une somme et d'un produit

Théorème 3.1.7 *Soit R_a le rayon de convergence d'une série entière $\sum_n a_n z^n$, R_b celui d'une série entière $\sum_n b_n z^n$. Alors le rayon de convergence des séries somme et produit sont suppe-rieurs à $\min(R_a, R_b)$. Et pour somme :*

Si $R_a \neq R_b$, le rayon de convergence de $\sum_n (a_n + b_n) z^n$ est égal à $\min(R_a, R_b)$.

Preuve. • Pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\sum_n (a_n + b_n) z^n = \sum_n a_n z^n + \sum_n b_n z^n \text{ et } \sum_n c_n z^n = \left(\sum_n a_n z^n\right) \times \left(\sum_n b_n z^n\right)$$

où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Donc $\sum_n (a_n + b_n) z^n$ est absolument convergente, idem pour $\sum_n c_n z^n$ (Théorème sur le produit de Cauchy). En particulier $((a_n + b_n) z^n)_n$ et $(c_n z^n)_n$ sont bornées et donc le rayon de convergence de la série somme est $\geq \min(R_a, R_b)$.

• Si $R_a \neq R_b$, disons par exemple : $R_a < R_b$.

Pour $r \in]R_a, R_b[$, $(a_n r^n)_n$ n'est pas bornée, $(b_n r^n)_n$ est bornée. Donc $((a_n + b_n) r^n)_n$ est non bornée.

Donc pour tout $r \in]R_a, R_b[$, le rayon de convergence de la série somme est plus petit que r.

Comme le plus il est plus grand que R_a, ce rayon vaut R_a. ■

Exemple 3.1.8 *1.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = -b_n = 1.$$

Alors $R_a = R_b = 1$ mais le rayon de convergence de la série somme égale $+\infty$.

2. On prend $(a_n)_n$ telle que

$$\frac{1-z}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \text{ et } b_n = (-1)^n a_n.$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \frac{1+z}{1-z} \text{ et } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors $R_a = R_b = 1$, mais le rayon de convergence de la série produit égale $+\infty$.
Avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{1-\frac{z}{2}}{1+z}, R_a = 1, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \frac{1+z}{1-\frac{z}{2}}.$$

$R_b = 2$ et le rayon de convergence de la série produit égale $+\infty$.

Définition 3.1.9 *Si R est le rayon de convergence d'une série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, le disque ouvert*

$$D^{\circ}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \ tq \ |z| < R\},$$

est appelé disque de convergence de la série entière.

Remarque 3.1.10 *Si R est fini, on ne sait pas à priori si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge pour $|z| = R$.*

Théorème 3.1.11 *Soit $\sum\limits_n a_n z^n$ et $\sum\limits_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b respectivement. Alors on a*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |a_n| \leq |b_n| \Rightarrow R_a \geq R_b,$$

et plus généralement :

$$\bullet \exists \alpha \in \mathbb{R}, \exists k > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : (|a_n| \leq k\,|b_n|\,\alpha^n) \Rightarrow (R_a \geq R_b),$$

$$\bullet \exists \alpha \in \mathbb{R}, \left(a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n n^{\alpha}\right) \Rightarrow (R_a = R_b),$$

en particulier :

$$\bullet \left(a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n\right) \Rightarrow (R_a = R_b).$$

Preuve. De ce premier cas, il est immédiat que : $\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \geq n_0, |a_n|\,|z|^n \leq |b_n|\,|z|^n$.
Donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, (|z| < R_b) \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \text{ converge absolument}\right), \text{d'où} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ converge absolument}\right),$$

et donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, (|z| < R_b) \Rightarrow (|z| \leq R_a).$$

D'où $[0, R_b[\subset [0, R_a]$, et $R_a \geq R_b$.

• De même

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \geq n_0, |a_n|\,|z|^n \leq k\,|b_n|\,|z|^n\,\alpha^n.$$

Donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < R_b \Rightarrow \exists \rho \in \mathbb{R}.\,(|z| < \rho < R_b),$$

en notant : $x = \frac{|z|}{\rho}$, on a $0 \leq x \leq 1$ et

$$\forall n \geq n_0, |a_n|\,|z|^n = |a_n|\,\rho^n x^n \leq |b_n|\,\rho^n\,(k x^n \alpha^n) = k\,|b_n|\,|z|^n\,\alpha^n.$$

Or d'après le théorème des croissances comparées, $[kx^n\alpha^n]$ tend vers 0, donc constitue une suite bornée (par M par exemple), et

$$\forall n \geq n_0, |a_n| |z|^n \leq |b_n| \rho^n M.$$

D'où : comme $\rho < R_b$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\rho^n$ est absolument convergente, tout comme $\sum_{n=0}^{+\infty} Mb_n\rho^n$, et donc aussi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Finalement :

$$\forall z \in \mathbb{C}, (|z| < R_b) \Rightarrow (|z| \leq R_a),$$

puis $[0, R_b[\subset [0, R_a]$, et $R_a \geq R_b$.

• Dans ce troisième point, puisque $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n n^\alpha$, entraîne

$$|a_n| = |b_n| n^\alpha (1 + \varepsilon_n), \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0,$$

on en déduit que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |a_n| = 2 |b_n| n^\alpha \Rightarrow R_a \geq R_b.$$

Mais on a aussi $b_n \underset{+\infty}{\sim} a_n n^{-\alpha}$, et en application de ce qu'on vient d'obtenir, on en déduit :

$$R_a = R_b.$$

• Enfin ce quatrième point correspond au troisième dans le cas particulier $\alpha = 0$. ■

3.1.3 Méthodes de calcul du rayon de convergence

Théorème 3.1.12 *(Règle de d'Alembert)*

Soit $(a_n)_n$ une suite de complexes telle que :

1. *Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, a_n \neq 0$.*
2. *La suite $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tend vers $l \in [0, +\infty]$.*

Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est $R = \frac{1}{l} \in [0, +\infty]$.

Preuve. Pour $z \neq 0$: $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{z^{n+1}}{z^n}\right| = |z| l$.

Discusion :

• Pour $0 < l < +\infty$:

- Si $|z|\, l < 1$, d'après la règle de d'Alembert sur les séries numériques, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente donc le rayon de convergence est $\geq \frac{1}{l}$.

- Si $|z| > \frac{1}{l}$, alors $|a_n z^n| \to +\infty$, donc $(|a_n|\, z^n)_n$ n'est pas bornée, et le rayon de convergence est $\leq \frac{1}{l}$.

