Théorie des graphes

Université de Jijel

Mr.HEMIOUD

- Introduction aux théorie des graphes
- **Notions de base**
- **Décomposition d'un graphe en niveaux**
- **Problème de coloration d'un graphe**
- **Arbre Couvrant de poids Minimal : ACM**
  - Algorithme de Kruskal
  - Algorithme de Prim
- **Problème du plus court chemin**
  - algorithme de Dijkstra (source unique)
  - algorithme de Bellman-Ford (source unique)
  - algorithme de Floyd-Warshall (tous les PCC)
- **Le Problème du Flot Maximal**
  - Les réseaux de transport
  - Le flot maximum et la coupe minimum
  - L'algorithme de Ford et Fulkerson
- **le Réseau PERT**

Notions de base en théorie des graphes

Notions de base en théorie des graphes

1. **Graphe** : Un graphe est constitué de deux ensembles :
   - Un ensemble de **sommets** ou **nœuds** (noté S),
   - Un ensemble d'**arêtes** ou **liens** (noté A) reliant certains sommets entre eux.

   A = {(x,y) ∈ S ×S / le sommet x est en relation avec le sommet y}.

   On note : G=(S,A)
2. **Sommet (ou nœud)** : Un sommet est un point ou un objet de base dans un graphe. Chaque sommet peut être connecté à d'autres sommets via des arêtes.
3. **Arête (ou lien)** : Une arête relie deux sommets dans un graphe. Elle peut être :
   - **Orientée (ou digraphe)** : si elle a une direction (graphe orienté),
   - **Non orientée** : si elle n'a pas de direction particulière (graphe non orienté).

4. Graphe orienté et non orienté :

- **Graphe orienté** : Les **arêtes** ont un sens, c'est-à-dire qu'elles vont d'un sommet à un autre.
- **Notation.** Un **arc** $u = (x,y)$ est noté $\boldsymbol{x \rightarrow y}$, x est appelée origine (ou *extrémité initiale*) y est appelée destination (ou *extrémité finale*).

- **Graphe non orienté** : Les arêtes n'ont pas de direction, elles relient simplement deux sommets sans notion de sens.
- **Notation.** $u = (x,y)$ est alors appelée une **arête**, notée $\boldsymbol{x - y}$

5. Etant donné un graphe G=(S,A) et $x \in S$

- si $(x,y) \in A$, alors y est un **successeur** de x
- si $(y,x) \in A$, alors y est un **prédécesseur** de x
- x et y sont **adjacents** si y est un prédécesseur et/ou un successeur de x
- **l'ensemble des successeurs** de x est noté $\Gamma^{+}(x)$

  $$\Gamma^{+}(x) = \{y \mid (x,y) \in A\}$$

- **l'ensemble des prédécesseurs** de x est noté $\Gamma^{-}(x)$

  $$\Gamma^{-}(x) = \{y \mid (y,x) \in A\}$$

- l'ensemble des **voisins** de x est noté $\Gamma(x)$

  $$\Gamma(x) = \Gamma^{+}(x) \cup \Gamma^{-}(x)$$

6. **Degré d'un sommet :** Le degré d'un sommet *x* est le nombre d'arêtes qui lui sont associées.

Dans un **graphe orienté**, on distingue :

- **Degré entrant**(intérieur) **:** nombre d'arêtes pointant vers le sommet, noté $d^-(x)$: $d^-(x) = |\Gamma^-(x)|$
- **Degré sortant** (extérieur)**:** nombre d'arêtes partant du sommet, noté $d^+(x)$: $d^+(x) = |\Gamma^+(x)|$

- le **degré de** x est noté d(x) : $d(x) = |\Gamma(x)|$

7. **Le degré d'un graphe** est le degré maximum de tous ses sommets.

Relations entre d^+, d^-, d et m :

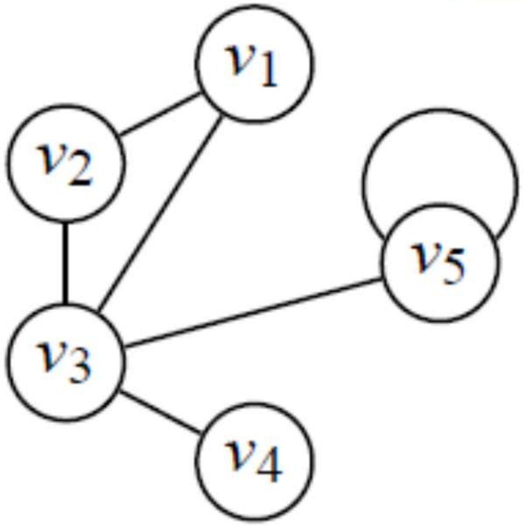
- pour le cas des ***graphes orientés*** sans boucles :

$$\sum_{x \in S} d^+(x) = \sum_{x \in S} d^-(x) = \frac{1}{2} \sum_{x \in S} d(x) = m$$

- pour le cas des ***graphes non orientés*** :

$$\sum_{x \in S} d(x) = 2m$$

Degré d'un sommet



d(v1) = 2
d(v2) = 2
d(v3) = 4
d(v4) = 1
d(v5) = 3

Théorème: La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes

Le **degré d'un graphe** est le degré maximum de tous ses sommets **d(G)=** d(v3) = 4

8. On appelle **ordre** d'un graphe fini le nombre de ses sommets. On note : **|S|= card(S) =** ***n***

9. On appelle **taille** d'un graphe fini le nombre de ses arêtes. On note : **|A|= card(A) =** ***m***

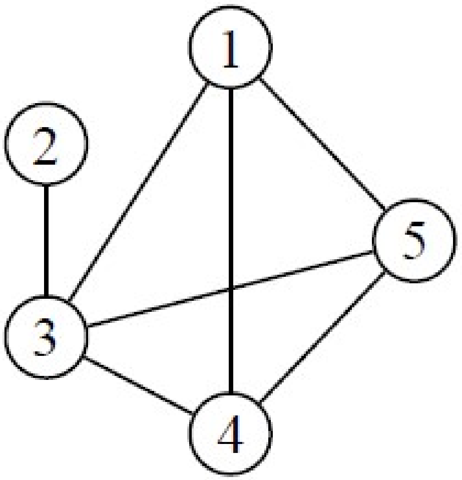
10. Soit **u = (x,y)** une **arête**. On dit que ***u*** **est incidente à** ***x*** (et **à** ***y***).

11. Soit **u = (x,y)** un **arc**. On dit que ***u*** est **incident** à ***x*** vers **l'extérieur** et **incident** à ***y*** vers **l'intérieur**.

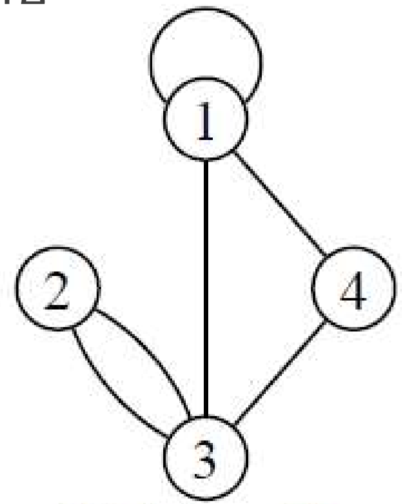
    On dit que les sommets ***x*** et ***y*** sont **adjacents** à l'arc ou arête ***u***.

Types de graphes

- **Graphe simple** : Un graphe est dit simple s'il n'a ni boucles (arête reliant un sommet à lui-même) ni arêtes multiples (plus d'une arête entre deux sommets).
- **Graphe pondéré** (**valué**): Un graphe est pondéré si chaque arête est associée à une valeur (ou **poids**) qui peut représenter une distance, un coût ou toute autre métrique pertinente.



