B) Logique des Prédicats

Introduction

On considère l'assertion suivante

Quelque soit x un nombre entier supérieur à 2, si x est un nombre premier alors x est impair

- 7 est un nombre premier, donc 7 est impair

Ce raisonnement utilise les notions d'objet et de propriété des objets: On peut noter

nombre_premier(7) → impair(7)

7 est l'**objet** ; nombre-premier est la **propriété**.

- Nombre_premier(7) étant un énoncé singulier,
- Pour les énoncés génériques , on utilise quantificateur universel $\forall$.

➢ **($\forall$ x) (nombre_premier(x) $\rightarrow$ impair(x)).**

autre exemple

`` TOUT être humain est mortel ''

($\forall$ x) (être-humain(x) $\rightarrow$ mortel(x)).

Définitions

Définition (alphabet).

L'*alphabet* de la logique des prédicats est constitué de

- un ensemble dénombrable de symboles de prédicats à 0, 1, ou plusieurs arguments, notés p, q, r, ..., homme, mortel, père, ...
- un ensemble dénombrable de variables d'objets (ou variables d'individu), notées x, y, z, x_1, x_2, ...
- un ensemble dénombrable de fonctions à 0, 1, ou plusieurs arguments, notées f, g, ... , double_de, ...
- les quantificateurs $\forall$, $\exists$;
- les connecteurs $\neg$; $\wedge$; $\vee$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$ et (;)

Remarques

- Q dénote un quantificateur quelconque:

  $\forall$ ou $\exists$.

- Les fonctions à 0 arguments sont appelées constantes (souvent notées a, b, ..., Ali, ...).
- Les prédicats à 0 arguments sont des variables propositionnelles (p, q….)

Définition (fonction , terme)

Une fonction conduit à une constante lorsque les variables sont instanciées.

- $f(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ où $x_{1,\ldots\ldots\ldots,}$ x_n : n variables indépendantes

  $n = 0$ f exprime une constante : a ou b..,

  $n = 1$: $f(x) =$ successeur (x), $f(x) = x^2$ ou carée (x)

  $n = 2$: $f(x, y) = x + y$………..

- toute variable x est un terme
- $f(t_1,\ldots,t_n)$ est un terme si f est une fonction à n arguments et $t_1,\ldots,t_n$ sont des termes

Définition (prédicat)

C'est une fonction propositionnelle qui conduit à une proposition lorsque les variables sont instanciées.

Exemple

Etudiant (x), est un prédicat à un argument

Etudiant(Ghofrane) exprime la proposition « ghofrane est un étudiant »

$P(x_1,\ldots.., x_n)$ où x_1……………, x_n : n variables indépendantes

- n = 0 P exprime une proposition, Doite
- n = 1 P exprime une propriété : premier (x)
- n = 2 P exprime une relation binaire : inferieur (x; y)

Définition (formule).

- Si p est un prédicat à n arguments et $t_1,...,t_n$ sont des termes alors $p(t_1,...,t_n)$ est une ***formule atomique*.**

- L'ensemble des *formules* ou formules bien formées de la logique des prédicats est alors défini de la manière suivante :

  - un atome est une formule
  - Si F_1 et F_2 sont des formules alors :

$\neg F_1$, $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \rightarrow F_2$, $F_1 \leftrightarrow F_2$ sont des formules

  - Si F est une formule et x une variable alors

    $\forall x\, F$, $\exists x\, F$ sont des formules

Exemples de traduction d'énoncés en formules:

- Tout est relatif.
- Une porte est ouverte ou fermée
- Tout ce qui brille n'est pas or.
- Pour tout entier il existe un entier plus grand. "
- Il existe un plus grand entier. "

- $\forall$ x relatif(x)
- $\forall$ x (porte(x) -> (ouvert(x) v fermé(x))
- $\exists$ x (brille(x) $\wedge$ $\neg$or(x))
- $\forall$ x (entier(x) -> $\exists$ y (entier(y) $\wedge$ plus-grand(y,x)))
- $\exists$ x (entier(x) $\wedge$ $\forall$ y (entier(y) -> plus-grand(x,y)))

Définition : (portée d'un quantificateur, variable libre).