• Si $l = 0$, on a toujours convergence absolue, donc le rayon de convergence est $+\infty$.

• Si $l = +\infty$, on a toujours divergence grossière si $z \neq 0$, donc le rayon de convergence est nul. ■

Exemple 3.1.13 *1.* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^n} z^n$, *rayon de convergence ?*

On a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}}\right| = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n \frac{1}{n+2} \underset{+\infty}{\rightarrow} \frac{1}{e} \times 0 = 0.$$

Donc le rayon de convergence $R = +\infty$, *donc* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^n} z^n$ *converge dans* $\mathbb{C}$.

2. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n+1)\cdots(2n+1)} z^n$, *rayon de convergence, étude en* $\pm R$ *?*

On a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)\, n!}{(n+2)\cdots(2n+3)} \times \frac{(n+1)\cdots(2n+1)}{n!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \underset{+\infty}{\rightarrow} \frac{1}{4}.$$

Donc le rayon de convergence $R = 4$.

• *Étude en* ± 4 : *Pour* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n+1)\cdots(2n+1)} 4^n$

$$\left|\frac{f_{n+1}(4)}{f_n(4)}\right| = \left|4\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 4\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = 2\frac{(n+1)}{(2n+3)} < 1,$$

donc la suite $(4^n a_n)_n$ *décroit. On cherche un équivalent de* $4^n a_n$ *en* $+\infty$.

On va chercher α *et* $k > 0$ *tels que* $f_n \underset{+\infty}{\sim} k n^\alpha$. *On chercher* α *tel que la suite de terme général* $\ln\left(\frac{f_n}{n^\alpha}\right)$ *converge.*

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{f_n}{n^\alpha}\right) - \ln\left(\frac{f_{n-1}}{(n-1)^\alpha}\right) &= \ln\left(\frac{f_n}{f_{n-1}}\right) + \alpha \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) + \alpha \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\
&= -\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) + \alpha \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\
&= -\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{n} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, si on prend $\alpha = -\frac{1}{2}$, la série converge absolument, donc la suite de terme général $\ln\left(\frac{f_n}{n^\alpha}\right)$ converge vers $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\frac{f_n}{n^\alpha} \to e^\lambda$ i.e. $f_n \underset{+\infty}{\sim} e^\lambda n^\alpha$, on a donc aussi trouver k tel que $f_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{k}{\sqrt{n}}$.

Ainsi, en $R = 4$, il ya divergence car $4^n a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{k}{\sqrt{n}}$. Et en $R = -4$, il ya convergence par le critère de Leibniz.

3.1.4 Propriétés fonctionnelles d'une série entière

Théorème 3.1.14 *Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. La série converge normalement sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence (cas d'une variable complexe) ou l'intervalle ouvert de convergence (cas d'une variable réelle). Dans le cas réelle, il ya en particulier convergence normale de la série entière sur tout segment de type $[a, b]$ ou $[-a, a]$ inclus dans $]-R, R[$.*

Preuve. Dans le cas complexe ou réel, la fonction $z \mapsto |z|$ (ou $x \mapsto |x|$) est continue sur le compact $\mathbb{C}$ donc elle est bornée et atteint ses bornes, puisque à valeurs réelles.

Donc :

$$\exists z_0 \in \mathbb{C}, |z_0| = \max\{|z|, z \in \mathbb{C}\}. \text{ Et } \mathbb{C} \subset B(0,1),$$

on a $|z| < R$.

Dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0|$, donc

$$|a_n| |z|^n \leq |a_n| |z_0|^n,$$

d'où

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |a_n| |z|^n \leq |a_n| |z_0|^n.$$

Mais comme la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge absolument (puisque $|z_0| < R$), on en déduit la convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sup\limits_{z \in \mathbb{C}} |a_n| |z|^n$, donc la convergence normale de la série de fonctions sur $\mathbb{C}$.

La démonstration s'adapte immédiatement dans le cas réel, et pour finir, il suffit de remarquer que $[a, b]$ ou $[-a, a]$ sont des ensembles fermés, bornées donc des compacts de $\mathbb{R}$.

■

Théorème 3.1.15 *(Continuité de la somme d'une série entière de variable réelle)*

Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de variable réelle, de rayon de convergence R et de somme S. La fonction S est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

Preuve. La continuité des fonctions : $\forall n \in \mathbb{N}, x \mapsto a_n x^n$ sur tout intervalle $[a,b] \subset]-R, R[$ et la convergence normale sur $[a,b]$ de la série de ces fonctions (Théorème 3.1.14), font que la somme de cette série (soit la somme de la série entière) est continue sur tout intervalle $[a,b] \subset]-R, R[$, donc sur $]-R, R[$ lui même. ∎

Théorème 3.1.16 *(Continuité de la somme d'une série entière de variable complexe)*

Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *une série entière de variable complexe, de rayon de convergence* R *et de somme* S. *La fonction* S *est continue sur le disque ouvert* $D(0,R)$.

Théorème 3.1.17 *(Primitives de la somme d'une série entière de variable réelle)*

Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *une série entière de variable réelle, de rayon de convergence* R *et de somme*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On peut intégrer S *terme à terme sur tout segment inclus dans* $]-R, R[$. *En particulier,* S *admet sur* $]-R, R[$ *des primitives qui valent :*

$$c + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ où } c \in \mathbb{C}.$$

Ces primitives ont même rayon de convergence R *que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Preuve. S étant continue sur $]-R, R[$, elle y admet des primitives. De plus, pour $0 \leq a < R$, la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge normalement sur$[-a,a]$ donc on peut calculer la primitive terme à terme.

Finalement les primitives de S sur $[-a,a]$ (qui sont toutes égales à une constante additive près) valent :

$$\int S(x)\,dx = c + \sum_{n=0}^{+\infty} \int a_n x^n dx = c + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

où c est une constante réelle ou complexe.

Ces nouvelles séries entières ont un rayon de convergence R_p.

• Pour x non nul, la convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est équivalente à celle de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n+1}$, puisqu'elles sont égales à une constante multiplicative près. Mais

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{a_n}{n+1} \right| \leq |a_n|,$$

et on en déduit que $R_p \geq R$.