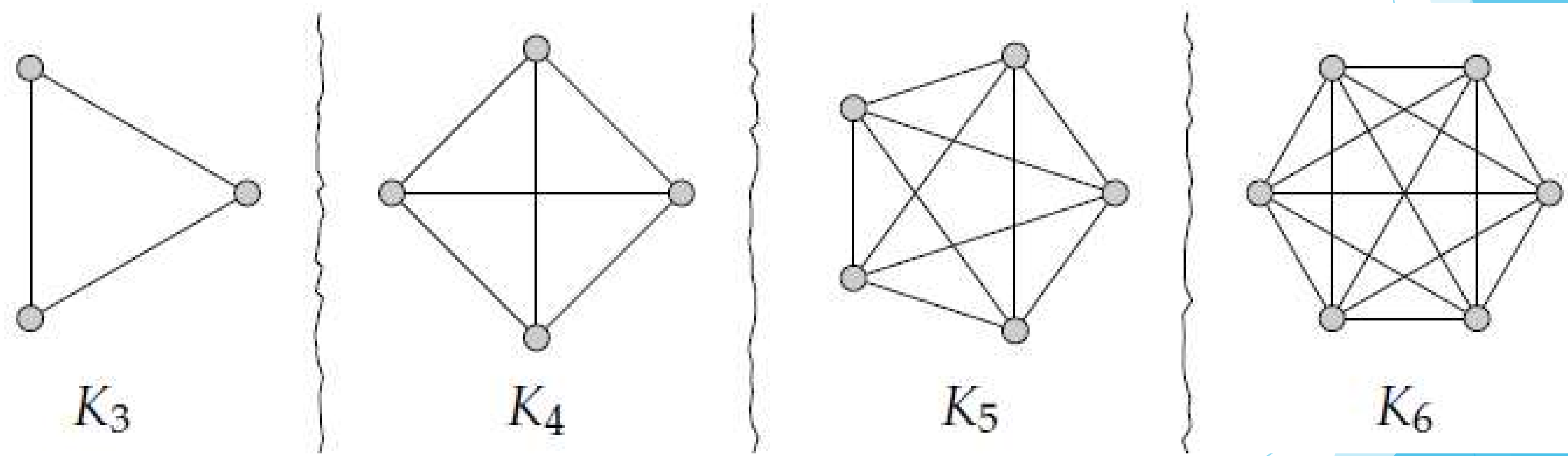
Graphe simple



Multigraphe

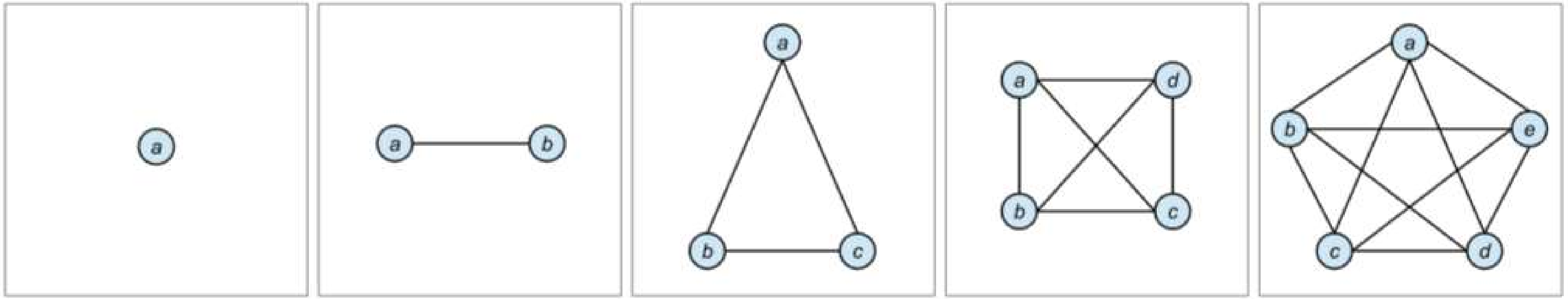
Types de graphes

- **Graphe complet** : Un graphe est complet si chaque paire de sommets est connectée par une arête. Un graphe complet avec *n* sommets est noté **Kn**.



Types de graphes

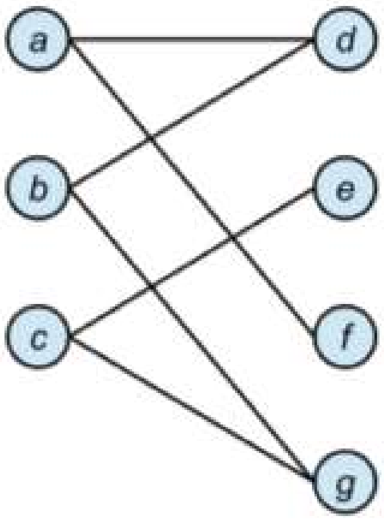
- Un graphe est dit **régulier** si tous les sommets ont le **même degré.**
- Si le degré commun est **k**, alors on dit que le graphe est **k-régulier.**



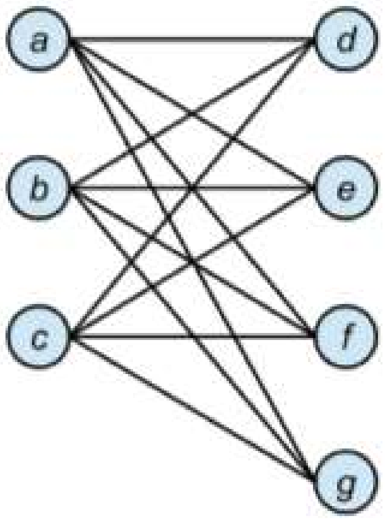
(a) K_1 (b) K_2 (c) K_3 (d) K_4 (e) K_5

Types de graphes

- **Graphe biparti** : Un graphe dont l'ensemble des sommets peut être divisé en deux sous-ensembles (S_1,A_1) et (S_2,A_2) , tels que toutes les arêtes relient un sommet de S_1 à un sommet de S_2 , mais aucune arête ne relie deux sommets du même sous-ensemble.



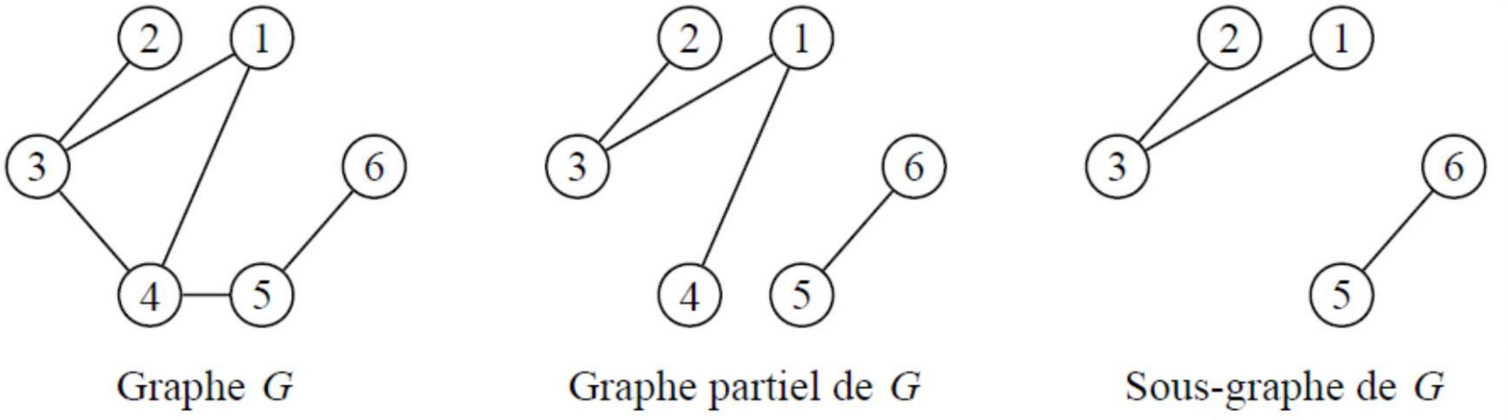
(a) Graphe biparti G



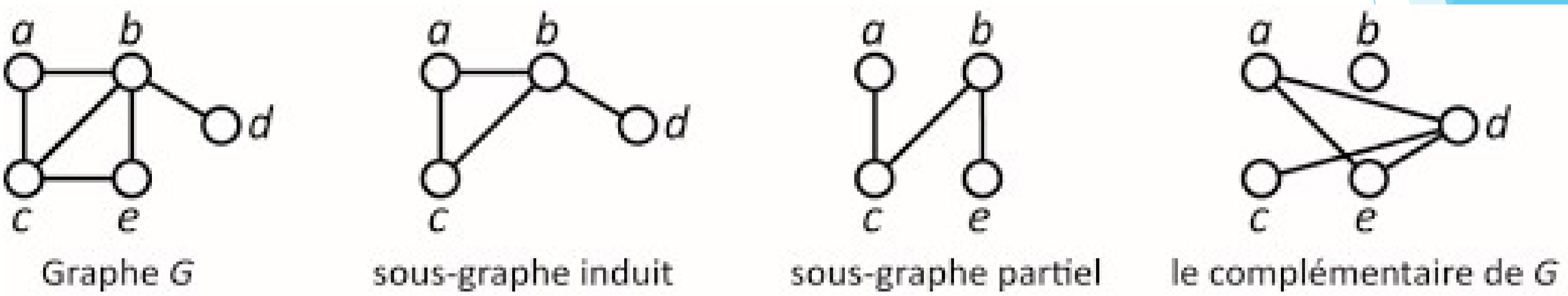
(b) Graphe biparti complet $K_{3,4}$

Types de graphes

- **Sous-graphe** : Un sous-graphe est un graphe formé par un sous-ensemble des sommets et des arêtes d'un graphe donné.
- On appelle **graphe partiel** de G un graphe dans lequel on a supprimé des arcs (ou arêtes) sans supprimer de sommets.

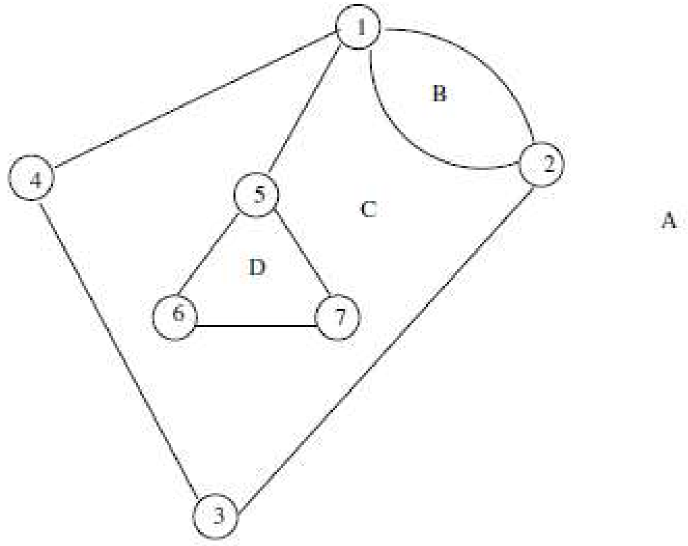


Types de graphes



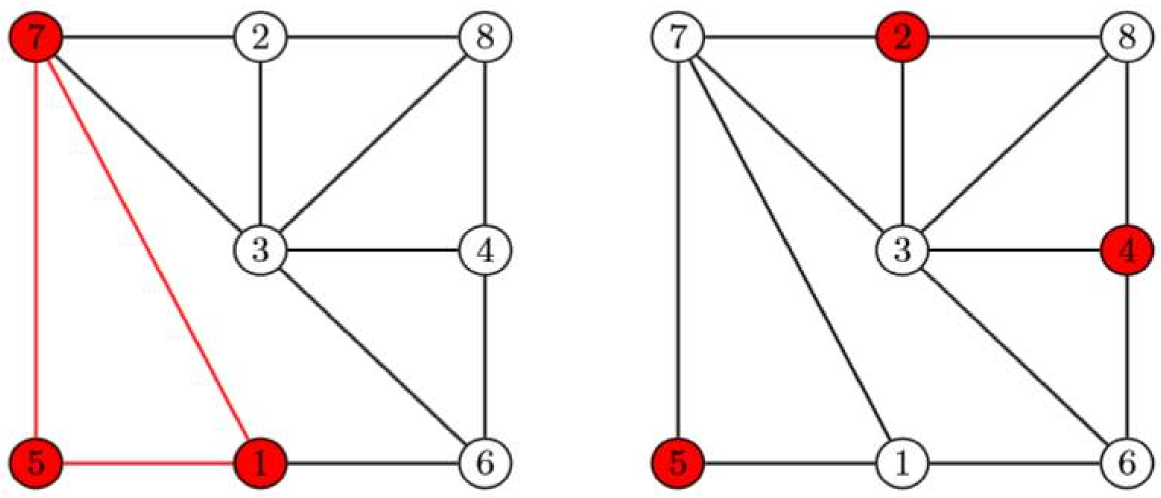
Types de graphes

- **Graphe planaire** : Un graphe est planaire s'il peut être dessiné sur un plan sans que ses arêtes ne se croisent.
- **Faces d'un graphe planaire :** le plan se retrouve divisé en un certain nombre de régions qu'on appelle les **faces** de la représentation planaire.
  - Par exemple, le graphe suivant possède 4 faces (notées A, B, C et D). On dira que les arêtes (1,2); (1,4); (4,3); (3,2); (5,6) et (5,7) constituent des frontières entre des faces différentes.



