Théorie des graphes

Université de Jijel
Mr.HEMIOUD

- Introduction aux théorie des graphes
- Notions de base
- Problème de coloration d'un graphe
- Arbre Couvrant de poids Minimal : ACM
  - Algorithme de Kruskal
  - Algorithme de Prim
- Problème du plus court chemin
  - algorithme de Dijkstra (source unique)
  - algorithme de Bellman-Ford (source unique)
  - algorithme de Floyd-Warshall (tous les PCC)
- **Le Problème du Flot Maximal**
  - Les réseaux de transport
  - Le flot maximum et la coupe minimum
  - L'algorithme de Ford et Fulkerson
- **le Réseau PERT**

PROBLÈME DE FLOTS MAXIMAL

- Les réseaux de transport
- Le flot maximum et la coupe minimum
- L'algorithme de Ford et Fulkerson
- Quelques applications

Problème de flots dans les réseaux

- Le problème de flot constitue un domaine d’application très important de la théorie des graphes
- Il consiste à organiser, les mouvements de certaines quantités d’un bien dans un réseau.
- Le problème de flot maximum a été d’abord formulé en 1954 par TE Harris comme un modèle simplifié de la circulation ferroviaire soviétique.

Domaines d’applications

- Distribution des tâches entre un ensemble de personnes dans une entreprise
- Répartition des communications téléphoniques entre les différents centre de gestion
- Organisation de la circulation routière dans les villes.
- ……

Pour étudier ce problème il faut d’abord définir ce qu’est un ***réseau de transport***

Réseaux de transport

- Les réseaux de transport peuvent être utilisés pour modéliser
  - l’écoulement de liquide à l’intérieur de tuyaux,
  - la circulation de pièces dans une chaîne de montage,
  - du courant dans les réseaux électriques,
  - de l’information à travers les réseaux de communication,
  - …
- D’une façon plus générale, un réseau de transport désigne le fait qu’un “matériau” (de l’eau, de l’électricité, de l’information, ...) doit s’écouler depuis une **source**, où il est produit, jusqu’à un **puits**, où il est consommé.

- La **source** produit le matériau à un certain **débit**, et le **puits** consomme ce matériau avec le **même débit**.

- Entre la source et le puits, ce matériau est **transporté** par des **conduits** ;
  - chacun de ces conduits a une **capacité** qui représente la quantité maximale de matériau pouvant transiter par le conduit pendant une unité de temps (par exemple, 200 litres d'eau par heure dans un tuyau, ou 20 ampères de courant électrique à travers un câble).

- **Définition : (réseau de transport)**
- Un réseau de transport est un quadruplet (G,s,t,C) où
  - G=(S,A) est un graphe orienté simple
  - ***s*** est un sommet *sans prédécesseur* appelé ≪***source***≫
  - ***t*** est un sommet *sans successeur* appelé ≪***puits***≫
  - $C: A \rightarrow R^+$ est une *valuation* positive de G appelée ≪***capacité***≫
  - Un **flot** est une fonction entière positive ou nulle ***f*** définie sur les arcs satisfaisant la contrainte de capacité: $f(a) \leq c(a)$