Dans les formules $(\forall\ x\ A)$ et $(\exists\ x\ A)$,

A est appelé la ***portée*** du quantificateur.

Une **occurrence** d'une variable x est ***libre***

Si elle n'est dans la portée d'aucun quantificateur $\forall$, ou $\exists$.

Sinon elle est ***liée***.

exp: $\forall\ x\ p(x,y)$ x est lié par contre y est libre

Définition (formule fermée, formule ouverte)

Une formule est ***fermée*** (ou **close**)

Si elle ne contient pas de variables libres.

Sinon elle est ***ouverte***.

Remarque:

Une fbf est dite fermée (ou close) lorsqu'elle n'a aucune variable libre et pas lorsque toutes les variables sont liées, puisqu’une variable peut être libre et liée en même temps.

Exemple

$F1 = \forall y\ ((p(x) \vee \exists x\ p(x)) \wedge q(y))$

$F2 = \exists x\ \forall y\ ((p(x) \vee \exists x\ p(x)) \wedge q(y))$

Donner les variables libres; liées.

F est elle fermée?

Définition (substitution de variables).

L'application d'une substitution à une fbf E est le résultat du **remplacement *simultané* de *toutes* les occurrences *libres*** des variables dans E par leur terme associé.

Si E est une formule , s une substitution alors

$(E)_s$ est appelé une ***instance* de E**.

Exemple

E = $(\forall x\, q(x,y))$ et appliquant la substitution **s {x par z et y par t}**

$(E)_s$ = $(\forall x\, q(x, \mathbf{t}))$

- *Notation:*

une substitution s de x_1 par t_1 , ... , x_n par t_n est alors notée

$$\mathbf{s = \{x_1 \backslash t_1 , \ldots , x_n \backslash t_n\}.}$$

Exemples de substitutions

Exemple :

$E = P(X,Y) \wedge Q(g(X),Z)$

$q = \{X\backslash f(a), Y\backslash g(t), Z\backslash t\}$ une substitution

$(E)q =$ est une instance de E

- $(p(x) \vee q(x,y))\{x\backslash z\} =$
- $(p(x) \vee q(x,y))\{x\backslash y\} =$
- $(\forall x\, q(x,y))\{x\backslash z\} =$
- $(p(x,y) \vee \exists y\, q(x,y))\{x\backslash z, y\backslash z\} =$

Composition de substitutions

Soit

$q = \{X1\backslash t1, X2\backslash t2, ..., Xn\backslash tn\}$ et $s = \{Y1\backslash u1, Y2\backslash u2, ..., Ym\backslash um\}$

la composition de q **et** s **(notée s°q)** est la substitution obtenue à partir de

$\{X1\backslash (t1)s, X2\backslash (t2)s, ..., Xn\backslash (tn)s, Y1\backslash u1, Y2\backslash u2, ..., Ym\backslash um\}$ en éliminant les couples :

a) $Yi\backslash ui$ si Yi appartient à $\{X1, X2, ..., Xn\}$

b) $Xj\backslash (tj)s$ si $Xj = (tj)s$

Exemple :

$q = \{X\backslash f(T), Y\backslash Z\}$

$s = \{X\backslash a, T\backslash b, Z\backslash Y\}$

$s°q = \{X\backslash f(T).s , Y\backslash Z.s, X\backslash a, T\backslash b, Z\backslash Y\}$

$= \{X\backslash f(b), Y\backslash Y, X\backslash a, T\backslash b, Z\backslash Y\}$

$= \{X\backslash f(b), T\backslash b, Z\backslash Y\}$

On note aussi

$(E)s°q = ((E)q)s$

Déterminer $(E)s°q$ sachant que $E = P(X,Y) \wedge Q(g(X),Z,T)$

Remarques

- **Substitutions interdites :**

  constante\ ?

  X\f(X)

  fonction\ ?