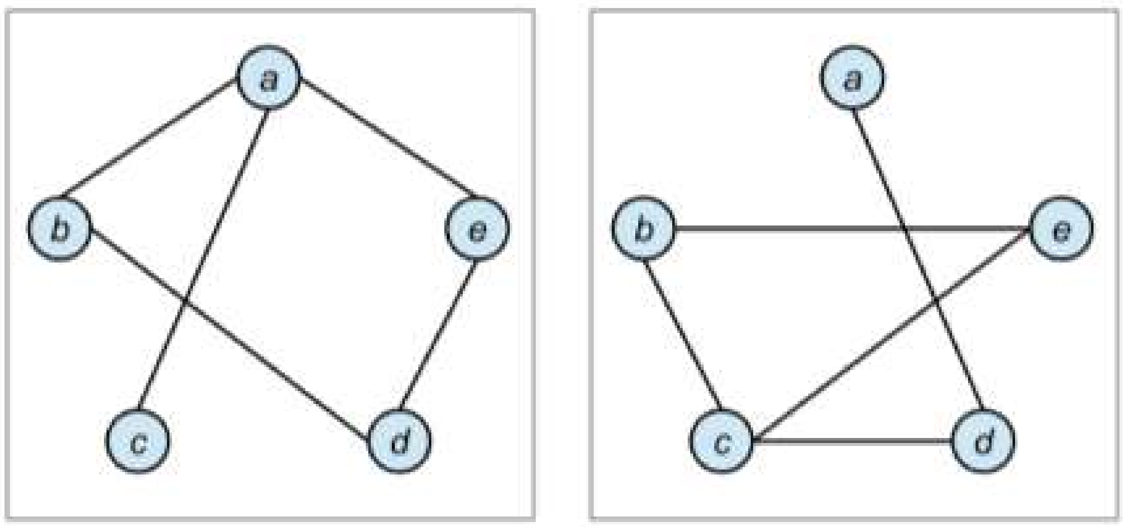
Types de graphes

- une **clique** est un sous-graphe complet de G
- un **stable** est un sous-graphe de G sans arcs/arêtes



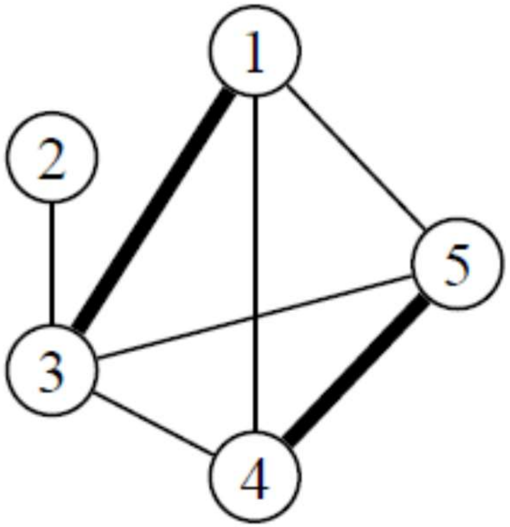
Types de graphes

- Deux graphes simples G = (A,S) et $\overline{G}$ = (A,$\overline{S}$) sont **complémentaires** si $S \cap \overline{S} = \emptyset$ et H =(A, $S \cup \overline{S}$) est un graphe où pour chaque couple de sommets (x,y) l'arête xy existe.

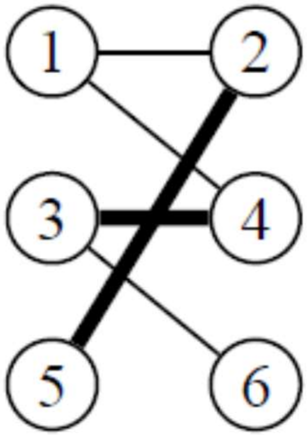


(a) Graphe G. (b) Graphe $\overline{G}$.

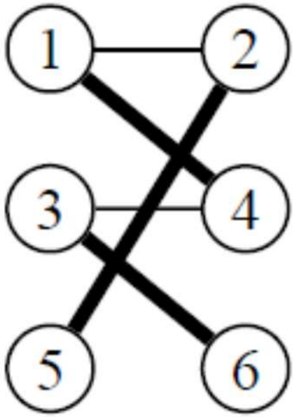
- Un **couplage** d’un graphe G = (A,S) est un sous-graphe composé d’arêtes deux à deux non adjacentes.
- Un **couplage parfait** d’un graphe G = (A,S) est un graphe partiel composé d’arêtes deux à deux non adjacentes .



En **gras**, un couplage **maximum** de *G*. Les sommets 1, 3, 4 et 5 sont **saturés**.



Un couplage



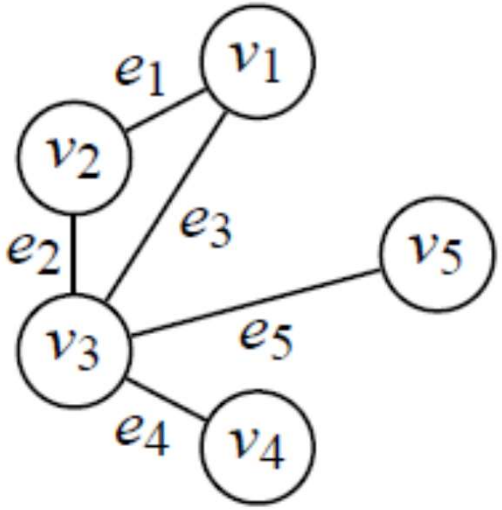
Un couplage maximum et parfait

Chaînes et cycles

- **Chaînes et cycles**
- Le graphe ci-dessous contient entre autres les **chaînes**

  ($v1$, $e1$, $v2$, $e2$, $v3$, $e5$, $v5$) et

  ($v4$, $e4$, $v3$, $e2$, $v2$, $e1$, $v1$).



- On ne change pas une chaîne en inversant l'ordre des éléments dans la suite correspondante. Ainsi, les chaînes ($v1$, $e3$, $v3$, $e4$, $v4$) et ($v4$, $e4$, $v3$, $e3$, $v1$) sont identiques

- Une chaîne est **élémentaire** si chaque ***<u>sommet</u> y*** apparaît ***<u>au plus</u>*** une fois.

- Une chaîne est **simple** si chaque ***<u>arête</u>*** apparaît ***<u>au</u> <u>plus</u>*** une fois.

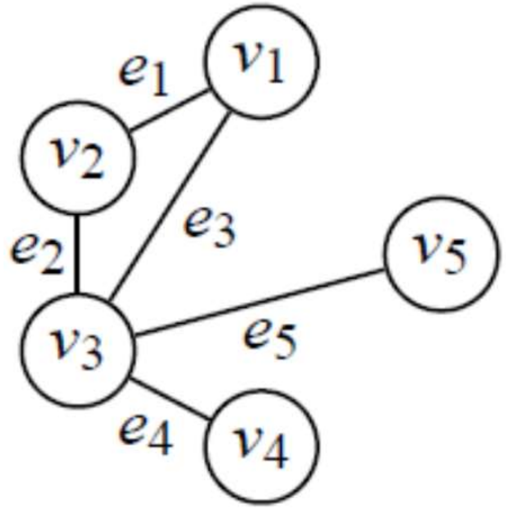
- Une chaîne dont les sommets de départ et de fin sont les mêmes est appelée chaîne **fermée**.

- Une <u>chaîne fermée simple</u> est appelée **cycle**.

- (v1, e1, v2, e2, v3) est une chaîne simple et élémentaire.

- (*v*4, *e*4, *v*3, *e*5, *v*5, *e*5, *v*3, *e*4, *v*4) est une **chaîne fermée**.

- (*v*1, *e*1, *v*2, *e*2, *v*3, *e*3, *v*1) est un **cycle**.



Connexité et forte connexité

Connexité et forte connexité

- Un graphe est dit **connexe** s'il existe une **chaîne** entre toutes paires de sommets du graphe.
  - Si le graphe n'est pas connexe on peut identifier plusieurs sous-graphes connexes maximaux (au sens de l'inclusion) appelés **composantes connexes**.

- Un graphe orienté est dit **fortement connexe** si pour toute paire de sommets (x,y) il existe un **chemin** de x vers y ET un **chemin** de y vers x.
  - Si le graphe n'est pas fortement connexe on peut identifier plusieurs sous-graphes fortement connexes maximaux appelés **composantes fortement connexes.**

Construction de la composante connexe de x

Soit **G=(S,A).**

1. Marquer le sommet x *
2. Marquer tout sommet adjacent à un sommet déjà marqué. Poursuivre (2) jusqu'à ce que l'on ne puisse plus marquer aucun sommet.
3. Alors les sommets marqués sont ceux de la composante connexe de x.