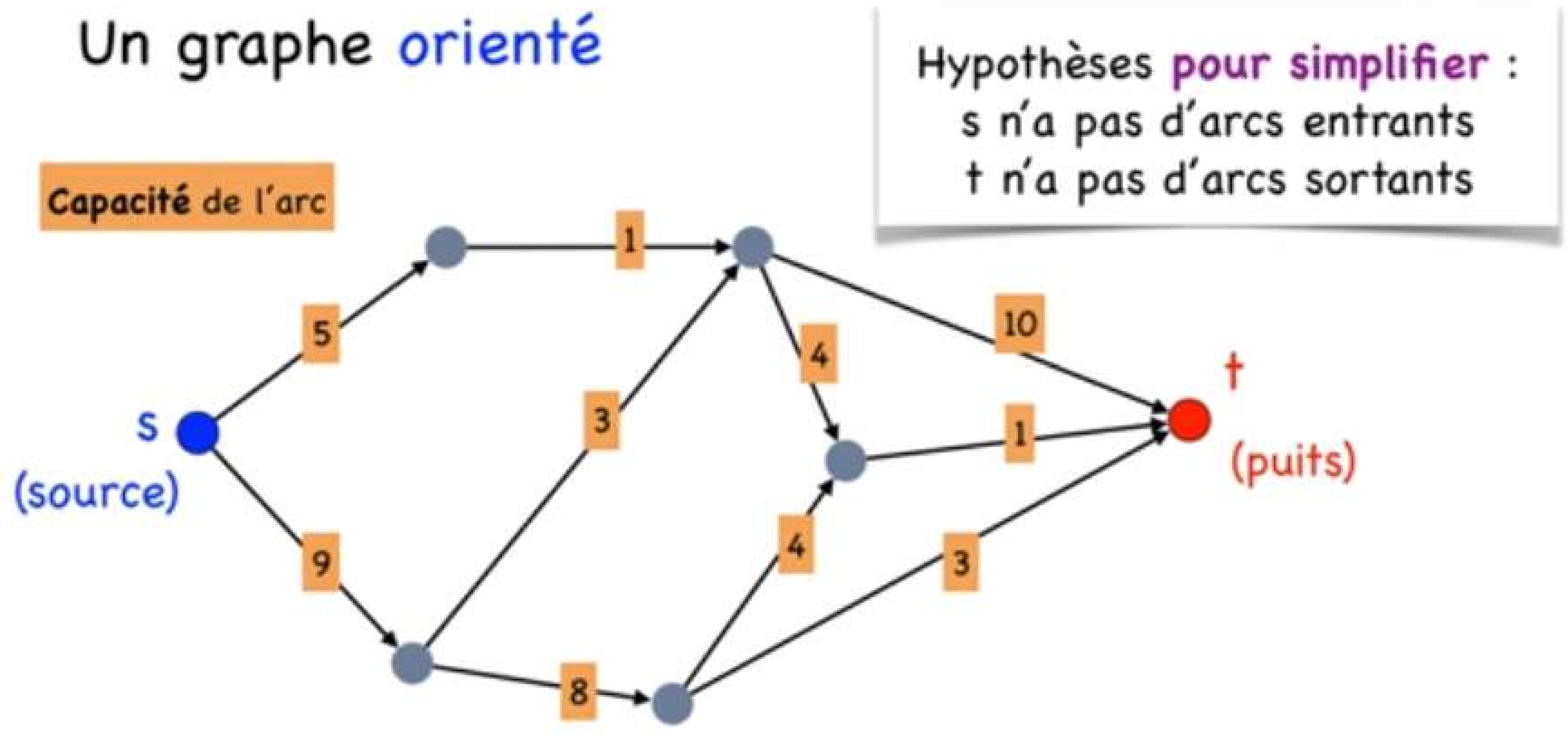
Conservation du flot:

- La contrainte la plus importante pour un flot est ***la loi des nœuds***. Elle a été posée par le physicien allemand Gustav Kirchhoff en 1845, lorsqu’il a établi les règles de calcul des intensités des courants dans un circuit électrique.

- Elle exprime simplement la conservation du flux:

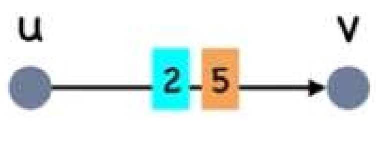
  ≪ **le flux entrant = le flux sortant** ≫.

Un réseau



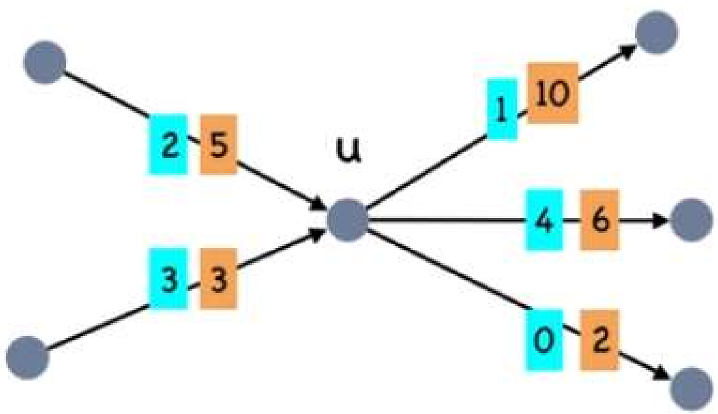
Un réseau à flots (ou réseau de transport)