- **La composition est associative et possède un élément neutre** (substitution vide)

Exercice

Calculer la substitution S = Sa°Sb dans les trois cas suivants :

a) $Sa = \{X\backslash Y, W\backslash f(Z), V\backslash b\}$ et

$Sb = \{Y\backslash X, V\backslash g(W), U\backslash f(V)\}$

- b) $Sa = \{Z\backslash c, X\backslash f(W), Y\backslash T\}$ et

  $Sb = \{Z\backslash b, Y\backslash g(a,X)\}$

- c) $Sa = \{Z\backslash f(a), Y\backslash f(b)\}$ et

  $Sb = \{X\backslash a, Y\backslash b, W\backslash T\}$

Théorie des modèles

Définition (interprétation).

Une *interprétation* I est constituée de :

- un ensemble *non-vide* D appelé *domaine d'individus*
- une fonction IV de l'ensemble des variables dans D
- une fonction IF associant à chaque fonction à n arguments une application de D^n dans D
- une fonction IP associant à chaque prédicat à n arguments un sous-ensemble de D^n
- Les fonctions d'interprétation IV , IF , IP sont souvent notées I.

Définition :Interprétation des termes

On peut étendre l'interprétation I aux termes :

- à chaque symbole de constante c, on associe sa valeur selon I, I(c) ;
- à chaque variable x, on associe la variable elle-même $I(x) = x$;
- à chaque terme $f(t_{1\ldots}, t_n)$, on associe le terme $f'(t'_{1\ldots}, t'_n)$ où $t'_{1\ldots}, t'_n$ sont les interprétations des $t_{1\ldots}, t_n$ et f′ est l'interprétation de f. c.a.d

$$I(f(t_1,...,t_n)) = (I(f))(I(t_1),...,I(t_n))$$

Définition :Interprétation des formules

Une interprétation donnée I peut être *étendue aux formules* par :

- $I(p(t_1,...,t_n))$ = Vrai ssi

  $I(p)$ contient $(I(t_1),...,I(t_n))$
- $(\forall\ x\ A)$ = Vrai ssi

  $I'(A) = 1$ pour toute variante I' de I en x
- $(\exists\ x\ A)$ = Vrai ssi

  il existe une variante I' de I en x telle que

  $I'(A)$ = Vrai

exemple d'interprétation

Soit la formule:

$$A = (\forall\, x\, \exists y\, R(x,y)) \wedge (\forall\, x\, \neg R(x,x)) \wedge$$
$$(\forall\, x \forall\, y \forall\, z\, ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))).$$

Donnez une interprétation I1 pour A tel que I1(A) est vraie

Donnez une interprétation I2 pour A tel que I2(A) est fausse

Validité et Consistance

- **Définition Formule valide**

  Une formule F est **valide** ssi,

  pour toute interprétation I, on a I(F) = Vrai.

- **Définition Formule satisfiable**

  Une formule A est **satisfiable**, ou **sémantiquement consistante** si,

  il existe une interprétation I telle que I(A) = Vrai.
  L'interprétation est alors **un modèle** de A.

- **Définition Formule invalide**

  Une formule invalide est fausse dans au moins une interprétation.

- **Définition Formule insatisfiable**

  Une formule **insatisfiable**, ou **sémantiquement inconsistante**, ou encore **antitautologie**,

  est une formule **fausse dans toute interprétation**.

- **Définition Formule contingente**

  Une formule **contingente** est vraie dans certaines interprétations et fausse dans d'autres.

- **Définition Conséquence logique**

Soit une formule B et une famille de n formules $A_1\ A_2\ \dots\ A_n$; On dit que B est conséquence des Ai i =1à n

si pour toute interprétation I telle que

$\forall A_i$, $I(A_i) = V$, on a aussi $I(B) = V$.

On note alors $\mathbf{A_1, A_2 \dots, A_n \models B}$.

Exemple

Soit la formule suivante : $F = \forall x \exists y p(x,y) \rightarrow \exists y p(y,y)$

a) Dans les interprétations suivantes, dites si F est vraie ou fausse :

- D = {Hommes} et p(x,y) signifie x est le père de y.
- D = {Hommes} et p(x,y) signifie y est le père de x.
- $D = R$ et $p : R \times R \rightarrow \{V,F\}$

  tel que p(x,y) :« x <= y »

b) Que peut-on dire, en terme de validité et de consistance, au sujet de la formule F ?

Définition Formules équivalentes

Deux formules sont équivalentes quand elles ont la même valeur de vérité dans toute interprétation (notation : $A \cong B$).