• Puis $\forall z \in \mathbb{C} : |z| < R_p, \exists \rho \in \mathbb{R}^*, |z| < \rho < R_p$. On peut alors écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n z^n| = |a_n| \frac{\rho^n}{n+1} \left[(n+1) \frac{|z^n|}{\rho^n} \right],$$

et comme la suite $\left((n+1) \frac{|z^n|}{\rho^n} \right)_n$ tend vers 0, du fait du théorème des croissances comparées, on en déduit que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : (n+1) \frac{|z^n|}{\rho^n} \leq 1 \text{ et } |a_n z^n| \leq |a_n| \frac{\rho^n}{n+1},$$

or la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| \frac{\rho^n}{n+1}$ converge (puisque $0 < \rho < R_p$), et donc la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolument. On en déduit que $|z| \leq R$, donc $[0, R_p[\subset [0, R]$ et finalement $R_p = R$, et les séries primitives ont même rayon de convergence que la série de départ. ■

Exemple 3.1.18 *Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières réelles :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1}.$$

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$ *est la série dérivée de la série entière* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ *de rayon de convergence* $R = 1$ *et de somme*

$$S(x) = \frac{1}{1-x} \text{ sur }]-1, 1[.$$

et

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \forall x \in]-1, 1[.$$

2. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ *est la série primitive de la série entière* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ *de rayon de convergence* $R = 1$ *et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n dx = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x), \forall x \in]-1, 1[.$$

3.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^2 - n + n\right) x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}. \end{aligned}$$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$ *est la série dérivée d'ordre* 2 *de la série entière* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$, *donc*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = xS''(x) + S'(x) = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \forall x \in \left]-1,1\right[.$$

Théorème 3.1.19 *(Dérivabilité et caractère* C^∞ *de la somme d'une série entière)*

Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *une série entière de variable réelle, de rayon de convergence* R *et de somme*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Sur $\left]-R,R\right[$, *la fonction* S *est de classse* C^∞, *et on obtient ses dérivées successives par dérivation terme à terme de la fonction* S.

Toutes les séries entières dérivées de S *ont même rayon de convergence* R *que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. *De plus*

- $\forall x \in \left]-R,R\right[, S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$
- $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \left]-R,R\right[, S^{(p)}(x) = \sum\limits_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n.$

Les coefficients de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *vérifie alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

Preuve. Tout d'abord montrons que $S \in C^\infty(\left]-R,R\right[)$. On a

$$\forall x \in \left]-R,R\right[, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge normalement et donc uniformément sur tout intervalle $[-r,r]$ tel que $0 < r < R$.

D'autre part, la fonction $f_n : x \mapsto f_n(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier sur $[-r,r]$.

Montrons par réccurence que :

$$f_n^{(p)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n, \\ \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} & \text{si } p \leq n. \end{cases}$$

Cette expression est vraie pour $p = 1$, en effet

$$f_n^{'}(x) = na_n x^{n-1}, \forall n \geq 1,$$

et

$$f_n^{'}(x) = 0 \text{ pour } n = 0.$$

Supposons que l'hypothèse est vraie pour (p) et démontrons la pour $(p+1)$. On a

$$f_n^{(p+1)}(x) = \left(f_n^{(p)}(x)\right)' = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n, \\ \frac{n!}{(n-p)!}(n-p)\, a_n x^{n-p-1} & \text{si } < n, \\ 0 & p = n, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } p > n-1, \\ \frac{n!}{(n-p-1)!} a_n x^{n-p-1} & \text{si } p \leq n-1, \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } p+1 > n, \\ \frac{n!}{(n-(p+1))!} a_n x^{n-(p+1)} & \text{si } p+1 \leq n, \end{cases}$$

donc la relation est vraie pour $(p+1)$. Reste à montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}$ converge uniformément sur $[-r, r]$, $0 \leq r \leq R$.

On a la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et la série dérivée ayant le même rayon de convergence R, d'où $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}(x)$ converge uniformément sur $[-r, r] \subset]-R, R[$. Donc vu le théorème de dérivation des séries de fonctions (Théorème 2.2.20), on conclut que :

$$S \in C^p([-r, r]) \text{ pour tout } p \geq 1,$$

donc $S \in C^{\infty}(]-R, R[)$.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

On a

$$f_k^{(p)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > k, \\ \frac{k!}{(k-p)!} a_k x^{k-p} & \text{si } p \leq k, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S^{(n)}(x) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_k(x)\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} f_k^{(n)}(x) = \sum_{k\geq n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k x^{k-n} \\ &= \frac{n!}{(0)!} a_n x^0 + \sum_{k\geq n+1}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k x^{k-n} \\ &= a_n n! + x \sum_{k\geq n+1}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k x^{k-n-1}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$S^{(n)}(0) = a_n n! \Rightarrow a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

■

Théorème 3.1.20 *Si la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *converge pour* $x = R\,(x = -R)$, *donc la somme* $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est continue sur* $]-R, R]\,([-R, R[)$.

3.1.5 Fonctions développables en séries entières

Définition 3.1.21 *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *contenant* 0 *et soit* f *une fonction de* I *dans* $\mathbb{k}$. *On dit que* f *est développable en série entière en* 0 *si et seulement si, il existe une série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *de rayon de convergence non nul* R, *et* $0 < r \leq R$ *tels que*

$$\forall x \in\,]-r, r[\, \cap I, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Conditions d'existence

Théorème 3.1.22 *(Condition nécessaire de développement en série entière)*

Soit $r > 0$, *et soit* f *une fonction de* $]-r, r[$ *dans* $\mathbb{k}$, *développable en série entière en* 0 *telle que*

$$\forall x \in\,]-r, r[\,, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Alors f *est de classe* C^∞ *sur* $]-r, r[$ *et* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Preuve. f coïncide avec la somme d'une série entière sur $]-r, r[$. Le résultat découle alors du Théorème 3.1.19. ■

Théorème 3.1.23 *(Condition suffisante de développement en série entière)*

Soit $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ dans un voisinage de 0. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ et pour tout } x \in]-r, r[\,, \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M. \qquad (*)$$

Alors la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est simplement convergente dans $]-r, r[$ et on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \forall x \in]-r, r[\,.$$

Preuve. Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in]-r, r[$ on a

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M.$$

Le développement de Taylor de f au voisinage de 0 à l'ordre n donne :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \text{ avec } 0 < \theta < 1.$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$.
En effet

$$x \in]-r, r[\Rightarrow |x| < r \Rightarrow |\theta x| < r \Rightarrow \left|f^{(n+1)}(\theta x)\right| < r,$$

et donc

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \leq \frac{M}{(n+1)!} r^{n+1}.$$

Or la série de terme général $u_n = \frac{M}{(n+1)!} r^{n+1}$ est convergente car

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{r}{(n+1)} = 0 < 1,$$

et par suite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0,$$

ce qui donne

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

■

Remarque 3.1.24 *La condition $(*)$ n'est pas nécessaire comme le montre l'exemple suivant*

Exemple 3.1.25 *Soit* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$. *Posons* $a_n = \frac{2^n}{n!}$.