Le flot



Quantité de flot sur l'arc (circulant de u vers v) ≤ **Capacité** de l'arc

Contrainte de capacité :
Quantité de flot sur un arc ≤ capacité de cet arc



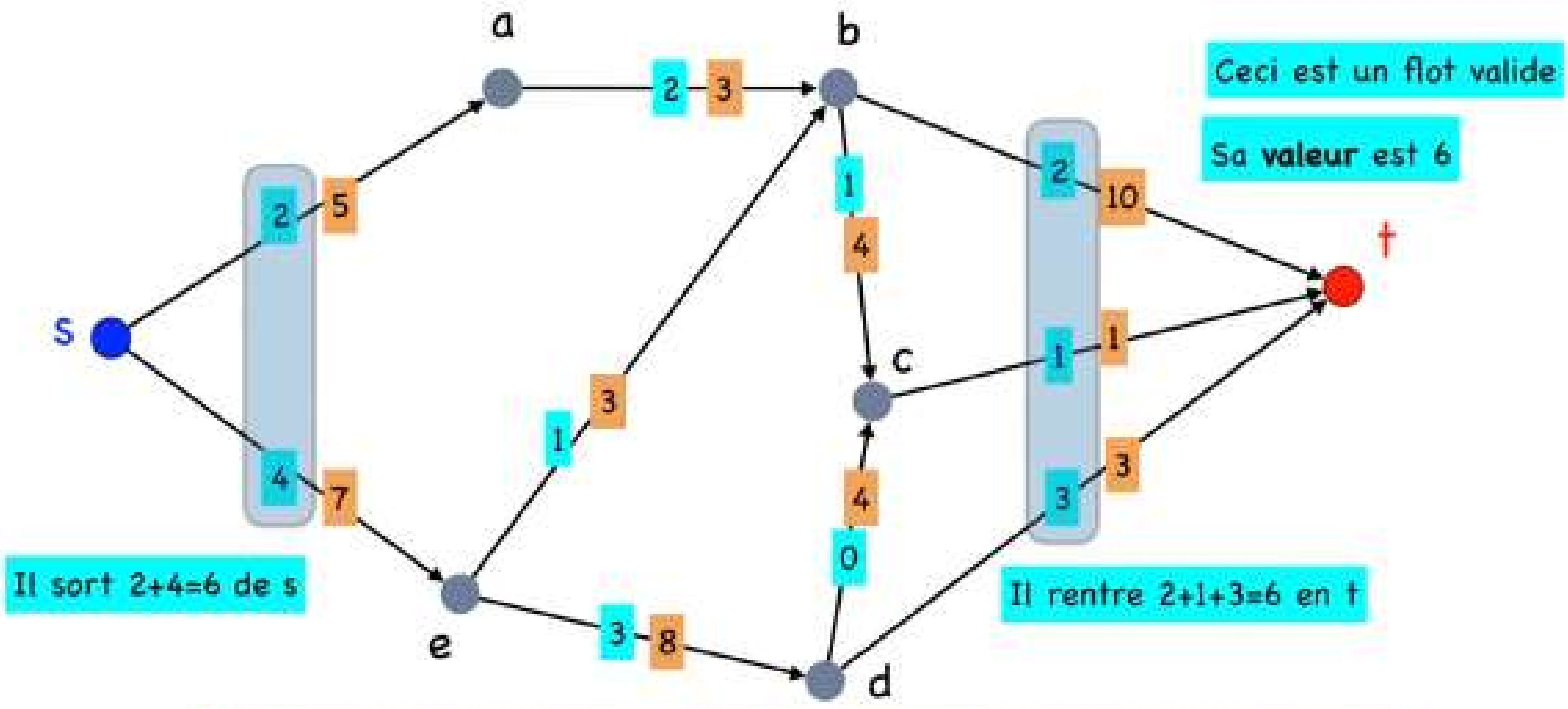
Il rentre en u une quantité de flot de 2+3=5

Il **doit** sortir de u une quantité de flot de 5

Contrainte de conservation :
Tout ce qui rentre en un sommet doit en sortir

(sauf à la source et au puits)