Propriété de Formules équivalentes

Soit A et B deux formules bien formées de la logique des prédicats.

Les formules équivalentes de la logique des propositions demeurent équivalentes en logique des prédicats.

- $\forall xA \land \forall xB \cong \forall x (A \land B)$. $\exists xA \lor \exists xB \cong \exists x (A \lor B)$
- $\neg(\forall xA) \cong \exists x \neg A$. $\neg(\exists xA) \cong \forall x \neg A(x)$

Remarque :

⋆ $\forall x\, A \lor \forall x\, B \neq \forall x\, (A \lor B)$ ⋆

⋆ $\exists x\, A \land \exists x\, B(x) \neq \exists x\, (A \land B)$ ⋆

Théorie de la preuve

Définition axiomatique de Hilbert.

- Les *schémas d'axiome* de la logique des prédicats sont ceux de la logique propositionnelle, plus

- $(A)\{x\backslash t\} \rightarrow \exists x\, A$
- $\forall x\, A \rightarrow A\{x\backslash t\}$

(où $\{x\backslash t\}$ est une substitution quelconque),

- les *règles d'inférence* sont Modus Ponens :

  Si A , $A \rightarrow B$ alors B

  A e t $A \rightarrow B$ sont appelées ***prémisses***, et
  B est appelée ***conclusion*** de la règle.

- plus les deux règles pour les quantificateurs

  Si $A \to B$ Alors $A \to (\forall x\, B)$

  s'il n'y a pas d'occurrence libre de x dans A

Exemple $\exists x\, p(x,y) \rightarrow \exists y\, p(y,x)$ alors

ET

Si $A \to B$ Alors $(\exists x\, A) \to B$

s'il n'y a pas d'occurrence libre de x dans B

Exemple $\forall x\, p(x,y) \rightarrow \exists y\, p(y,x)$ alors

Equivalences relatives aux quantificateurs

Ce sont les principes de base pour pouvoir mettre en forme normale.

Fermeture universelle : soit A sans occurrence libre de x. Alors

$$|\!- A \quad \text{ssi} \quad |\!- \forall x A .$$

- Fermeture existentielle : soit A sans occurrence libre de x. Alors

  A est satisfiable ssi $\exists$ x A est satisfiable.

- Quantification répétée : $|\!- (Q_1\ x\ Q_2\ x\ A) \leftrightarrow Q_2\ x\ A$

- Quantification sans variable libre :

  soit A sans occurrence libre de x. Alors

  $|\!- (Q\ x\ A) \leftrightarrow A$

  $|\!- (A)\{x\backslash t\} \leftrightarrow A$

Renommage :

- $\vdash (Q\ x\ A) \leftrightarrow (Q\ y\ A)\{x\backslash y\}$
- Les deux cas où la distribution est possible :

  $\vdash (\forall\ x\ A) \wedge (\forall\ x\ B) \leftrightarrow \forall\ x\ (A \wedge B)$

  $\vdash (\exists\ x\ A) \vee (\exists\ x\ B) \leftrightarrow \exists\ x\ (A \vee B)$
- Elargissement de la portée des quantificateurs :

  soit B sans occurrence libre de x. Alors

  $\vdash (Q\ x\ A) \wedge B \leftrightarrow Q\ x\ (A \wedge B)$

  $\vdash (Q\ x\ A) \vee B \leftrightarrow Q\ x\ (A \vee B)$

<u>Formes normales</u>

1) Forme normale prénexe

Définition (forme normale prénexe).

A est en *forme normale prénexe* si elle est de la forme $Qx_1 \ldots Qx_n$ B , où B est une formule sans quantificateurs.

- La suite des quantificateurs est appelée ***préfixe***,
- B est appelée ***matrice***.