Exemple

Théorème

- Pour un graphe G ayant ***m*** arêtes, ***n*** sommets et ***p*** composantes connexes, on définit :

$$\mathbf{V(G) = m - n + p}$$

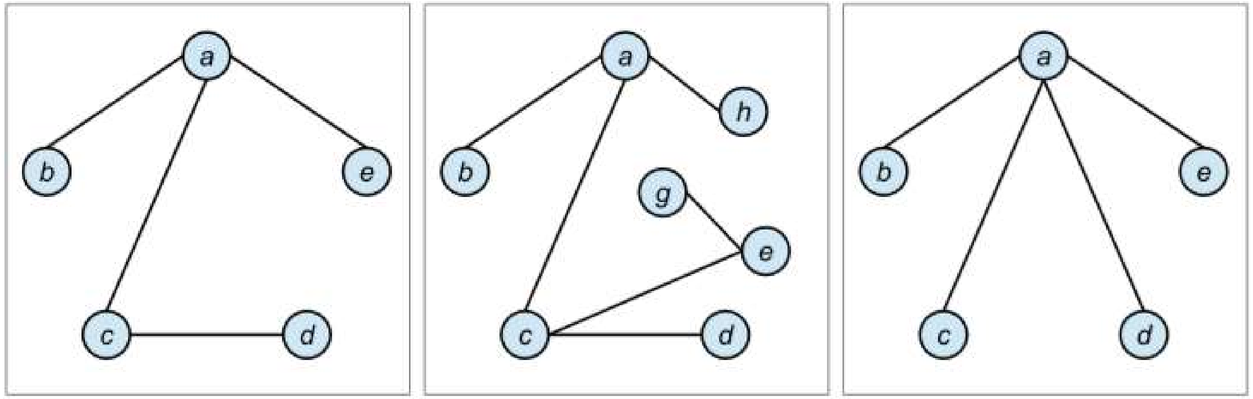
- **V(G)** est appelé le nombre **cyclomatique**. prononcer « nu de G».

- On a **V(G) > 0** pour tout graphe G.
- **V(G) = 0** si et seulement si G est sans cycle.

Arbres et arborescences

Arbre.

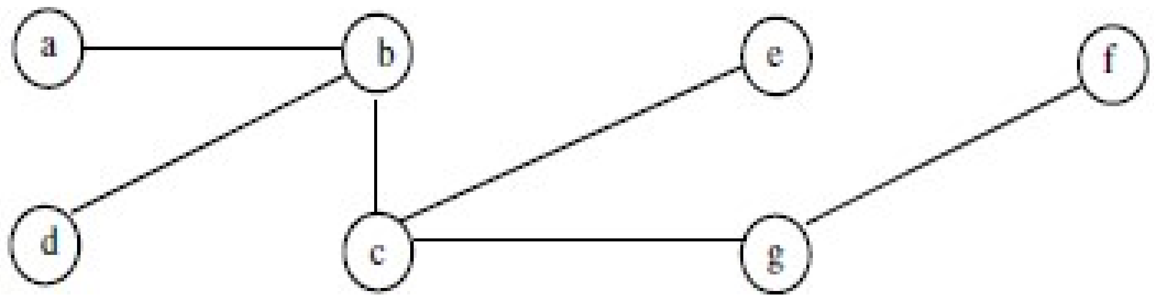
- Un **arbre** est un graphe qui peut être défini par l'une de propositions suivantes :
  - un arbre est un graphe **connexe** et **acyclique**;
  - un arbre est un graphe **connexe** avec **n−1 arêtes**;
  - un arbre est un graphe **acyclique** avec **n−1 arêtes**;
  - un arbre est un graphe dans lequel il existe une **chaine unique entre chaque paire de sommets.**



(a) Un premier arbre (b) Une deuxième arbre (c) Un troisième arbre

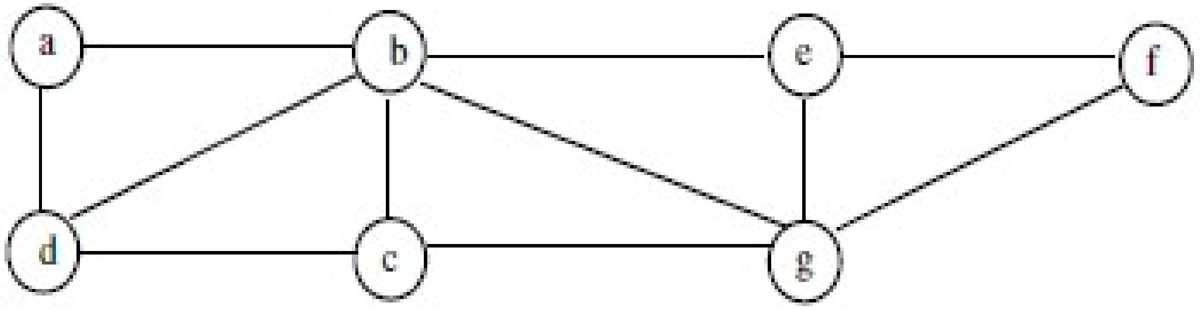
Arbre.

- Par exemple, le graphe suivant est un arbre :



- On appelle forêt un graphe dont chaque composante connexe est un arbre.

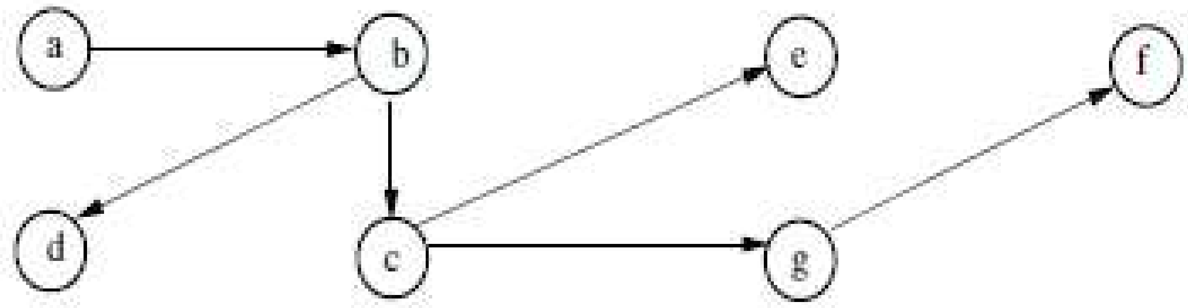
Exercice : On considère le graphe non orienté suivant :



- Combien faut-il enlever d'arêtes à ce graphe pour le transformer en arbre ? Donnez un graphe partiel de ce graphe qui soit un arbre.

Arborescence

- Une **arborescence** est un graphe orienté sans circuit admettant une racine $s_0 \in S$ telle que, pour tout autre sommet $s_i \in S$, il existe un chemin unique allant de s_0 vers s_i. Si l'arborescence comporte n sommets, alors elle comporte exactement n - 1 arcs.
- Par exemple, le graphe suivant est une arborescence de racine a :



Graphes eulériens
Graphes hamiltoniens

Graphe eulérien

- On appelle **cycle eulérien** d'un graphe *G* un cycle passant ***une et une seule*** fois par ***chacune des arêtes*** de *G*.

- Un **graphe** est dit **eulérien** s'il possède un cycle eulérien.

- On appelle **chaîne eulérienne** d'un graphe *G* une chaîne passant une et une seule fois par chacune des arêtes de *G*.

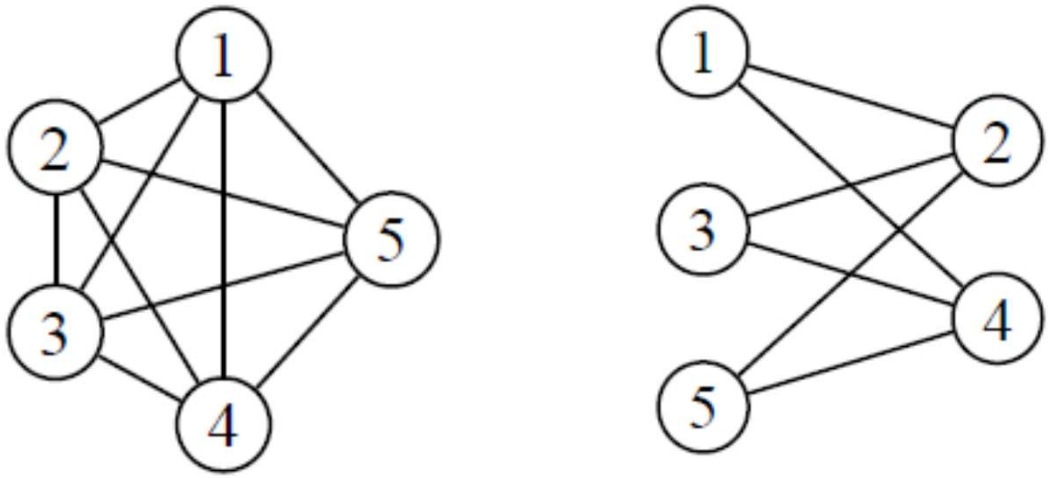
- Un graphe ne possédant que des chaînes eulériennes est **semieulérien.**

- Plus simplement, on peut dire qu'un **graphe est eulérien** (ou semi-eulérien) s'il est possible de dessiner le graphe sans lever le crayon et sans passer deux fois sur la même arête.

- si G est non-orienté alors G est **Eulerien** si et seulement si pour tout sommet est de **degré pair** : $\forall x \in S, \exists k \in N, d(x) = 2k$

Exercice

Les graphes suivants sont-ils eulériens (ou semi-eulériens) ?