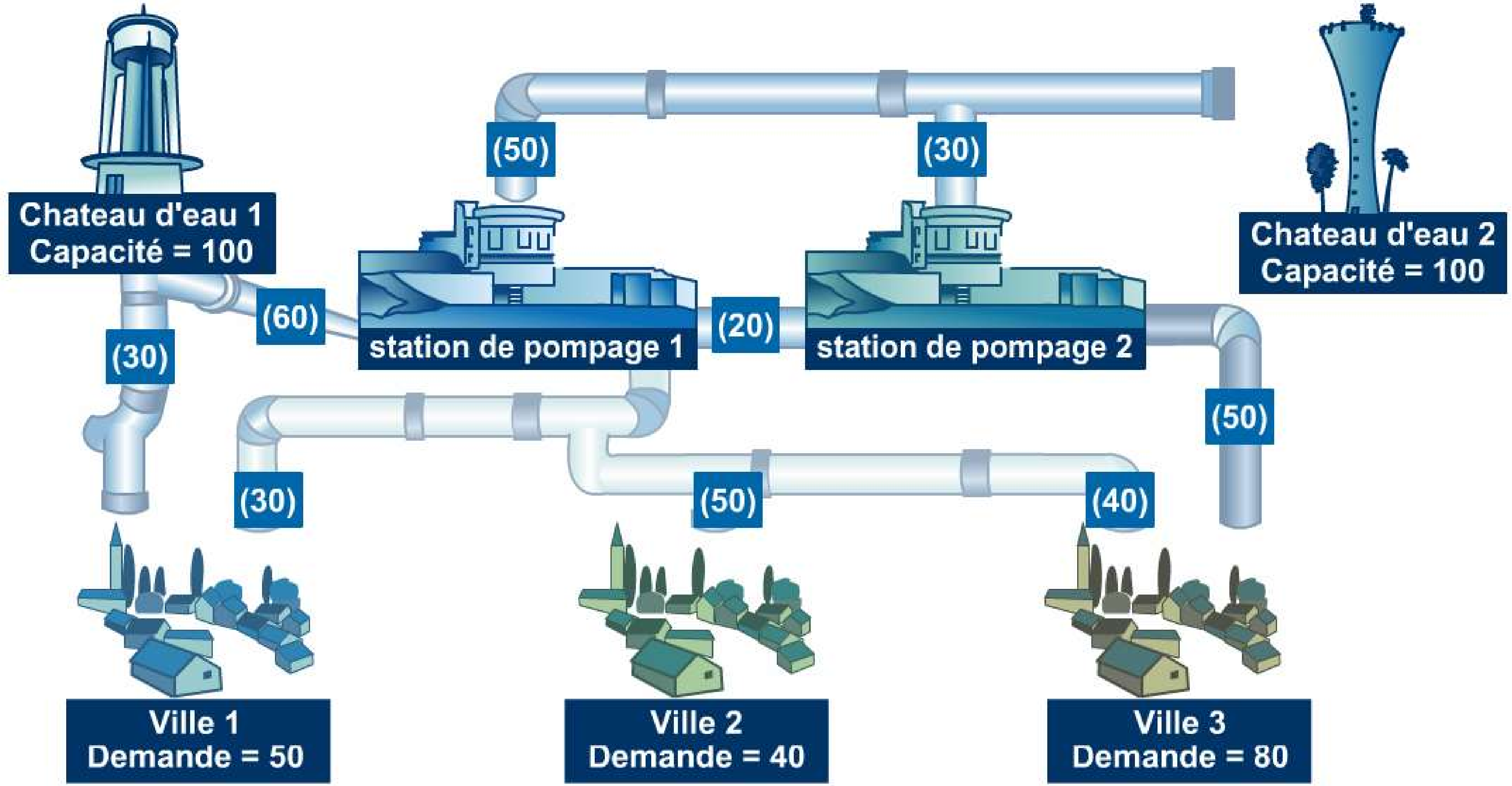
La valeur d'un flot



Valeur d'un flot :
Quantité de flot qui entre en t (ou qté de flot qui sort de s)