Calcul de R :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow R = +\infty.$$

Alors f *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$, *et on a*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Donc $f^{(n)}(0) = a_n n! = \frac{2^n}{n!} n! = 2^n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.

$f^{(n)}(0)$ *n'est pas bornée, donc on conclut que les dérivées de* f *ne sont pas bornés.*

Théorème 3.1.26 *(Condition necéssaire et suffisante de développement en série entière)*

Soit f *une fonction de classe* C^∞ *sur* $]-r, r[$. f *est développable en série entière si et seulement si le reste de Mac-Laurin* $\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$, *avec* $0 < \theta < 1$ *vérifie :*

$$\forall x \in \left]-r, r\right[, \lim_{n\to+\infty} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$$

Exemple 3.1.27 ***1. La fonction exponentielle :*** $f(x) = e^x$

Cette fonction est indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}$, *et on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = e^x.$$

Le reste de Mac-Laurin est $\frac{e^{(\theta x)}}{(n+1)!} x^{n+1}$. *On vérifie comme précédemment (preuve du Théorème 3.1.23) que cette limite tend vers* 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$, *et ceci quelque soit* x *dans* $\mathbb{R}$. *Finalement*

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2. Les fonctions hyperboliques :

Les fonctions cosinushyperbolique et sinushyperbolique ont même rayon de convergence de la fonction exponentielle, c'est-à-dire, $R = +\infty$.

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

3. Les fonctions circulaires :

a. La foction sinus : *$f(x)=\sin x$. $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ et on a :*

$$f(x)=\sin x,\ f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f'''(x)=-\cos x,$$

ce qui permet d'en déduire que pour tout $p\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f^{(4p)}(x) &= \sin x \Rightarrow f^{(4p)}(0)=0, \\ f^{(4p+1)}(x) &= \cos x \Rightarrow f^{(4p+1)}(0)=1, \\ f^{(4p+2)}(x) &= -\sin x \Rightarrow f^{(4p+2)}(0)=0, \\ f^{(4p+3)}(x) &= -\cos x \Rightarrow f^{(4p+3)}(0)=-1. \end{aligned}$$

Les dérivées d'ordre quelconque sont majorées par 1, et ceci quelque soit x dans $\mathbb{R}$. On a alors

$$\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \text{ et } R=+\infty.$$

b. La foction cosinus : *$f(x)=\cos x$*

$$f(x)=\cos x=(\sin x)'=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ \text{ et } R=+\infty.$$

4. ***La série binôme :(Famille du binôme)***

Considérons la fonction

$$x\mapsto f(x)=y=(1+x)^{\alpha},\alpha\in\mathbb{R}.$$

Son domaine de définition est $]-1,+\infty[$. On a une relation simple entre la fonction et sa dérivée

$$y=(1+x)^{\alpha}\Rightarrow y'=\alpha(1+x)^{\alpha-1},$$

d'où l'équation différentielle :

$$y'(1+x)=\alpha y. \tag{1}$$

Toutes les solutions de cette équation sont de la forme $y=c(1+x)^{\alpha}$, où c est une constante arbitraire. Cherchons maintenant s'il existe une solution f développable en série entière au voisinage de 0.

Supposons que $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *est solution de* (1). *Pour qu'une telle fonction existe il est nécessaire d'avoir les relations :*

$$(1+x) f'(x) - \alpha f(x) = 0 \Leftrightarrow (1+x) \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} \left[(n+1) a_{n+1} - (\alpha - n) a_n\right] x^n = 0,$$

on déduit alors que

$$(n+1) a_{n+1} - (\alpha - n) a_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et donc

$$a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

car une série entière est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, ceci permet d'avoir :

$$\begin{cases} a_1 = \alpha a_0, \\ a_2 = \frac{\alpha-1}{2} a_1, \\ \vdots \\ a_{n-1} = \frac{\alpha-n+2}{n-1} a_{n-2}, \\ a_n = \frac{\alpha-n+1}{n} a_{n-1}, \end{cases}$$

ceci donne enfin

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} a_0.$$

Soit la série $\sum_{n\geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} a_0 x^n$, *le rayon de convergence* R *est donné par la relation*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| = 1,$$

par construction, la série $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} a_0 x^n$ *est solution de l'équation différentielle* (1), *elle est donc de la forme* $f(x) = c(1+x)^\alpha$.

Puisque $c = a_0 = f(0)$, *on déduit que pour tout* $x \in]-1, 1[$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, R = 1.$$

Cette série est connu sous le nom de série du binôme. Par exemple

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1.1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n n!} x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \cdots \end{aligned}$$

5) La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$

On remarque d'une part que pour tout $|x| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |x|^n = 0$ *et d'autre part*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \text{ pour tout } |x| < 1.$$

d'où

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n \text{ avec } R = 1 \text{ et } \frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n, R = 1.$$

6) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$

Certains développements en série entière s'obtiennent au moyen des théorèmes sur l'intégration et la dérivation des séries entières, donc du développement en série de la fonction $\frac{1}{1+x}$ *on déduit par intégration que*

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, R = 1.$$

De même on a

$$\ln(1-x) = -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, R = 1.$$

Donc

$$\forall x \in [-1, 1[: \ln(1-x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1.3...(2n-1)}{2^n n!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \cdots$$

Sachant que $\arcsin 0 = 0$, *on obtient*

$$\arcsin x = x + \sum_{n\geq 1} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4...2n.(2n+1)} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots$$

Par la même démarche on développe les fonctions $x \mapsto \arccos x$, $x \mapsto \operatorname{arg\,sinh} x$, $x \mapsto \arctan x$, $x \mapsto \operatorname{arg\,tanh} x$.