Graphe orienté eulérien

- **Théorème** (d'Euler) Soit G = (S,A) un graphe connexe, alors G est **Eulerien** si et seulement si pour tout sommet le <u>degré sortant</u> est **égal** au <u>degré entrant</u> :

  $$\forall x \in S,\ d^{+}(x) = d^{-}(x)$$

- si seulement deux sommets ne vérifient pas la conditions précédente alors G est **semi-Eulerien**

Graphes hamiltoniens

- On appelle **cycle hamiltonien** d'un graphe *G* un cycle passant ***une et une seule fois*** par chacun des ***sommets*** de *G*.
- Un **graphe** est dit **hamiltonien** s'il possède un *cycle hamiltonien*.
- On appelle **chaîne hamiltonienne** d'un graphe *G* une chaîne passant une et une seule fois par chacun des sommets de *G*.
- Un graphe ne possédant que des *chaînes hamiltoniennes* est **semi-hamiltonien**.

- Contrairement aux graphes eulériens, il n'existe pas de caractérisation simple des graphes (semi-hamiltoniens). On peut énoncer quelques propriétés et conditions suffisantes :

  - un graphe possédant un sommet de degré 1 **ne peut** pas être **hamiltonien** ;
  - si un sommet dans un graphe est de degré 2, alors les deux arêtes incidentes à ce sommet doivent faire partie du **cycle hamiltonien** ;
  - les graphes complets *Kn* sont **hamiltoniens.**

Théorème (Ore)

- Soit G un graphe simple d'ordre $n > 3$. Si pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets non adjacents, on a $\boldsymbol{d(x)+d(y) > n}$, alors G est **hamiltonien.**

Corollaire (Dirac)

- Soit G un graphe simple d'ordre $n > 3$. Si pour tout sommet x de G, on a $\boldsymbol{d(x) > n/2}$, alors G est hamiltonien

Graphes orientés (Digraphe)

Graphes orientés (Digraphe)

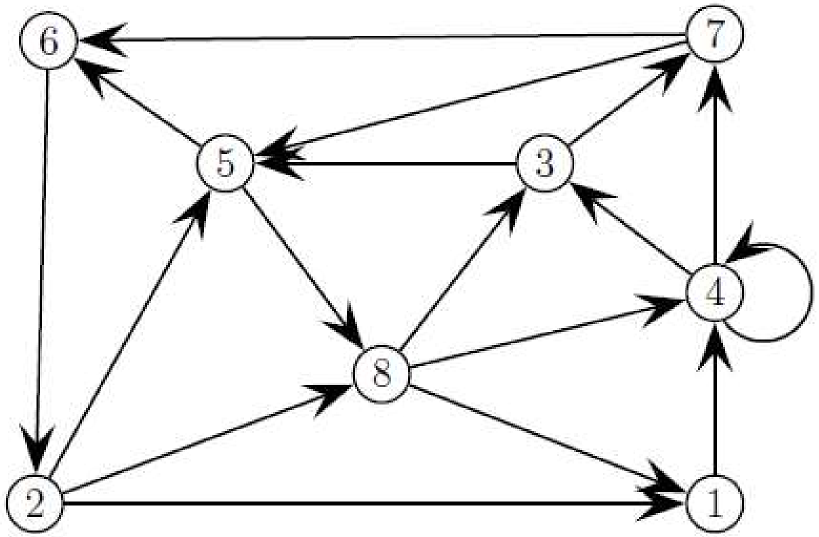
Chemins et circuits

- Un **chemin** est une suite d'arcs dont l'extrémité finale de chacun est l'extrémité initiale du suivant (sauf pour le dernier).
  - Exemple : a → b → c → d → g
  - Si le graphe n'est pas orienté, on parle alors de **chaîne**.
- Un chemin **simple** est un chemin qui <u>ne passe pas</u> plus d'une fois par <u>le même arc</u>.
- Un chemin **élémentaire** est un chemin qui <u>ne passe</u> pas plus d'une fois par le <u>même sommet</u>.

- Un **circuit** est un chemin simple qui se ferme sur lui-même (son origine et son extrémité sont confondues).

- La **longueur** d'un chemin est le nombre d'arcs qui le constituent.

- On appelle **distance** entre deux sommets d'un digraphe la longueur du plus petit chemin les reliant. S'il n'existe pas de chemin entre les sommets x et y, on pose $d(x, y) = \infty$.



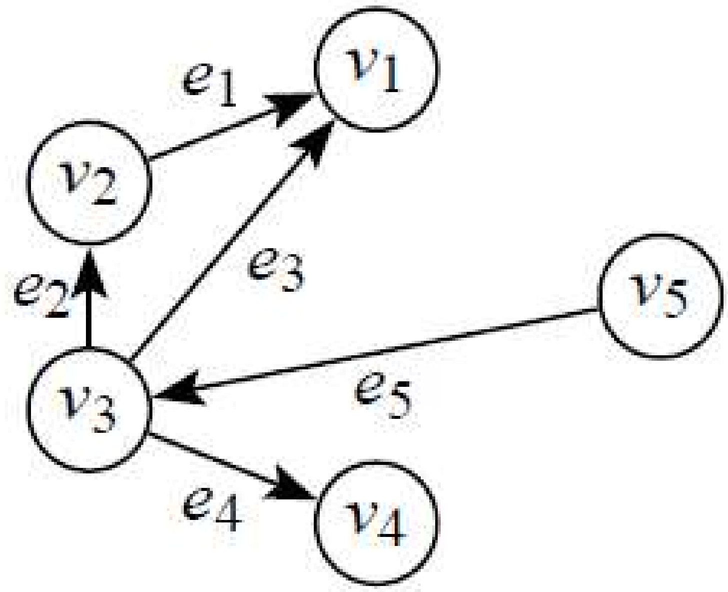
- (8, 4, 4) : **chemin simple** mais pas élémentaire, longueur 2
- (1; 4; 3; 5; 8; 1) : **circuit élémentaire** et simple, longueur 5
- (1; 4; 7; 6; 2) : **chemin élémentaire** et simple, longueur 4
- (7; 6; 2; 1; 4; 3; 5; 8; 1; 4; 7) : ***circuit ni simple*** **ni élémentaire**, longueur 10
- d(8, 1) = 1 , d(1, 8) = 4

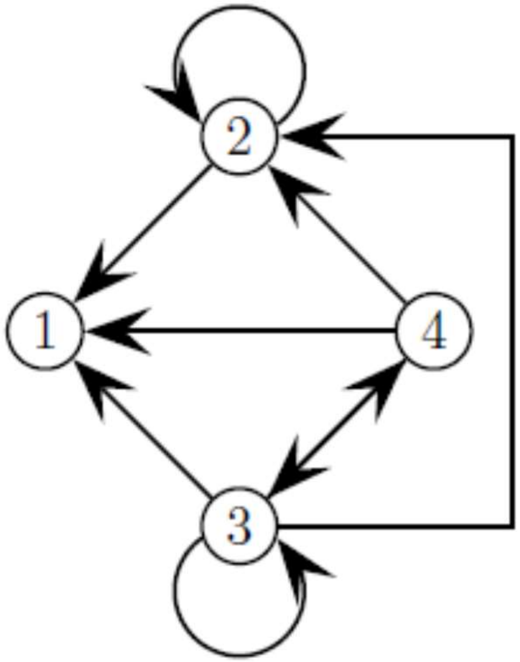
- **Exemple**

on peut voir par exemple le chemin ($v3$, $e2$, $v2$, $e1$, $v1$).

Par exemple,

$d(v5, v4) = 2$,
$d(v4, v5) = \infty$,
$d(v3, v1) = 1$,



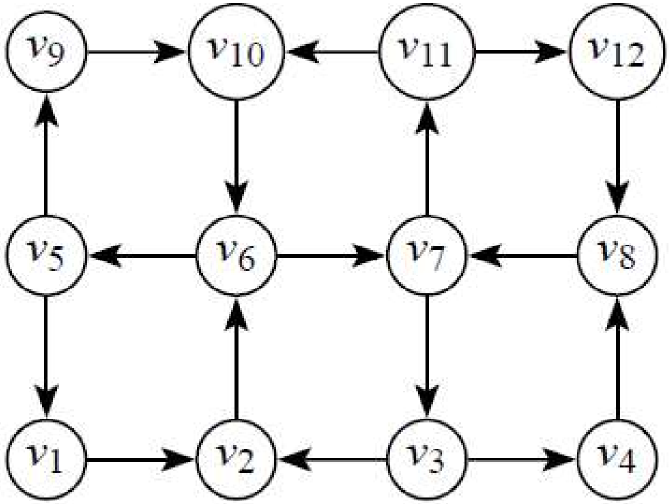


s	$d^+(s)$	$d^-(s)$	$d(s)$
1	0	3	3
2	2	3	5
3	4	2	6
4	3	1	4
$\sum$	9	9	18

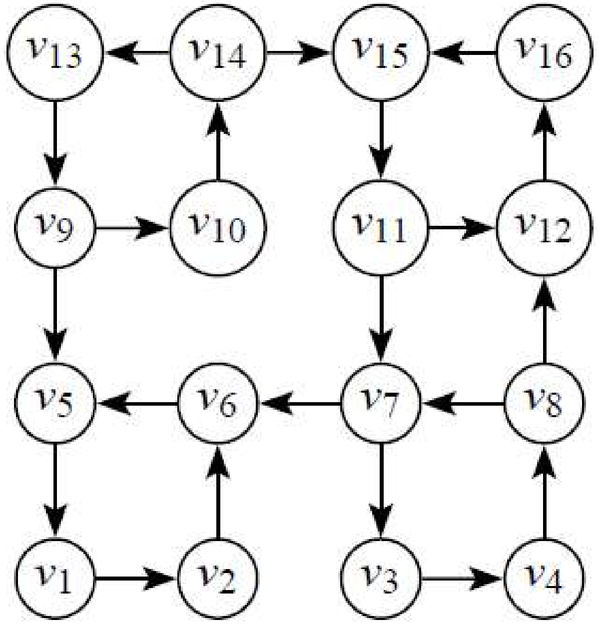
Digraphe fortement connexe

- Un digraphe est **fortement connexe**, si toute paire ordonnée (*a*,*b*) de sommets distincts du graphe est reliée par au moins un chemin. En d'autres termes, tout sommet est atteignable depuis tous les autres sommets par au moins un chemin.