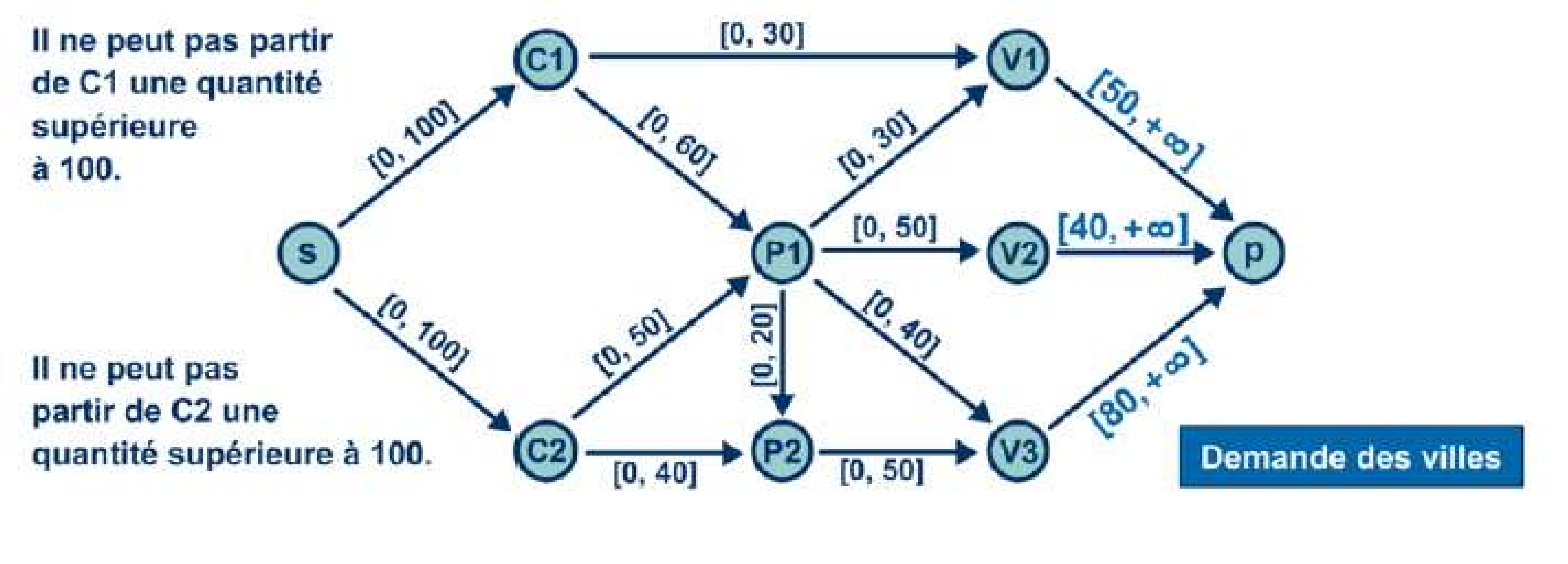
Exemple

- Deux châteaux d'eau alimentent **3 villes** à travers un réseau de canalisations au sein duquel se trouvent également des stations de pompage. Les châteaux d'eau ont une **capacité** limitée qui s'élève pour chacun d'eux à **100 000 m3**.
- Les villes ont exprimé une demande qui est au minimum de **50 000** pour la ville 1, **40 000** pour la 2 et **80 000** pour la ville 3 en m3.
- Les canalisations entre les châteaux d'eau et les villes ont des **débits** limités. Par exemple, pour la canalisation reliant le château 1 à la ville 1, le débit maximum est de **30** alors que celui de la canalisation reliant la station de pompage 1 à la ville 2 est de **50** en milliers de m3.
- Ces valeurs figurent sur le graphique entre parenthèses le long des canalisations.


Chateau d'eau 1
Capacité = 100
(50)
(30)
Chateau d'eau 2
Capacité = 100
(60)
(20)
(30)
station de pompage 1
station de pompage 2
(50)
(30)
(50)
(40)
Ville 1
Demande = 50
Ville 2
Demande = 40
Ville 3
Demande = 80

1. Un premier problème est de déterminer s'il est possible de satisfaire à travers ce réseau la demande des 3 villes et comment ?
2. Pour résoudre ce problème il faut dans un premier temps le modéliser.
3. Pour cela, nous introduisons un nouveau problème standard qui est celui du flot maximal sur un réseau