Exemple 3.1.28 *Déterminer les développements en série entière autour de* 0 *des fonctions définies par :*

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x}, \; g(x) = \frac{5}{x^4 - 13x^2 + 36}.$$

a) On a $f(x) = f_1(x) \times f_2(x)$ *avec* $f_1 : x \mapsto e^x$, $f_2 : x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

La fonction f_1 est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, f_2 est développable en série entière sur $]-1,1[$. On en déduit

$$\forall x \in \left]-1,1\right[: f(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ avec } a_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!},$$

d'où

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \\ &= 1 + 2x + \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) x^2 + \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) x^3 + \cdots + \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} x^n + \cdots \end{aligned}$$

b) On a $x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2-9)(x^2-4)$.

La fonction g n'est pas donc définie aux points $-3, -2, 3, 2$.

Il en résulte que le plus grand intervalle de centre 0 sur lequel g peut être développable en série entière est l'intervalle $]-2,2[$.

Soit x un point de cet intervalle. On a

$$\frac{5}{(x^2-9)(x^2-4)} = \frac{1}{(x^2-9)} - \frac{1}{(x^2-4)} = -\frac{1}{9}\frac{1}{1-\frac{x^2}{9}} + \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{x^2}{4}}.$$

Pour tout y tel que $|y| < 1$, on a $\frac{1}{1-y} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} y^n$.

On a $\left|\frac{x^2}{9}\right| < 1$ *et* $\left|\frac{x^2}{4}\right| < 1$. *Il en résulte*

$$\forall x \in \left]-2,2\right[, g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x \left({}^{2n}\frac{1}{4^{n+1}} - \frac{1}{9^{n+1}}\right).$$

3.1.6 Résolution des équations différentielles sous forme d'une série entière

Exemple 3.1.29 *Déterminer dans chacun des cas suivants les fonctions solutions des équations différentielles et développables en série entière*

1. *Soit l'équation différentielle*

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0 \tag{3.1}$$

Si $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *est le développement en série entière d'une fonction* f *solution de l'équation différentielle, on a*

$$\begin{cases} y'(x) = \sum\limits_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}, \\ y''(x) = \sum\limits_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}. \end{cases}$$

Substituons $y\prime$ *et* y'' *dans* (3.1) *, on obtient :*

$$\begin{aligned}
(3.1) \quad &\Leftrightarrow \quad x^2(1-x)\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} - x(1+x)\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2a_2x^2 + \sum_{n\geq 3}(n-1)\left[na_n - (n-2)a_{n-1}\right]x^n - a_1x - \sum_{n\geq 2}\left[na_n + (n+1)a_{n-1}\right]x^n + \sum_{n\geq 0} a_n x^n \\
&= \quad 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a_0 + a_2x^2 - a_1x^2 + \sum_{n\geq 3}\left[(n(n-1) - n + 1)a_n - ((n-1)(n-2) + (n+1))a_{n-1}\right]x^n = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 = 0, \\ a_2 - a_1 = 0, \\ (n-1)^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1} = 0, \forall n \geq 3. \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 = 0, \\ a_2 = a_1, \\ a_n = a_{n-1}, \forall n \geq 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

D'autre part, en faisant x *nul dans l'expression de* f*, on a* $f(0) = a_0 = 0$*. Donc la série* $\sum\limits_{n\geq 1} x^n$ *a pour rayon de convergence* $R = 1$*. Par conséquent, toute solution de* (3.1) *développable en série entière est proportionnelle à la solution particulière*

$$f_1(x) = \sum_{n\geq 1} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

2. Considérons l'équation

$$x^2y'' + x(1+x)y' - y = 0 \tag{3.2}$$

Si $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *est le développement en série entière d'une fonction* f *solution de l'équation différentielle* (2)*, on a*

$$
\begin{aligned}
(3.2) \quad \Leftrightarrow \quad & x^2\sum_{n\geq 2} n\left(n-1\right)a_n x^{n-2} + x\left(1+x\right)\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} - \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{n\geq 2} n\left(n-1\right)a_n x^{n} + \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n} + \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{n\geq 2}\left[n\left(n-1\right)a_n + n a_n + \left(n-1\right)a_{n-1} - a_n\right]x^n + a_1 x - a_0 - a_1 x = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -a_0 + \sum_{n\geq 2}\left(n-1\right)\left[\left(n+1\right)a_n + a_{n-1}\right]x^n = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} a_0 = 0, \\ \left(n-1\right)\left[\left(n+1\right)a_n + a_{n-1}\right], \forall n \geq 2. \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} a_0 = 0, \\ a_n = -\frac{1}{(n+1)}a_{n-1}, \forall n \geq 2, \end{cases}
\end{aligned}
$$

ou encore : $a_0 = 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= -\frac{1}{(n+2)}a_n \\
&= \frac{-1}{(n+2)} \times \frac{-1}{(n+1)}a_{n-1} \\
&= \frac{-1}{(n+2)} \times \frac{-1}{(n+1)} \times \frac{-1}{n}a_{n-2} \\
&= 2\frac{(-1)^n}{(n+2)!}a_1.
\end{aligned}
$$

De plus

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0,$$

d'où

$$R = +\infty,$$

donc les solutions de (3.2) *développables en série entière sont les fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f\left(x\right) = a_0 + a_1 x + 2a_1\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{(n+2)!}x^n = 2a_1\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(n+2)!}x^{n+1},$$

et par conséquent, on a

$$xf\left(x\right) = 2a_1\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!}x^{n+2} = 2a_1\left(e^{-x} + x - 1\right),$$

alors toute fonction développable en série entière et solution de (3.2) *est donc est proportionnelle à la solution particulière* f_0 *définie par :*

$$f(0) = 0 \ \textit{et}\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{e^{-x} + x - 1}{x}.$$

3.1.7 Définitions des fonctions de variable complexe en série entière

1) L'exponentielle complexe

On a vu que la seule fonction qui soit égale à sa dérivée (sur un intervalle) est la fonction exponentielle, et c'est la raison pour laquelle on l'utilise pour résoudre les équations différentielles d'ordre 2. On a vu que le rayon de convergence de la série entière réelle $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est $+\infty$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!}.$$

On généralise cette expression à tout $z \in \mathbb{C}$ et on pose $e^z = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$.

Propriétés :

1. Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos x = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, $\sin x = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $(e^z)^n = e^{nz}$.