- On appelle **composante fortement connexe** tout sous-graphe induit maximal fortement connexe (maximal signifie qu'il n'y a pas de sous-graphe induit connexe plus grand contenantes sommets de la composante).



v_9 v_{10} v_{11} v_{12}
v_5 v_6 v_7 v_8
v_1 v_2 v_3 v_4



v_{13} v_{14} v_{15} v_{16}
v_9 v_{10} v_{11} v_{12}
v_5 v_6 v_7 v_8
v_1 v_2 v_3 v_4

Construction de la composante fortement connexe (C.F.C) de x

Soit **G=(S,A).**

1. Marquer + et – le sommet x
2. Marquer + tout successeur (non encore marqué +) d'un sommet déjà marqué +. Marquer - tout prédécesseur (non encore marqué -) d'un sommet déjà marqué -.
3. Lorsque plus aucun sommet ne peut être marqué ni + ni - les sommets marqués à la fois + et – sont ceux de la composante fortement connexe de x (**CFC**).

Exemple

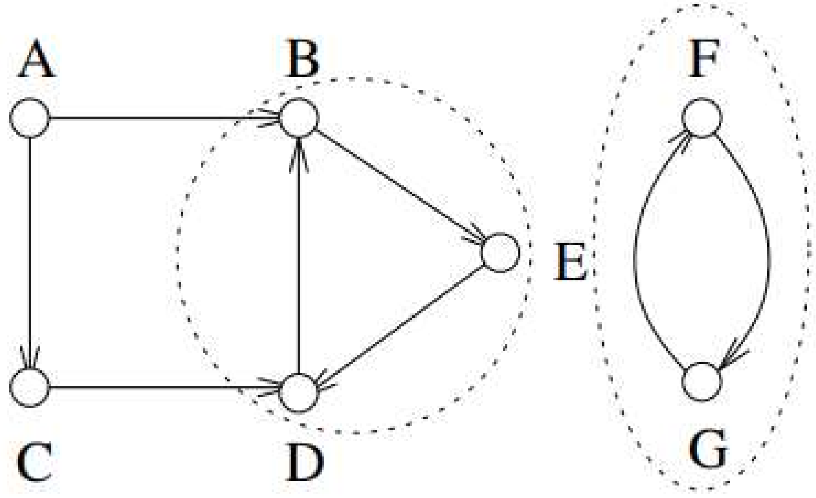


FIGURE 1.8 – Les composantes fortement connexes de G_1

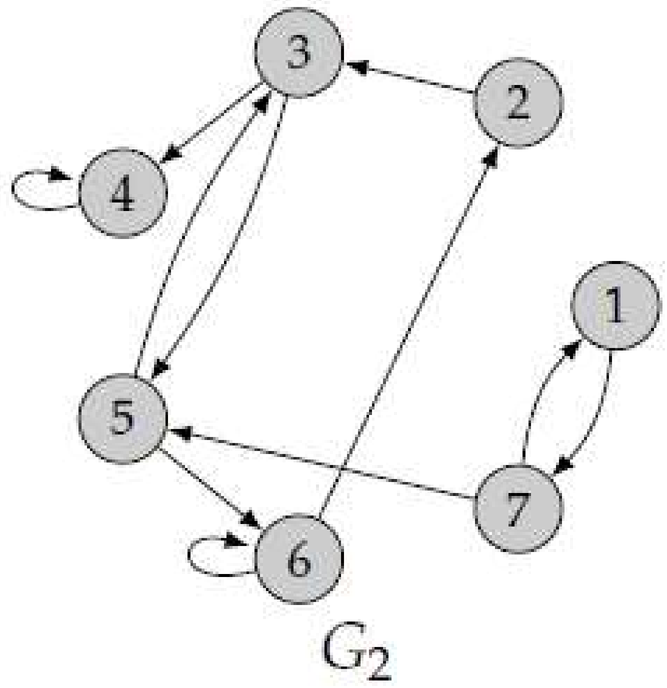
Graphe réduit

- A tout graphe orienté $G = (S,A)$ on associe le graphe simple $G_R = (S_R,A_R)$ appelé graphe réduit de G défini comme suit :

  S_R = {A chaque C.F.C C_i de G correspond un sommet C_i}

  $A_R = \{(C_i,C_j) / i \neq j \text{ et } \exists x \in C_i \text{ et } \exists y \in C_j \text{ et } (x,y) \in A\}$
- **Remarque.**
  - Un graphe fortement connexe possède une seule C.F.C.
  - Le graphe réduit d'un graphe ne possède pas de circuits.

- Exemple: Composantes fortement connexes



Un graphe orienté sans circuit

- **Théorème**
- Le digraphe *G* est **sans circuit** si et seulement si on peut attribuer un nombre $r(v)$, appelé le **rang** de *v*, à chaque sommet *v* de manière que pour tout arc (u, v) de *G* on ait $\boldsymbol{r(u) < r(v)}$.

Algorithme de calcul du rang

Donnée : digraphe $G = (V,E)$ sans circuit.

Résultat : rang $r(v)$ de chaque sommet $v \in V$ du digraphe G.

Début

$r := 0$

$X := V$

R : l'ensemble des sommets de X sans prédécesseur dans X

Tant que X n'est pas vide **faire**

$r(v) := r$ pour tout sommet $v \in R$

$X := X - R$

R : l'ensemble des sommets de X sans prédécesseur dans X

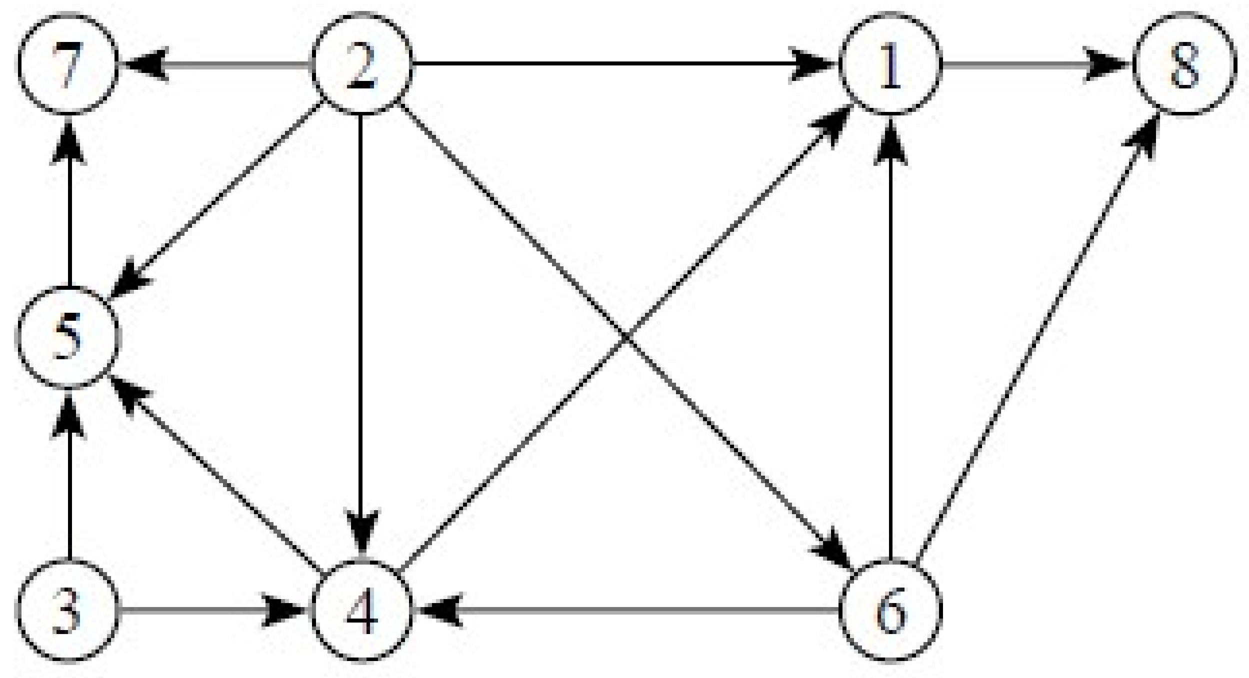
$r := r+1$

Fin tant que

Fin

Exercice

Attribuez un rang aux sommets du digraphe ci-dessous en utilisant l’algorithme de calcul du rang



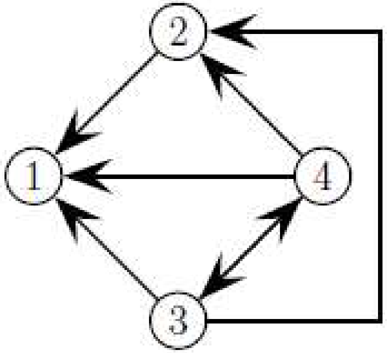
Représentations non graphiques des digraphes

Matrice d'adjacences

On peut représenter un graphe simple par une **matrice d'adjacences**. Une matrice ($n \times m$) est un tableau de n lignes et m colonnes. (i, j) désigne l'intersection de la ligne i et de la colonne j . Dans une matrice d'adjacences, les lignes et les colonnes représentent les sommets du graphe. Un « 1 » à la position (i, j) signifie que le sommet i est adjacent au sommet j .