Modélisation du problème de distribution d'eau par un problème de flot maximal

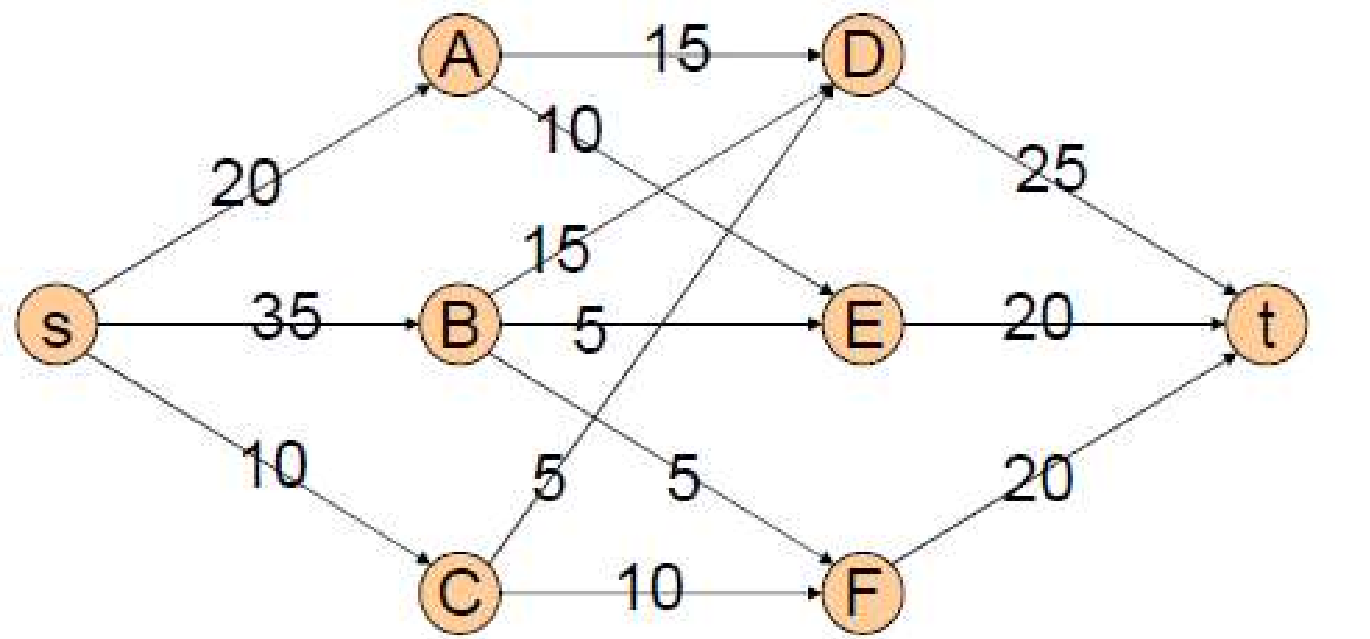


Exemple

En trois dépôts A, B, C, on dispose respectivement de **20**, **35** et **10** tonnes de marchandises. On a des demandes de **25**, **20** et **20** tonnes aux destinations D, E et F. Il existe des possibilités de transport à l'aide de camions. Ces possibilités sont rapportées dans le tableau suivant :

	D	E	F
A	15	10	0
B	15	5	5
C	5	0	10

- **Réseau de transport associé**



PROBLEME DU FLOT MAXIMUM

Connaissant les capacités des arcs d'un réseau de transport, le problème du flot maximum consiste a trouver quelle est la quantité **maximum de flot** qui peut circuler de la source au puits. L'algorithme le plus connu pour résoudre ce problème est celui de **Ford et Fulkerson.**

Problème de coupe dans les réseaux de transport

- Une **coupe** est une partition de l'ensemble des sommets en 2 parties disjointes, l'une contenant la ***source*** et l'autre le ***puits*** :

$$\mathbf{E \cup F = A \quad , \; E \cap F = \varnothing \quad ; s \in E \, , t \in F}$$

- La **capacité** C(E , F) d'une coupe est la somme des capacités des arcs de E à F

Flot maximum et coupe minimum

- Il existe toujours un flot possible qui est le flot **nul**.
- **Problème**: comment trouver un flot qui a la valeur maximum?
  - Recherche d'un chemin améliorant.
  - Déterminer le réseau résiduel:
- Un flot est **saturé** si sur tout chemin de ***s*** a-t-il existe un arc ***a*** tel que ***f(a) = c(a).***

Théorème (flot maximum et coupe minimum)

- Si ***f*** est un flot dans un réseau de transport, les trois conditions suivantes sont équivalentes:
  - ***f*** est un flot maximum;
  - Il existe une coupe **E/F** dont la capacité vaut |***f***|.
  - Valeur du **flot maximal** = Capacité de la **coupe** minimale.

ALGORITHME DE FORD-FULKERSON,

CHAINE AUGMENTANTE

- Ford et Fulkerson ont également proposé un algorithme performant pour trouver à la fois le flot maximum et mettre en évidence une coupe minimum. Cet algorithme repose sur les concepts de chemin **augmentant** et de graphe **résiduel**.

- Un chemin **augmentant** est un chemin de **s** à **t** dans **G** sur le quel il est possible d'augmenter la valeur du flot.