Algorithme de mise en forme normale prénexe

entrée : une formule A

sortie : une formule en forme normale prénexe

début

éliminer $\rightarrow$; $\leftrightarrow$, FALSE $\neg$;

appliquer autant que possible les équivalences suivantes, dans n'importe quel ordre

$\neg\neg A \cong A$;

$\neg(A \vee B) \cong \neg A \wedge \neg B$; $\neg(A \wedge B) \cong \neg A \vee \neg B$;

$\neg(\forall x A) \cong \exists x \neg A$; $\neg(\exists x A) \cong \forall x \neg A$

tant qu' il existe une sous-formule $Q\ x\ B$
telle que x apparaît en dehors de B dans A **faire**

remplacer $Q\ x\ B$ par $Q\ y\ (B)\{x\backslash y\}$,
(y est une nouvelle variable n'apparaissant pas dans A) ;
fin tant que;

appliquer autant que possible les équivalences suivantes, dans n'importe quel ordre

$(Q\ x\ A) \wedge B \cong Q\ x\ (A \wedge B)$; $(Q\ x\ A) \vee B \cong Q\ x\ (A \vee B)$
$A \wedge (Q\ x\ B) \cong Q\ x\ (A \wedge B)$; $A \vee (Q\ x\ B) \cong Q\ x\ (A \vee B)$

Fin

Exemple

Mettre sous forme prénexe les formules suivantes :

- $\exists$ x (p(x) -> $\forall$ x p(x))
- $\neg$(p(x) -> (($\exists$ y q(x,y)) $\wedge$ $\exists$ y r(y)))

Forme normale de Skolem

Définition (forme normale de Skolem).

Une formule est en *forme normale de Skolem*

- ✓ si elle est en forme normale prénexe et
- ✓ ne contient pas de quantificateur existentiel.

Algorithme de mise en forme normale de Skolem

entrée : une formule A

sortie : une formule en forme normale de Skolem

début

- mettre A en forme normale prénexe ;

- **pour tout** quantificateur existentiel $\exists$ x apparaissant dans **faire**

  * appliquer la substitution $\{x \backslash f(x_1,...,x_n)\}$ à la matrice de A , ($x_1,...,x_n$ sont dans la portée des **quantificateurs *universels* précédant $\exists$ x** dans le préfixe de A et f est une nouvelle fonction qui n'a pas encore été utilisée)

  * supprimer $\exists$ x du préfixe de A

fin pour tout

fin

Remarque. Si n = 0 on substitue par une constante.

Exemple

Soit la formule

$$\exists u \, \forall x \, \exists y \, \forall z \, \exists t \, (p(x) \wedge q(y) \wedge r(x,z,t) \wedge s(y) \wedge k(u))$$

Forme normale clausale

Définition (forme normale clausale).

Une formule est en *forme normale clausale* si elle est

- ✓ en forme normale de Skolem,
- ✓ fermée et
- ✓ sa matrice est en forme normale conjonctive propositionnelle (conjonction de disjonction(s))

Algorithme de mise en forme normale clausale

entrée : une formule A

sortie : une formule en forme normale clausale

début

pour tout variable x apparaissant libre dans A **faire**

fermer A existentiellement : remplacer A par $\exists$ x A

fin pour

mettre A en forme normale de Skolem ;

mettre la matrice de A en forme normale conjonctive

fin

Exemple :

Soit la formule $\forall x \exists y ((p(x) \wedge q(x,y)) \vee r(z))$

Notation.

- Comme toute variable est quantifiée universellement, on peut éliminer le préfixe.

- Avec les mêmes définitions de littéral et clause qu'en logique propositionnelle, on peut appliquer la même convention notationnelle : une formule est représentée par un ensemble de clauses.

démonstration automatique

L'unification

Définition (unificateur)

Une substitution s *unifie* deux termes si elle les rend identiques :

s *unifie* t et t' si (t)s = (t')s.

Un unificateur d'un ensemble fini d'équations entre termes $E = \{t_1=t'_1 , ... , t_n=t'_n\}$ est une substitution qui unifie les deux termes de chaque équation

Exemple d'unificateur

Soit $E = \{x=f(y) , y=z\}$.

Un unificateur de E est $s = \{x\backslash f(a) , y\backslash a , z\backslash a\}$.

Définition (équations résolues).
Un ensemble d'équations E est *résolu* si

- toutes les parties gauches des équations sont des variables
- chaque variable apparaît au plus une fois dans E (en partie gauche)
- il n y a pas de substitutions interdites (constante\ ?, X\f(X), fonction\ ?) dans E

Soit $E = \{x_1=t_1 , ... , x_n=t_n\}$
un ensemble d'équations résolu.

La *substitution associé* à E est

$$s_E = \{x_1\backslash t_1 , ... , x_n\backslash t_n\}$$

Remarque.

Soit $E = \{x_1=t_1 , ... , x_n=t_n\}$

un ensemble d'équations E est dit résolu, si

pour tout x\t dans s_E :

- x n'apparaît pas dans t
- si t contient un y, alors il n'y a pas d'autre y\t' dans s.

Alors on a en particulier

s_E est l'upg (l'unificateur le plus général) de E.

Algorithme d'unification

entrée : un ensemble fini E d'équations entre termes

sortie : ou bien échec, ou bien un upg de E

début

tant que E n'est pas résolu **faire**

choisir une équation de E ;

appliquer une des règles suivantes à cette équation :

si elle est de la forme t = t alors la supprimer

si elle est de la forme $f(t_1,...,t_n) = g(t'_1,...,t'_m)$ et f et g sont différentes alors échec

si elle est de la forme $f(t_1,...,t_n) = f(t'_1,...,t'_n)$ alors

la remplacer par n équations $t_1 = t'_1, ... ,t_n = t'_n$

si elle est de la forme t = x et t n'est pas une variable alors la remplacer par x = t

si elle est de la forme x = t et x apparaît dans t alors échec

si elle est de la forme x = t et x n'apparaît pas dans t alors

remplacer x par t *partout ailleurs* dans E

fin tant que ;

rendre la substitution s_E associé à E

fin

Exemple: Soit {x=g(y) , f(x)=z , y=a}.

- remplacement y\a :
  {x=g(a) , f(x)=z , y=a}
- remplacement x\g(a) :
  {x=g(a) , f(g(a))=z , y=a}
- inversion de f(g(a))=z :
  {x=g(a) , z=f(g(a)) , y=a}
- L'upg associé est donc :
  {x\g(a) , z\f(g(a)) , y\a}

Théorème

Si un ensemble de termes est unifiable alors l'algorithme calcule leur upg, sinon il s'arrête sur échec.

Exemple

Donner l' upg (s'il existe) des deux formules suivantes :

A1 : $q(x, f(x), f(f(x)))$ A2 : $q(f(f(y)), y, f(y))$

La méthode de résolution

Définition (résolvante).

Soient C et C' deux clauses telles que

$C = \{p(t_1,...,t_n)\} \cup D$

$C' = \{\neg p(t'_1,...,t'_n)\} \cup D'$

S'il existe un **upg** $\mathbf{s = \{t_1 \backslash t'_1 , ... , t_n \backslash t'_n\}}$
(après avoir éventuellement renommé les variables d'une des deux clauses)

Alors **(D U D')s est une *résolvante* de C et C'.**

Exemple.

Soient les deux clauses

$$C = \{p(x,f(y)) , q(x,y,z)\}$$

$$D = \{\neg p(y,u) , \neg p_1(y) , p_2(h(u,y))\}$$

Donner la résolvante des deux clauses C et D

définition (facteur).

Soit C une clause telle que

$C = \{p(t_1,\ldots,t_n),p(t'_1,\ldots,t'_n)\} \cup D$, ou

$C = \{\neg p(t_1,\ldots,t_n),\neg p(t'_1,\ldots,t'_n)\} \cup D$,

et il existe **upg** $\mathbf{s = \{t_1 \backslash t'_1 , \ldots , t_n \backslash t'_n\}}$ (après avoir éventuellement renommé les variables d'une des deux clauses)

Alors **(C)s est un *facteur* de C.**

Exemple.

Soit la clause

$$C = \{\neg p(x,a) \,,\, \neg p(f(y),y) \,,\, q(y,z)\}.$$

On applique l'algorithme d'unification à $\{x=f(y) \,,\, a=y\}$, qui rend un unificateur le plus général $s = \{x\backslash f(a) \,,\, y\backslash a\}$.

Alors on applique s à C : Un facteur de C est donc :

$$(C)s = \{p(f(a),a) \,,\, q(a,z)\}$$

Définition (réfutation).

Une *réfutation* des clauses $C_1,...,C_m$ est une liste finie de clauses $(D_1, ... ,D_n)$ telle que

D_n est la clause vide

pour i = 1, ...,n, la clause D_i est

- ✓ soit égale à une des clauses C_j
- ✓ soit elle est résolvante de deux clauses D_j, D_k précédant D_i dans la liste
- ✓ soit elle est facteur d'une clause D_j précédant D_i dans la liste

Corollaire.

Pour savoir si une formule donnée A est valide en logique des prédicats, il suffit de

- nier A : $A' = \neg A$
- mettre A' en forme normale clausale ;
- répéter la production de résolvantes et facteurs jusqu'à ce que
  - ou bien la clause vide est produite
  - ou bien il n'est plus possible de produire des clauses nouvelles

✓ si la clause vide est produite alors A est valide ;

✓ S' il n'est plus possible de produire des clauses nouvelles alors A n'est pas valide

Soient la formule logique ci-dessous, Est elle valide.

$$\forall x.\ \exists y\ (R(x, y) \wedge (\forall z\ R(x, z) \rightarrow (\ z = y \vee R(y, z))))$$

Clauses de Horn

Définition (clause de Horn):

- *Une clause de Horn* est une clause dont au plus un littéral positif.

Dans le cas où la clause a exactement un atome positif, $(A \vee \neg A1 \vee \neg A2 \vee . . . \vee \neg An)$

on parle de clause définie et on la note:

$$A \leftarrow A1,A2, . . . ,An$$

où les A1,A2, . . . ,An, A sont des formules atomiques

Définition (fait, règle, programme logique, question).

- ✓ Un *fait* est un littéral positif.

- ✓ Une *règle* est une clause avec un littéral positif et au moins un littéral négatif (elle est donc de la forme $\{p, \neg p_1, ..., \neg p_n\}$, avec $n > 0$)

- ✓ Un *programme logique* est une liste de faits et règles.

- ✓ Une *question* est une clause sans littéral positif.

Définition (réponse).

Soit

P un programme logique, et

C une question.

Alors une substitution **s** est une *réponse* ssi

P U {(C)s} est insatisfiable

Exemple

Soit le programme logique

$P = \{$

$\{père(a,b)\},$

$\{père(a,c)\},$

$\{père(d,a)\},$

$\{fils(x,y) , \neg père(y,x)\} \}$

Soit la question $\{\neg fils(z,a)\}$.

Alors les substitutions $\{z \backslash b\}$ et $\{z \backslash c\}$ sont des réponses.

Sachant que :

– un oncle est soit le frère d'une mère, soit le frère d'un père ;

– Farid est l'oncle de Yakoub ;

– Bachir est le père de Yakoub ;

Radia est la mère de Yakoub ;

– Bachir n'a pas de frère ;

Déduire par la méthode de résolution le nom du frère de radia.

__Exercice1__

On considère les propositions suivantes :

$P1$ Tout crime a un auteur

$P2$ Seuls les gens malhonnêtes commettent des crimes

$P3$ On n'arrête que les gens malhonnêtes

$P4$ Les gens malhonnêtes arrêtés ne commettent pas de crimes

$P5$ Des crimes se produisent

On voudrait en déduire :

Q Il y a des gens malhonnêtes en liberté

Exercice2

Soit l'énoncé

1. Les personnes qui ont la grippe A doivent prendre du Tamiflu.
2. Les personnes qui ont de la fièvre et qui toussent ont la grippe A.
3. Ceux qui ont une température supérieure à 38◦ ont de la fièvre.
4. Mourad tousse et a une température supérieure à 38◦
5. Mourad doit prendre du Tamiflu.

Questions

Modélisez en logique du premier ordre l'énoncé ci-dessus en utilisant les prédicats suivants :

- grippe(x) : x a la grippe A.
- fievre(x) : x a de la fièvre.
- temp(x, t) : x a la température t.
- prendre(x, y) : x doit prendre y.
- tousse(x) : x tousse.
- sup(x, y) : x est supérieur à y.

On utilisera les constantes 38, Mourad et Tamiflu.

Prouvez à l'aide de la méthode de résolution que la dernière affirmation est une conséquence des autres