Exemples de graphes simples

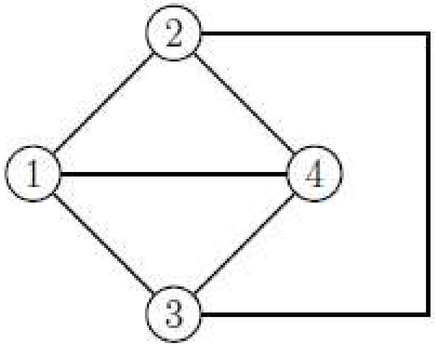
graphe simple orienté



$$A = \{(1;2);(1;3);(2;3);(1;4);(2;4);(3;4);(4;3)\}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

graphe simple non-orienté

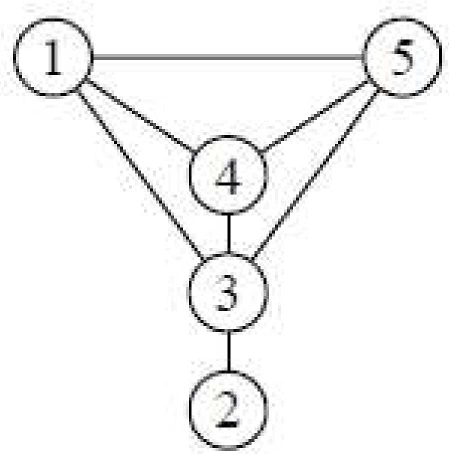


$$A = \{\{1;2\};\{1;3\};\{2;3\};\{1;4\};\{2;4\};\{3;4\}\}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Listes d’adjacences

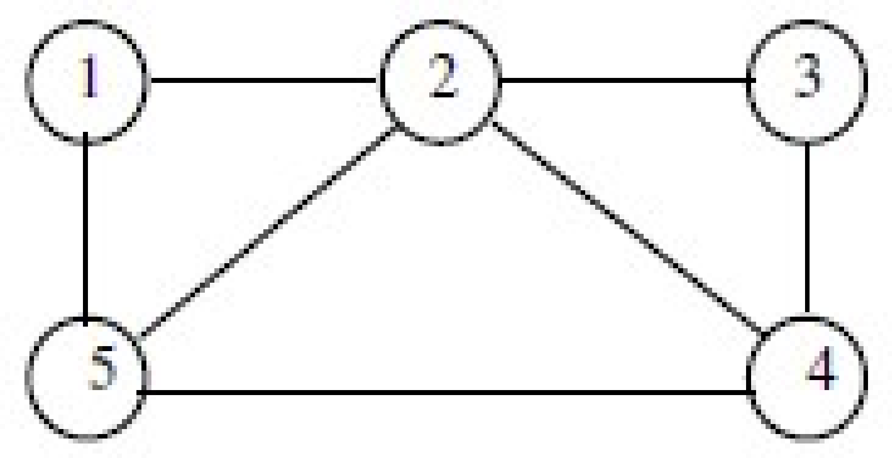
On peut aussi représenter un graphe simple en donnant pour chacun de ses sommets la liste des sommets auxquels il est adjacent. Ce sont les **listes d’adjacences**.



1 : 3, 4, 5
2 : 3
3 : 1, 2, 4, 5
4 : 1, 3, 5
5 : 1, 3, 4

Exercice

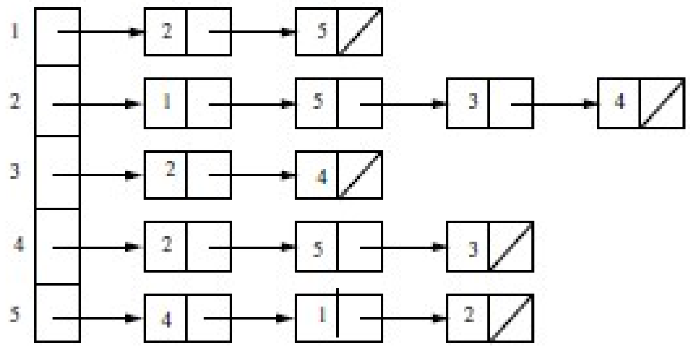
- Donnez les représentations par matrice d’adjacence et listes d’adjacence du graphe non orienté suivant



- Matrice d’adjacence :

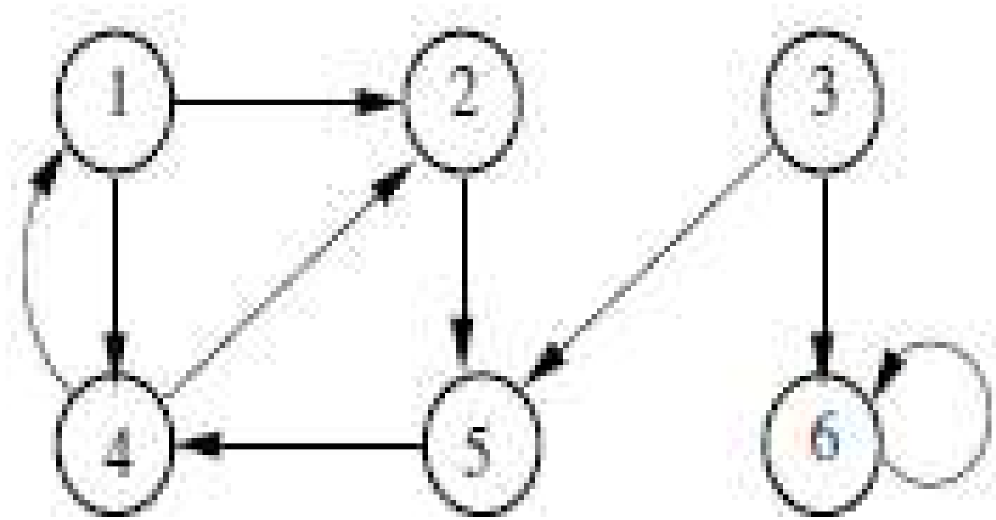
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

- Listes d’adjacence



- Exercice

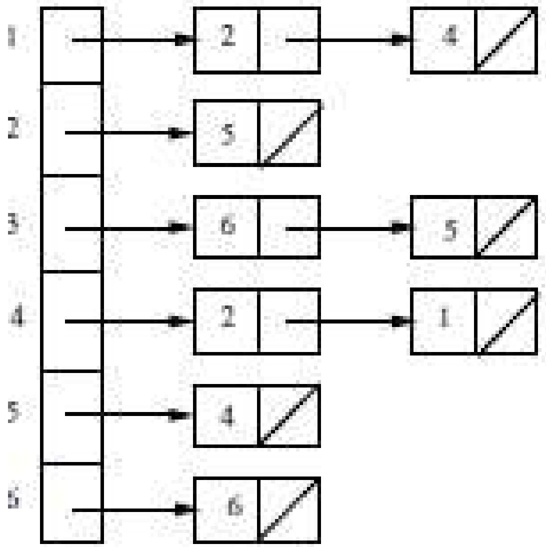
Donnez les représentations par matrice d'adjacence et listes d'adjacence du graphe orienté suivant :



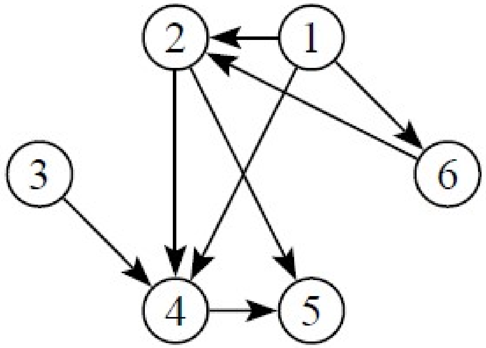
- Matrice d'adjacence :

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	1	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

- Listes d'adjacence



Représentations non graphiques des digraphes



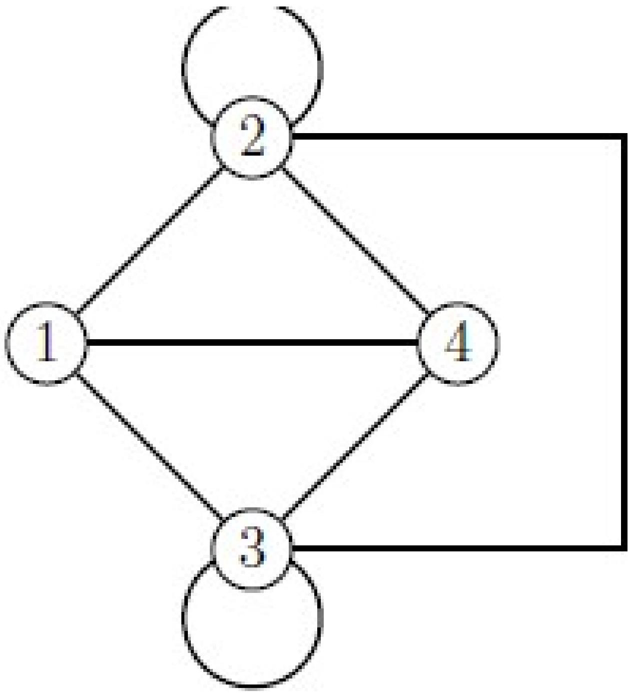
1 : 2, 4, 6
2 : 4, 5
3 : 4
4 : 5
5 : –
6 : 2

les listes d'adjacences

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'adjacences

Représenter la matrice d’adjacence et l’ensemble des arêtes du graphe non-orienté G suivant



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Introduction aux théorie des graphes
- Notions de base
- **Décomposition d’un graphe en niveaux**
- **Problème de coloration d’un graphe**
- **Graphe k-connexe**
- **Arbre Couvrant de poids Minimal : ACM**
  - Algorithme de Kruskal
  - Algorithme de Prim
- **Problème du plus court chemin**
  - algorithme de Dijkstra (source unique)
  - algorithme de Bellman-Ford (source unique)
  - algorithme de Floyd-Warshall (tous les PCC)
- **Le Problème du Flot Maximal**
  - Les réseaux de transport
  - Le flot maximum et la coupe minimum
  - L'algorithme de Ford et Fulkerson
- **le Réseau PERT**

Décomposition d’un graphe en niveaux

Décomposition d'un graphe en niveaux

- Une décomposition en niveaux (***tri topologique***) d'un **graphe orienté sans circuit** est réalisée en organisant les sommets d'un graphe en k niveaux (couches ou layer) de la manière suivante :
  - Les sommets sans prédécesseurs sont de niveau 0
  - tout sommet x a un niveau supérieur aux niveaux de ses prédécesseurs :
    - niveau(x) = max y ∈ Γ−(x)
    - niveau(y) + 1