ALGORITHME DE FORD-FULKERSON

Algorithme de Ford & Fulkerson :

Données : Un réseau $G(V, E)$, une fonction capacité $c : E \to \mathbb{R}$;

Sortie : Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$: un flot maximum initialisé à 0 ; minimum ;

Instructions :

TANT QUE un chemin augmentant existe :

Augmenter le flot sur ce chemin et mettre à jour f ;

Mettre à jour le graphe résiduel ;

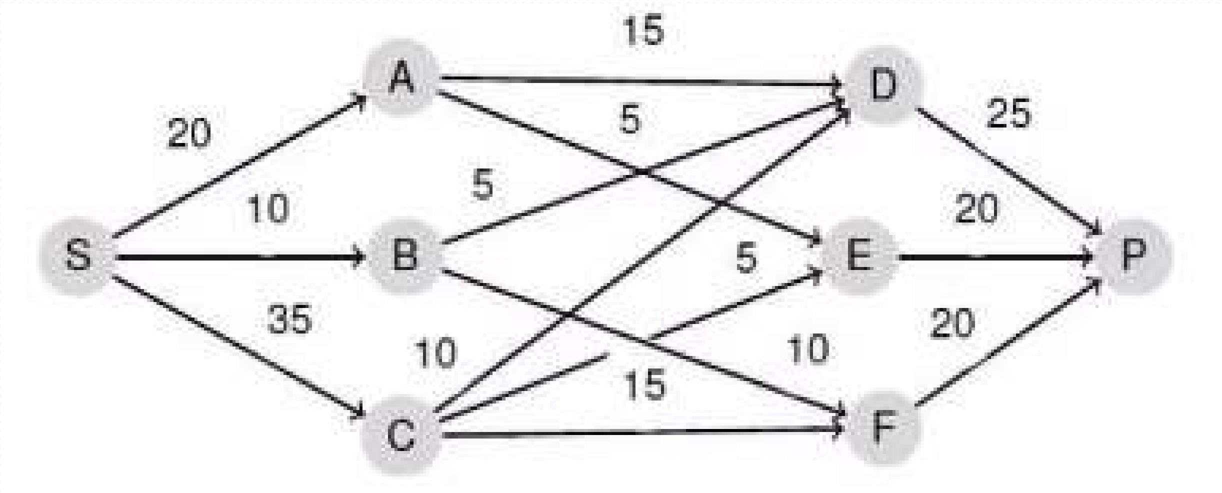
Appliquer un algorithme de marquage depuis s et donner W

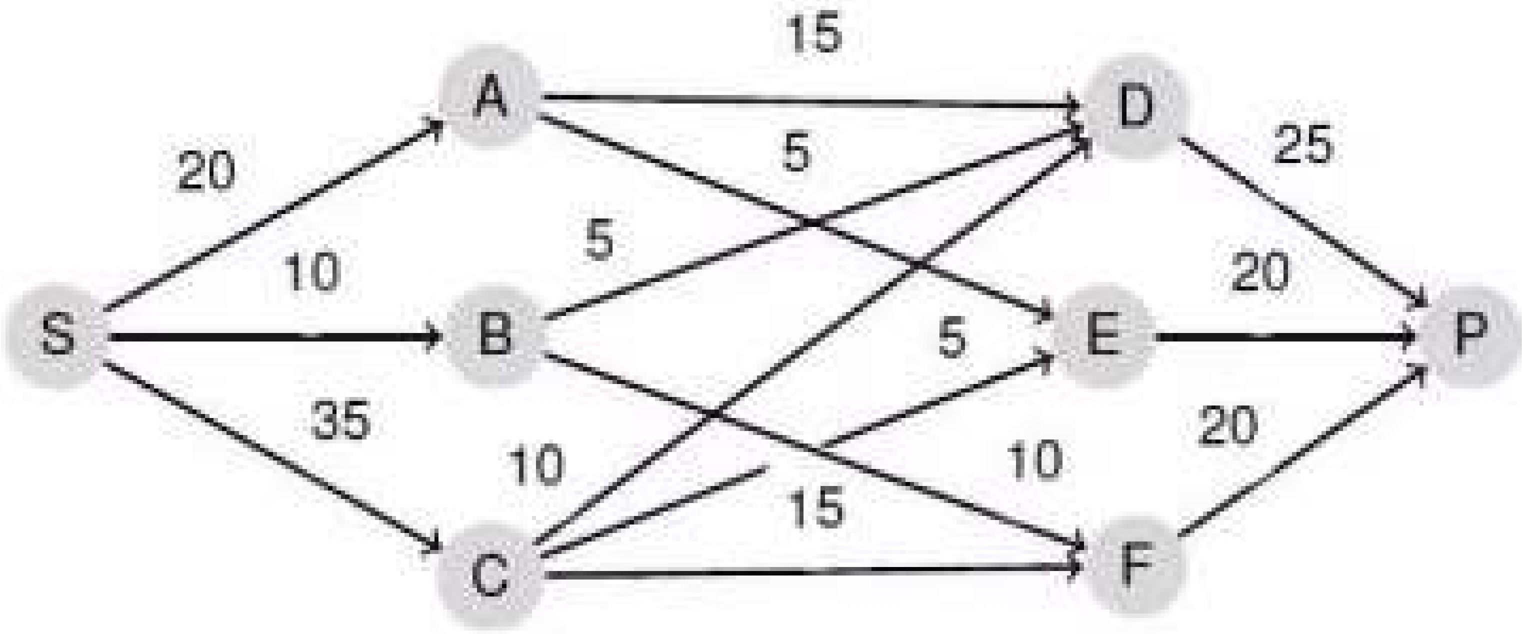
En déduire $\omega^+(W)$;

RETOURNER f et $\omega^+(W)$;

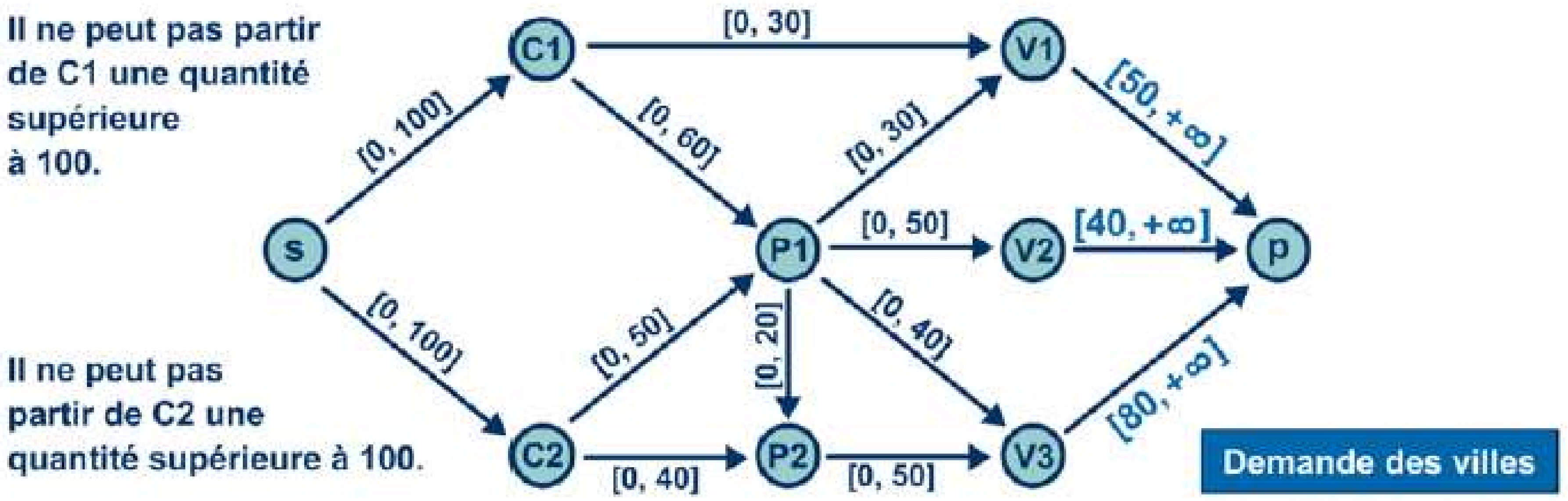
Exemple : Modélisation du problème de réseau routier par un problème de flot maximum

- Les villes sont représentées par des sommets
- Les autoroutes sont représentées par des arcs.
- Les capacités des véhicules sont indiquées sur les arcs




15
A
D
20
5
25
5
10
20
S
B
E
P
5
35
20
10
10
15
C
F

Modélisation du problème de distribution d'eau par un problème de flot maximal



- **Réseau de transport associé**