Preuve. 1) Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$e^{z_1} e^{z_2} = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{z_1^n}{n!} \right) \times \sum_{n\geq 0} \frac{z_2^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} c_n \text{ où } c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!},$$

($\sum\limits_{n\geq 0} c_n$ est la série produit de $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{z_1^n}{n!} \times \sum\limits_{n\geq 0} \frac{z_2^n}{n!}$ qui sont absolument convergentes). Donc

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k} n!}{(n-k)!} \right) = \sum_{n\geq 0} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k z_2^{n-k} n!}{n! k! (n-k)!} \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} (z_1 + z_2)^n = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

2) D'après la formule de Taylor-Lagrange au tour de 0 d'ordre $2n+1$:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \left[\cos^{(2k)}(0) \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cos^{(2k+1)}(0) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] + \cos^{(2n+2)}(c_k) \frac{x^{2k+2}}{(2n+2)!},$$

or pou tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\cos^{(2k)}(0) = (-1)^n\, cox0 = (-1)^n \text{ et } \cos^{(2k+1)}(0) = (-1)^{n+1} \sin 0 = 0,$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \cos x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0.$$

La même démarche pour $\sin x$.

3)

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n\geq 0} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{p\geq 0} \frac{(ix)^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p\geq 0} \frac{(ix)^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + i \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ &= \cos x + i \sin x, \end{aligned}$$

car $(i)^{2p} = (-1)^n$, $(i)^{2p+1} = i(-1)^n$. ■

Remarque 3.1.30 *La fonction $z \mapsto e^z$ est périodique de période $2\pi i$ i.e.*

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi i + i \sin 2\pi i) = e^z.$$

2) Les fonctions hyperboliques de valeurs complexe

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sinh z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

Toute ces séries entières ont donc un rayon de convergence infini.

3) Les fonctions $\mathbf{z} \mapsto \cos \mathbf{z}, \mathbf{z} \mapsto \sin \mathbf{z}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z \Rightarrow \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \tan z = i \frac{1 - e^{2iz}}{1 + e^{2iz}} \\ \sin iz &= i \sinh z, \quad \cos iz = \cosh z, \quad \tan iz = i \tanh z \end{aligned}$$

4) Définition de la fonction $\mathbf{z} \mapsto \ln \mathbf{z}$

Théorème 3.1.31 *Soit Z un nombre complexe non nul, pour tout nombre complexe z :*

$$e^z = Z \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / z = \ln(|Z|) + i(\arg(Z) + 2\pi k).$$

En particulier, la fonction $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*, z \to e^z$ est surjective.

Preuve. Soit $Z \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$, posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels

$$e^z = Z \Leftrightarrow e^x e^{iy} = Z = |Z| \, e^{i \arg(Z)}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = |Z|, \\ \exists k \in \mathbb{Z} : y = \arg(Z) + 2\pi k, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = \ln(|Z|) + i(\arg(Z) + 2\pi k). \end{aligned}$$

■

Exemple 3.1.32 *Trouver* $\ln(-3)$ *et résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $\cos z = 2$.

$$-3 = 3e^{i\pi} = 3(\cos\pi + i\sin\pi) \Rightarrow \ln(-3) = \ln 3 + i(\pi + 2\pi k)$$

$$\begin{aligned} \cos z &= 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^{2iz} + 1 - 4e^{iz} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{iz_1} = 2 - \sqrt{3} \vee e^{iz_2} = 2 + \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow iz_1 = \ln\left(2 - \sqrt{3}\right) + i2\pi k \vee iz_2 = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) + i2\pi k \\ &\Leftrightarrow z_1 = -i\ln\left(2 - \sqrt{3}\right) + 2\pi k \vee z_2 = -i\ln\left(2 + \sqrt{3}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

3.2 Séries de $\mathcal{F}$ourier

3.2.1 Séries trigonométriques

Définition 3.2.1 *On appelle série trigonométrique une série de fonctions de la variable* x *dont le terme général* $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *est de la forme*

$$u_0(x) = \frac{a_0}{2}, u_n(x) = a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x, \text{ pour tout } n \geq 1,$$

où $(a_n)_n, (b_n)_n$ *sont deux suites de nombres complexes,* $\omega > 0$.

Remarque 3.2.2 *Supposons que la série* $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n \geq 1} [a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x]$ *converge pour certain* $x \in \mathbb{R}$ *et posons*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} [a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x], \tag{3.3}$$

on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\cos\left(n\omega\left(x+\frac{2\pi k}{\omega}\right)\right) &= \cos\left(n\omega x+2\pi kn\right)=\cos n\omega x. \\ \sin\left(n\omega\left(x+\frac{2\pi k}{\omega}\right)\right) &= \sin\left(n\omega x+2\pi kn\right)=\sin n\omega x.\end{aligned}$$

Alors la série converge en tout point de la forme $x+\frac{2\pi k}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$.

- Si la série (3.3) converge dans $\mathbb{R}$, on aura $f(x)=f\left(x+\frac{2\pi k}{\omega}\right)$ et par suite la fonction f est périodique de période $T=\frac{2\pi}{\omega}$. En conclusion, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *La série trigonométrique (3.3) converge dans $\mathbb{R}$.*
2. *La série trigonométrique (3.3) converge dans $\left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$.*
3. *la série trigonométrique (3.3) converge dans $\left[\alpha, \alpha+\frac{2\pi}{\omega}\right], \forall \alpha \in \mathbb{R}$.*

Les résultats obtenus pour les séries de fonctions s'appliquent évidemment aux séries trigonométriques, en particulier on a

Proposition 3.2.3 *Si les séries $\sum\limits_{n\geq 0}|a_n|, \sum\limits_{n\geq 0}|b_n|$ sont convergentes, alors la série trigonométrique (3.3) est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, donc absolument convergente sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. On a

$$|a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x| \leq |a_n| + |b_n|, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},$$

d'où le résultat. ■

Proposition 3.2.4 *Si les suites numériques $(a_n)_n, (b_n)_n$ sont décroissantes et tendent vers 0, alors la série trigonométrique (3.3) est convergente pour $x \neq \frac{2\pi k}{\omega}$ où $k \in \mathbb{Z}$.*

Preuve. En appliquant le théorème d'Abel, donc il suffit de montrer que les sommes partielles suivantes sont majorées indépendamment de m et n.

$$S=\sum_{p=m}^{p=n}\sin p\omega x, C=\sum_{p=m}^{p=n}\cos p\omega x.$$

On a pour $t \neq \frac{2\pi k}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$:

$$
\begin{aligned}
C_n + iS_n &= \sum_{p=0}^{p=n} \cos p\omega t + i \sum_{p=0}^{p=n} \sin p\omega t = \sum_{p=0}^{p=n} (\cos p\omega t + i \sin p\omega t) \\
&= \sum_{p=0}^{p=n} e^{ip\omega t} = 1 + e^{i\omega t} + e^{i2\omega t} + \cdots + e^{in\omega t} = \frac{1 - e^{i(n+1)\omega t}}{1 - e^{i\omega t}} \\
&= \frac{1 - \cos(n+1)\omega t - i \sin(n+1)\omega t}{1 - \cos \omega t - i \sin \omega t} = \frac{2\left[\sin \frac{(n+1)\omega t}{2}\right]^2 - 2i \sin \frac{(n+1)\omega t}{2} \cos \frac{(n+1)\omega t}{2}}{2\left[\sin \frac{\omega t}{2}\right]^2 - 2i \sin \frac{\omega t}{2} \cos \frac{\omega t}{2}} \\
&= \frac{-2i \sin \frac{(n+1)\omega t}{2} \left[\cos \frac{(n+1)\omega t}{2} + i \sin \frac{(n+1)\omega t}{2}\right]}{-2i \sin \frac{\omega t}{2} \left[\cos \frac{\omega t}{2} + i \sin \frac{\omega t}{2}\right]} \\
&= \frac{\sin \frac{(n+1)\omega t}{2} \left[\cos \frac{\omega t}{2} \left[\cos \frac{n\omega t}{2} + i \sin \frac{n\omega t}{2}\right] + i \sin \frac{\omega t}{2} \left[\cos \frac{n\omega t}{2} + i \sin \frac{n\omega t}{2}\right]\right]}{\sin \frac{\omega t}{2} \left[\cos \frac{\omega t}{2} + i \sin \frac{\omega t}{2}\right]} \\
&= \frac{\sin \frac{(n+1)\omega t}{2}}{\sin \frac{\omega t}{2}} \left[\cos \frac{n\omega t}{2} + i \sin \frac{n\omega t}{2}\right].
\end{aligned}
$$

d'où on trouve

$$
\begin{cases}
C_n = \frac{\sin \frac{(n+1)\omega t}{2} \cos \frac{n\omega t}{2}}{\sin \frac{\omega t}{2}}, \\
S_n = \frac{\sin \frac{(n+1)\omega t}{2} \sin \frac{n\omega t}{2}}{\sin \frac{\omega t}{2}}.
\end{cases}
$$

Maintenant on peut majorer, et on a

$$
\begin{aligned}
|S| &= \left| \sum_{p=m}^{p=n} \sin p\omega x \right| = |S_n - S_{m-1}| \leq |S_n| + |S_{m-1}| \\
&\leq \left| \frac{\sin \frac{(n+1)\omega x}{2} \sin \frac{n\omega x}{2}}{\sin \frac{\omega x}{2}} \right| + \left| \frac{\sin \frac{m\omega x}{2} \sin \frac{(m-1)\omega x}{2}}{\sin \frac{\omega x}{2}} \right| \\
&\leq \frac{1}{\left|\sin \frac{\omega x}{2}\right|} + \frac{1}{\left|\sin \frac{\omega x}{2}\right|} = \frac{2}{\left|\sin \frac{\omega x}{2}\right|}.
\end{aligned}
$$

De même on a

$$
|C| = \left| \sum_{p=m}^{p=n} \cos p\omega x \right| = |C_n - C_{m-1}| \leq \frac{2}{\left|\sin \frac{\omega x}{2}\right|}.
$$

Les deux sommes étant majorées indépendamment de m et n, la série $\sum_{n \geq 1} [a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x]$ est donc convergente pour $x \neq \frac{2\pi k}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$. ■

3.2.2 Représentation complexe d'une série trigonométrique

Proposition 3.2.5 *Une série de fonctions de la variable x est une série trigonométrique si et seulement si son terme général $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de la forme*

$$u_0(x) = c_0, u_n(x) = c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x}, \text{ pour tout } n \geq 1,$$

où $(c_n)_n, (c_{-n})_n$ sont deux suites de nombres complexes.

Preuve. D'après les relations d'Euler :

$$\cos n\omega x = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}, \sin n\omega x = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i},$$

donc la série (3.3) devient

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \left(\frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i} \right) \right] \\ = \ & \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x} \right] = c_0 + \sum_{n \geq 1} \left[c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x} \right], \end{aligned}$$

où

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \overline{c_n},$$

donc

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{in\omega x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}.$$

■

Lemme 3.2.6 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, périodique de période $T > 0$ et intégrable dans l'intervalle $[0, T]$. Alors :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\, dt = \int_0^T f(t)\, dt.$$

Preuve. On a

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\, dt = \int_{\alpha}^{0} f(t)\, dt + \int_0^T f(t)\, dt + \int_T^{\alpha+T} f(t)\, dt.$$

En faisant un changement de variable $t = T + \tau$ dans la dernière intégrale, on obtient

$$\int_T^{\alpha+T} f(t)\, dt = \int_0^{\alpha} f(\tau + T)\, d\tau = \int_0^{\alpha} f(\tau)\, d\tau.$$

Puisque f est de période T, on trouve

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,dt = \int_{\alpha}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{T} f(t)\,dt + \int_{0}^{\alpha} f(t)\,dt = \int_{0}^{T} f(t)\,dt.$$

■

3.2.3 Calcul des coefficients de la série triginométrique

a) Cas réel

Mettons nous dans les conditions de convergence uniforme de la série triginométrique (3.3).

Posons :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1}\left[a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x\right].$$

Alors

$$\begin{aligned} f(x)\cos n\omega x &= \frac{a_0}{2}\cos n\omega x + \sum_{k\geq 1}\left[a_k \cos k\omega x \cos n\omega x + b_k \sin k\omega x \cos n\omega x\right], \\ f(x)\sin n\omega x &= \frac{a_0}{2}\sin n\omega x + \sum_{k\geq 1}\left[a_k \cos k\omega x \sin n\omega x + b_k \sin k\omega x \sin n\omega x\right], \end{aligned}$$

donc

- $$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\cos n\omega x dx = \frac{a_0}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos n\omega x dx + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sum_{k\geq 1}\left(a_k \cos k\omega x \cos n\omega x\right) dx + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sum_{k\geq 1}\left(b_k \sin k\omega x \cos n\omega x\right) dx.$$

La série triginométrique (3.3) est uniformément convergente, donc on trouve

- $$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\cos n\omega x dx = \frac{a_0}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos n\omega x dx + \sum_{k\geq 1} a_k \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos k\omega x \cos n\omega x dx + \sum_{k\geq 1} b_k \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin k\omega x \cos n\omega x dx.$$

$$\begin{aligned} \cos k\omega x \cos n\omega x dx &= \frac{1}{2}\left[\cos(k+n)\omega x + \cos(k-n)\omega x\right], \\ \cos n\omega x \sin k\omega x &= \frac{1}{2}\left[\sin(k+n)\omega x + \sin(k-n)\omega x\right], \\ \sin k\omega x \sin n\omega x dx &= \frac{1}{2}\left[\cos(k+n)\omega x - \cos(k-n)\omega x\right], \end{aligned}$$

et

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\sin n\omega x dx = \frac{a_0}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin n\omega x dx + \sum_{k\geq 1} a_k \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos k\omega x \sin n\omega x dx + \sum_{k\geq 1} b_k \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin k\omega x \sin n\omega x dx,$$

or on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos k\omega x \cos n\omega x dx &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin k\omega x \sin n\omega x dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k, \\ \frac{\pi}{\omega} & \text{si } n = k. \end{cases} \\ \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos k\omega x \sin n\omega x dx &= 0.\end{aligned}$$

Alors on déduit les coefficients de la série par les relations suivantes

$$\begin{cases} a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\cos n\omega x dx, \\ b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\sin n\omega x dx. \end{cases}$$

D'après le lemme 3.2.6, les coefficients peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\cos n\omega x dx = \frac{\omega}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\cos n\omega x dx, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \\ b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\sin n\omega x dx = \frac{\omega}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\sin n\omega x dx, \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

En particulier, dans le cas des fonctions $2\pi-$périodique (si $\omega = 1$) :

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \end{cases}$$

ces expressions sont valables même pour $n = 0$.

b) Cas complexe

Dans ce cas on a : $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega x}$.

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) e^{-in\omega x} dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{i\omega(k-n)x} dx,$$

or

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{i\omega(k-n)x}dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k, \\ \frac{2\pi}{\omega} & \text{si } n = k. \end{cases}$$

Alors les coefficients sont donnés par :

$$c_n = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\, e^{-in\omega x}dx = \frac{\omega}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\, e^{-in\omega x}dx, \text{ pour tout } \alpha \text{ de } \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{Z}.$$

3.2.4 Développement en série trigonométrique

Jusqu'à présent, nous sommes parti d'une série trigonométrique et nous avons étudié la fonction définie par la somme de cette série. Dans cette partie, nous partons d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et on a deux questions se posent :

1. Existe-il une série trigonométrique qui converge partout sur $\mathbb{R}$ et dont la somme soit égale f ?
2. Si la repense à la question est positive, cette série est-elle unique ?

Définition 3.2.7 *(Série de $\mathcal{F}$ourier d'une fonction périodique)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et absolument intégrable sur $[0, 2\pi]$. On appelle série de $\mathcal{F}$ourier de f la série trigonométrique $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n\geq 1} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$ dont les coefficients sont donnés par les formules

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx, \quad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx,$$

ou bien $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ où

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}dx, \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Les $c_n(f)$ sont appelés les coefficients de $\mathcal{F}$ourier de f. On notera $S_\infty(f)$ la série de $\mathcal{F}$ourier de f.

Remarque 3.2.8 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et absolument intégrable sur $[0, 2\pi]$. La suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée.*

En effet, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(x)\, e^{-inx}\right| dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx.$$

Le même résultat est valable pour les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$.

Remarque 3.2.9 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et absolument intégrable sur tout intervalle borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si f est développable en série de $\mathcal{F}$ourier, alors*

1. *Si f est paire :*

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx,$$

car la fonction $x \mapsto f(x)\cos nx$ est paire, pour tout n de $\mathbb{N}$.

$$b_n(f) = 0,$$

car la fonction $x \mapsto f(x)\sin nx$ est impaire, pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. *Si f est impaire :*

$$a_n(f) = 0,$$

car la fonction $x \mapsto f(x)\cos nx$ est impaire, pour tout n de $\mathbb{N}$.

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx,$$

car la fonction $x \mapsto f(x)\sin nx$ est paire, pour tout n de $\mathbb{N}$.

Théorème 3.2.10 ***(Dirichlet)*** *(Condition nécessaire)*

*Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique satisfaisant aux conditions de Dirichlet suivantes **:***

i) Les discontinuités de f (si elles existent) sont de première espèce et sont en nombre fini dans tout intervalle fini,

ii) f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Alors la série de $\mathcal{F}$ourier associée à f est convergente et on a :

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]=\begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x, \\ \frac{f(x+0)-f(x-0)}{2} & \text{si } f \text{ est discontinue en } x. \end{cases}$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue.

Les notations $f(x+0)$, $f(x-0)$ représente respectivement les limites à droite et à gauche de f au point x.

Théorème 3.2.11 ***(Jordan)***

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique satisfaisant aux conditions suivantes :

i) Il existe $M>0$ tel que $|f(x)|\leq M$.

ii) On peut partager l'intervalle $[\alpha,\alpha+2\pi]$ en sous intervalles $[\alpha_1,\alpha_2[\,,[\alpha_2,\alpha_3[\,,\cdots[\alpha_{n-1},\alpha_n]$, avec $\alpha=\alpha_1$ et $\alpha_n=\alpha+2\pi$ tels que la restriction $f_{|]\alpha_j,\alpha_{j+1}[}$ soit monotone et continue.

Alors la série de $\mathcal{F}$ourier associée à f est convergente et on ait :

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]=\begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x, \\ \frac{f(x+0)-f(x-0)}{2} & \text{si } f \text{ est discontinue en } x. \end{cases}$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où f est continue.

Exemple 3.2.12 *1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par*

$$f(x)=|x|\,,\ \textit{pour tout } x\in[-\pi,\pi]\,.$$

On a

i)

$$|f(x)|\leq\pi,\forall x\in[-\pi,\pi]\,.$$

ii) $f_{|[-\pi,0]}$ est décroissante, continue et $f_{|[0,\pi]}$ est croissante, continue.

f satisfait les conditions de Jordan, donc développable en série de $\mathcal{F}$ourier. Comme f