Décomposition en niveaux : Algorithme

procedure DecompositionNiveaux

N ← 1

S` ← S

Tant que S` ≠ Ø do

Pour tout sommet x de S` sans prédécesseur **faire**

Niv(x) ← N

Fin pour

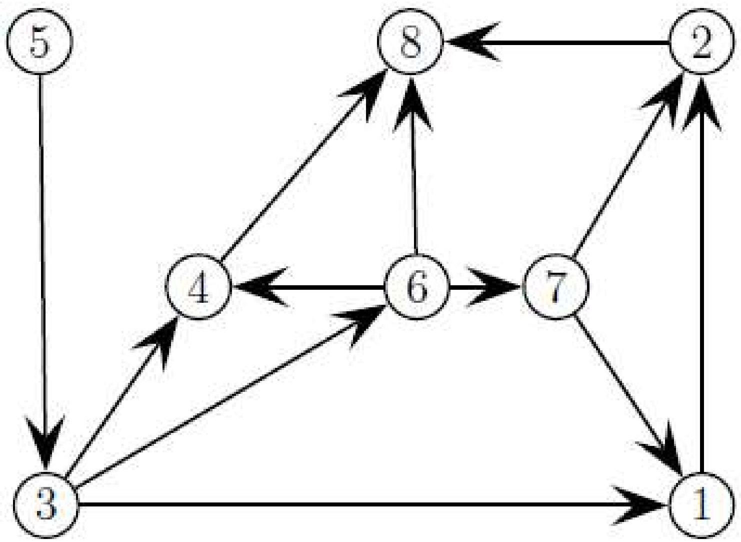
enlever de S` tous les sommets de niveau N

N ←N + 1

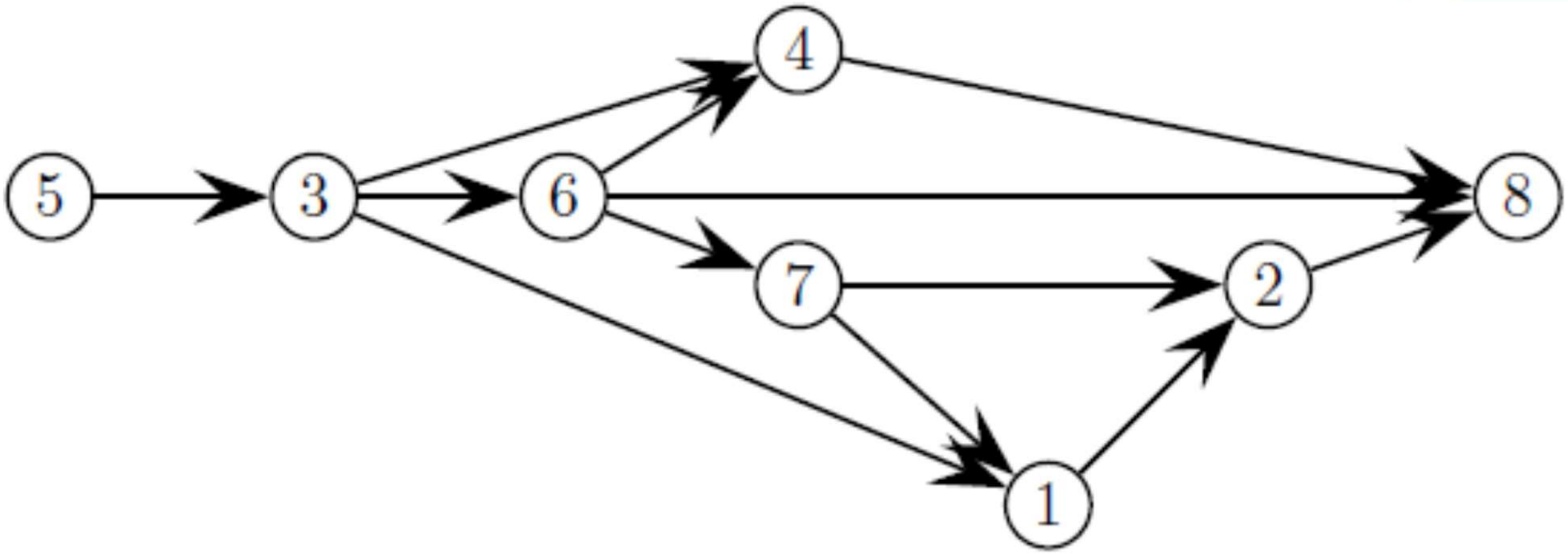
Fin tant que

fin procedure

Décomposition en niveau d'un graphe sans circuit



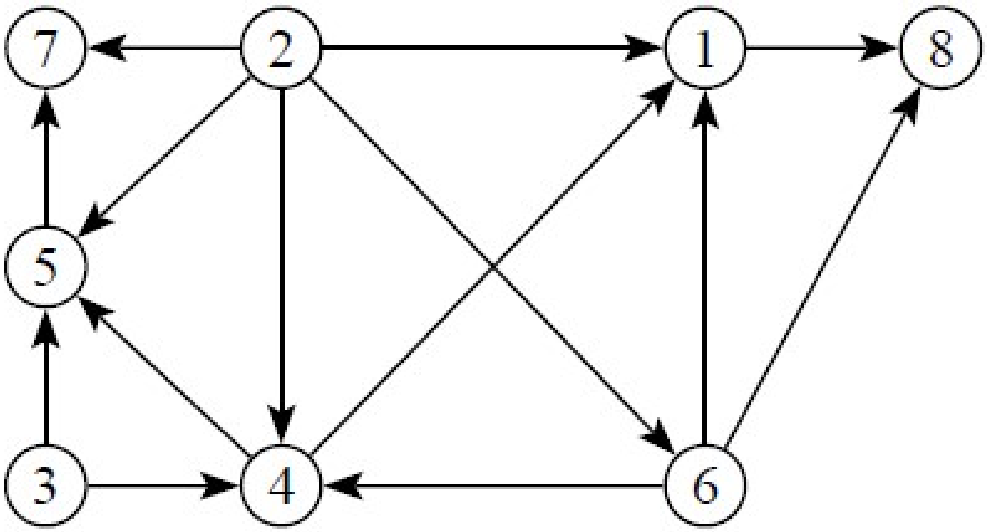
- **d^{-}(5)** = 0 donc niveau 0 et on élimine (5, 3)
- **d^{-}(3)** = 0 donc niveau 1 et on élimine (3, 1), (3, 4), (3, 6)
- **d^{-}(6)** = 0 donc niveau 2 et on élimine (6, 4), (6, 8), (6, 7)
- **d^{-}(4)** = d^{-}(7) = 0 donc niveau 3 et on élimine (4, 8), (7, 1), (7, 8)
- . . .



4
5
3
6
8
7
2
1

- **Exemple**

Décomposition en niveau le graphe suivant



- Introduction aux théorie des graphes
- Notions de base
- Décomposition d’un graphe en niveaux
- **Graphe k-connexe**
- **Problème de coloration d’un graphe**
- **Arbre Couvrant de poids Minimal : ACM**
  - Algorithme de Kruskal
  - Algorithme de Prim
- **Problème du plus court chemin**
  - algorithme de Dijkstra (source unique)
  - algorithme de Bellman-Ford (source unique)
  - algorithme de Floyd-Warshall (tous les PCC)
- **Le Problème du Flot Maximal**
  - Les réseaux de transport
  - Le flot maximum et la coupe minimum
  - L'algorithme de Ford et Fulkerson
- **le Réseau PERT**

Un graphe k-connexe

un graphe k-connexe

un graphe k-connexe (ou graphe k-sommet connexe) est un

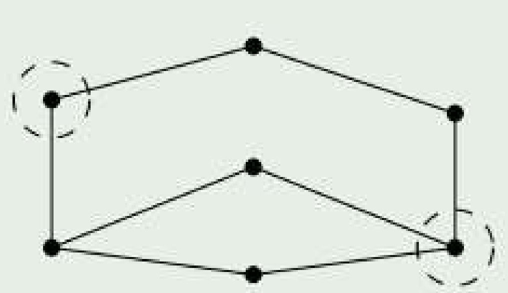
graphe connexe qu'il est possible de déconnecter en supprimant k sommets et tel que ce k soit minimal.

Il existe donc un ou plusieurs ensembles de k sommets dont la suppr ession rende le graphe déconnecté, mais la suppression de k-1 sommets, quels qu'ils soient, le fait rester connexe

Par convention, le graphe complet à k sommets est k-1 connexe.

Exemple

UN GRAPHE 2-CONNEXE



Graphe k-arêtes-connexe

DÉFINITION

Si $\lambda(G) = k \geq 1$: H est k-connexe (pour les arêtes).

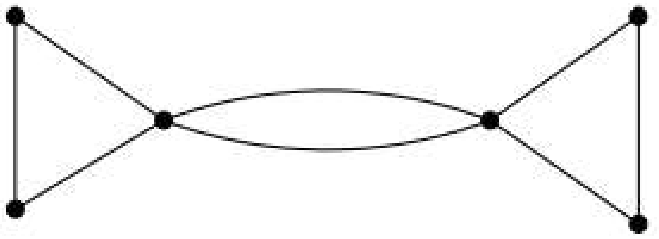
$\lambda(G) = k$:

- quelles que soient les $k-1$ arêtes supprimées, G reste connexe
- il est possible d'enlever k arêtes "bien choisies" pour le disconnecter.

G est au moins k-connexe (pour les arêtes) : $\lambda(G) \geq k$.

⚠ k-connexité pour les sommets $\neq$ k-connexité pour les arêtes

$\kappa(G) = 1$ et $\lambda(G) = 2$:



$\kappa(G) = 1$ et $\lambda(G) = k$: