

Théorie des graphes

Université de Jijel

Mr. HEMIOUD

- Introduction aux théorie des graphes
- Notions de base
- Graphe k-connexe
- Décomposition d'un graphe en niveaux
- Problème de coloration d'un graphe
- Arbre Couvrant de poids Minimal : ACM
 - Algorithme de Kruskal
 - Algorithme de Prim
- Problème du plus court chemin
 - algorithme de Dijkstra (source unique)
 - algorithme de Bellman-Ford (source unique)
 - algorithme de Floyd-Warshall (tous les PCC)
- Le Problème du Flot Maximal
 - Les réseaux de transport
 - Le flot maximum et la coupe minimum
 - L'algorithme de Ford et Fulkerson
- Le Réseau PERT

Le Réseau PERT

Ordonnancement et gestion de projet

La planification d'un projet regroupe l'ensemble des méthodes permettant de trouver l'organisation optimale du projet (durée minimale, identification des tâches critiques, . . .). Ce problème peut être modélisé à l'aide d'un **réseau PERT** « Project Evaluation and Review Technique » et résolu à l'aide de la théorie des graphes.



Historiquement le PERT a été créé en 1956 à la demande de la marine américaine, pour planifier la durée de son programme de construction de missiles balistiques nucléaires miniaturisés Polaris (qui nécessitait l'intervention de 9000 sous-traitants et 250 fournisseurs) afin de rattraper le retard en matière de balistique, après le choc de la << crise de Spoutnik >>, par rapport à l'URSS. L'utilisation de la théorie des graphes a permis de **réduire la durée** du projet à **4 ans** alors que le délai initial était estimé à **7 ans** !



Historiquement le PERT a été créé en 1956 à la demande de la marine américaine, pour planifier la durée de son programme de construction de missiles balistiques nucléaires (qui nécessitait l'intervention de 9000 sous-traitants et 250 fournisseurs) afin de rattraper le retard en matière de balistique. L'utilisation de la théorie des graphes a permis de **réduire la durée** du projet à **4 ans** alors que le délai initial était estimé à **7 ans** !

un exemple de projet et de contraintes :

- On le présente en général sous forme d'un tableau

Tâches	Operations et contraintes	Durée en jours
1	Début du projet	0
2	aucune contrainte	11
3	commence au plus tôt 1 jour après le début du projet commence au plus tard 8 jours après le début de (4)	5
4	commence au plus tôt 1 jours après la fin de (2)	8
5	commence au plus tôt 1 jours avant la fin de (2)	5
6	commence au plus tôt après le début de (4) et après la fin de (5)	4
7	Fin projet	

- Il est **difficile** de concevoir un planning directement à partir d'une liste de contraintes

- Les tâches d'un projet peuvent être liées entre elles par des relations de dépendance :
 - certaines tâches ne peuvent commencer avant que d'autres soient terminées,
 - les livrables de certaines tâches sont nécessaires à la réalisation d'autres tâches.
- La méthode **PERT** permet : de **représenter** de manière **graphique** le réseau de tâches d'un projet, d'identifier le chemin critique et les marges possibles, d'optimiser le positionnement des tâches dans le temps.

La méthode de PERT

C'est une technique de la gestion du projet qui « conçoit un projet », comme étant un graphe orienté et valué où les arcs sont les tâches et les sommets sont les liens entre les tâches.

- Le graphe PERT commence par un seul sommet à la date 0 et se termine par un seul sommet.
- Lorsque 2 tâches sont parallèles au début et à la fin, alors on créera une tâche fictive de durée égale à 0.

Pourquoi utiliser le Réseau PERT ?

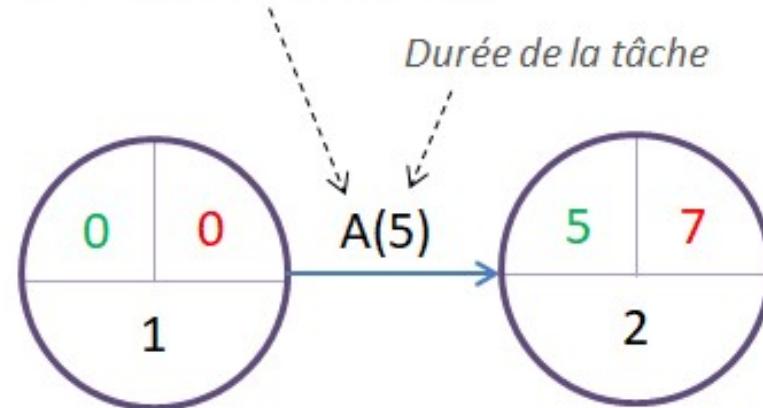
Cet outil facilite la maîtrise du projet. Il permet de :

- **donner une vue réelle de la livraison du projet,**
- **anticiper l'affectation des ressources humaines et financières, des moyens techniques,**
- **identifier les tâches à traiter plus rapidement si l'on souhaite livrer le projet plus tôt,**
- **repérer les tâches à traiter simultanément** (travail en parallèle) et les tâches antérieures,
- **identifier les tâches critiques et le non-critique pour tenir les délais** - permet par exemple de redéployer des ressources si nécessaire,

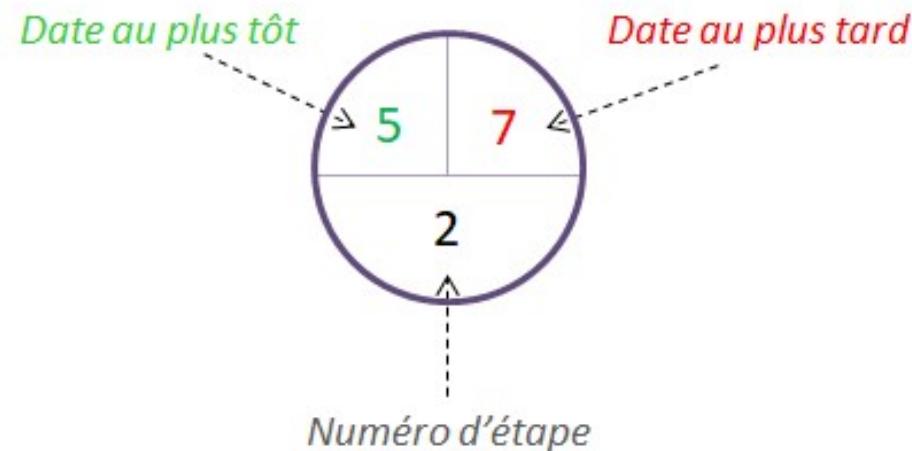
Représentation graphique du diagramme

- Le diagramme s'organise sous forme de réseau. Il possède un **début** et une **fin**, des **étapes** et des **tâches**.
- Les **tâches** sont représentées par des **flèches** encadrées par 2 étapes (ou nœuds).
- Chaque **étape** possède une **date au plus tôt** et une **date au plus tard**.

Identification de la tâche



Copyright www.manager-go.com



Les étapes pour créer un PERT

1. Préparez les tâches
2. Construisez le réseau en reliant les tâches entre elles, via des étapes
3. Indiquez les dates au plus tôt
4. Renseignez les dates au plus tard
5. Calculez les marges des tâches
6. Définition du chemin critique

Les étapes pour créer un PERT

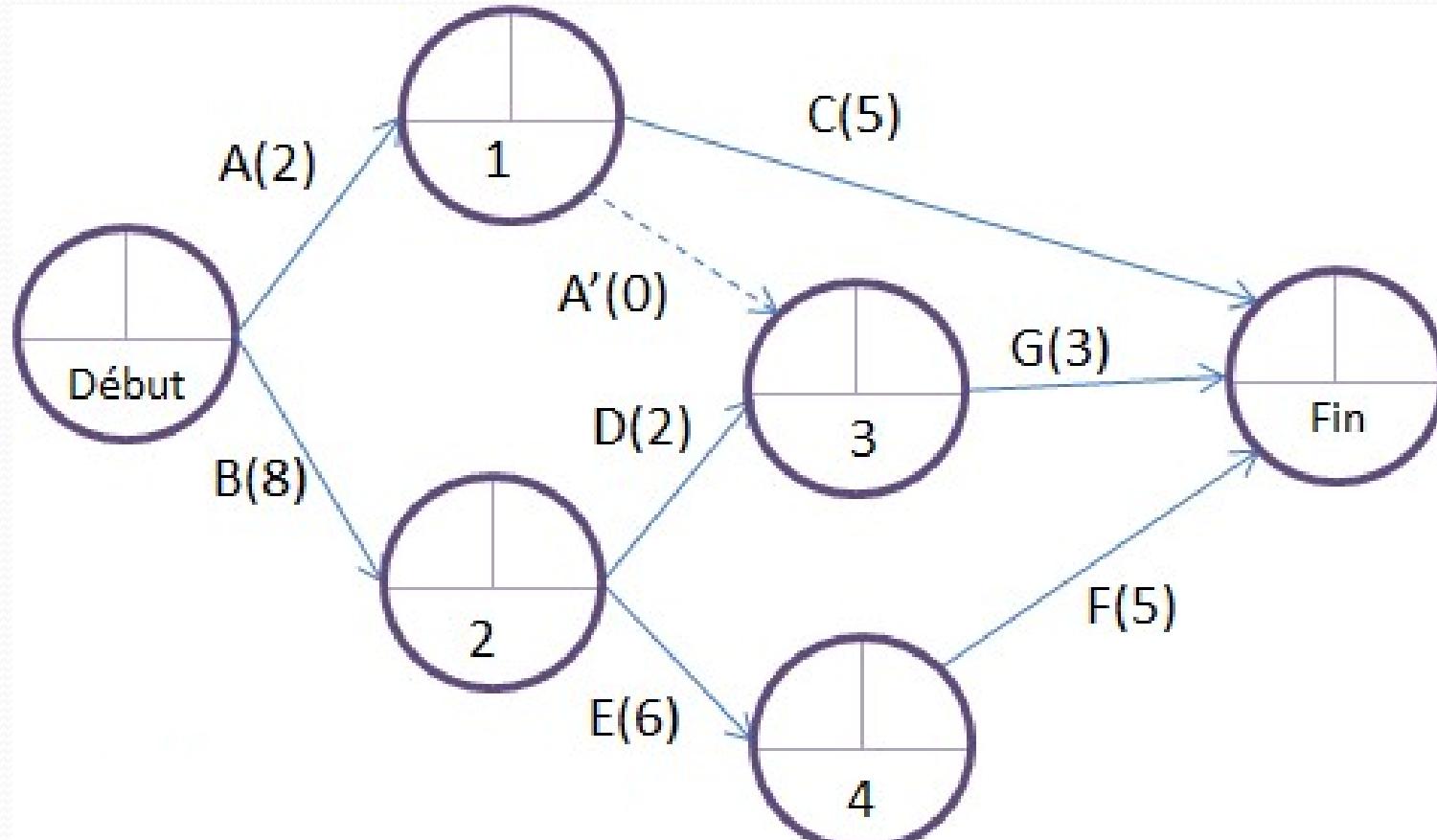
1. Préparez les tâches

- Commencez par lister les tâches - Soyez exhaustif en restant sur un niveau de détail gérable
- Estimez leur durée et leur(s) antécédent(s) : pour chaque tâche, évaluer le temps nécessaire pour leur traitement.

- Exemple de tableau d'antériorités

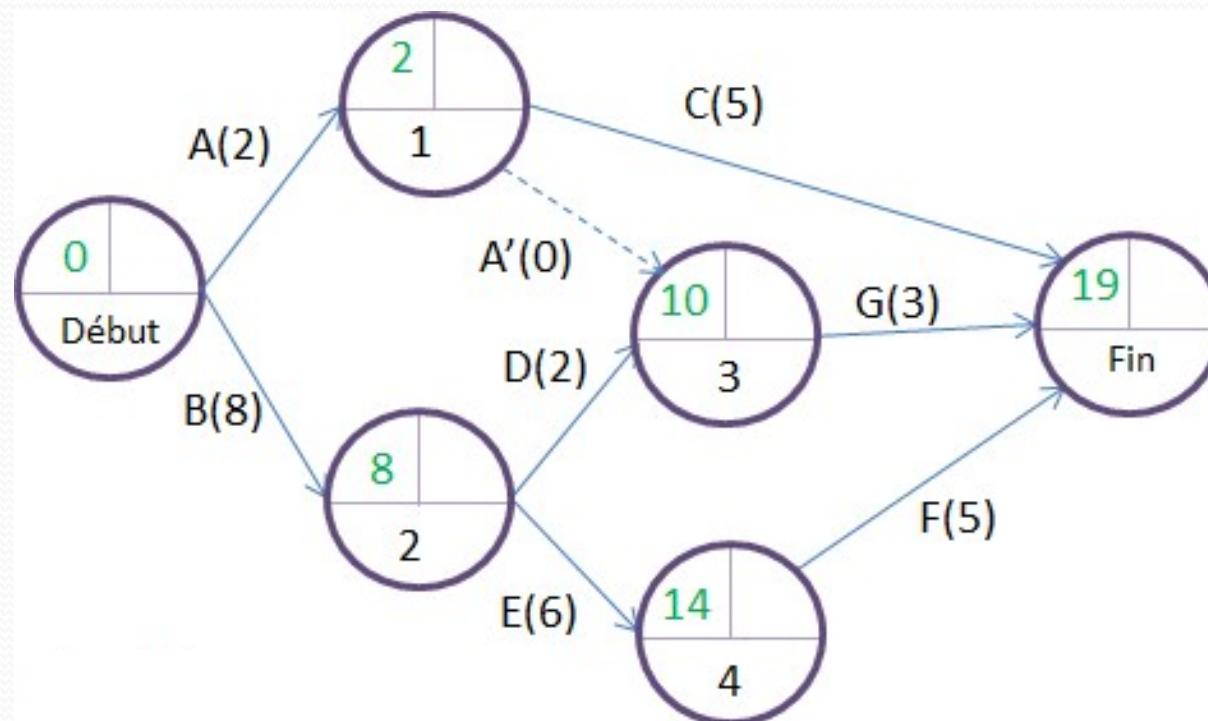
Tâche	Durée	Antécédent(s)
A	2	-
B	8	-
C	5	A
D	2	B
E	6	B
F	5	E
G	3	A,D

2. Construisez le réseau en reliant les tâches entre elles



3. Indiquez les dates au plus tôt

- Prenez la première étape (ici "1"), ajoutez la date au plus tôt de l'étape précédente à la durée de la tâche qui la concerne : $0 + 2$ (tâche A) = 2
- Faites de même pour l'ensemble des tâches. Par exemple pour l'étape 4 : $8 + 6$ (tâche E) = 14.



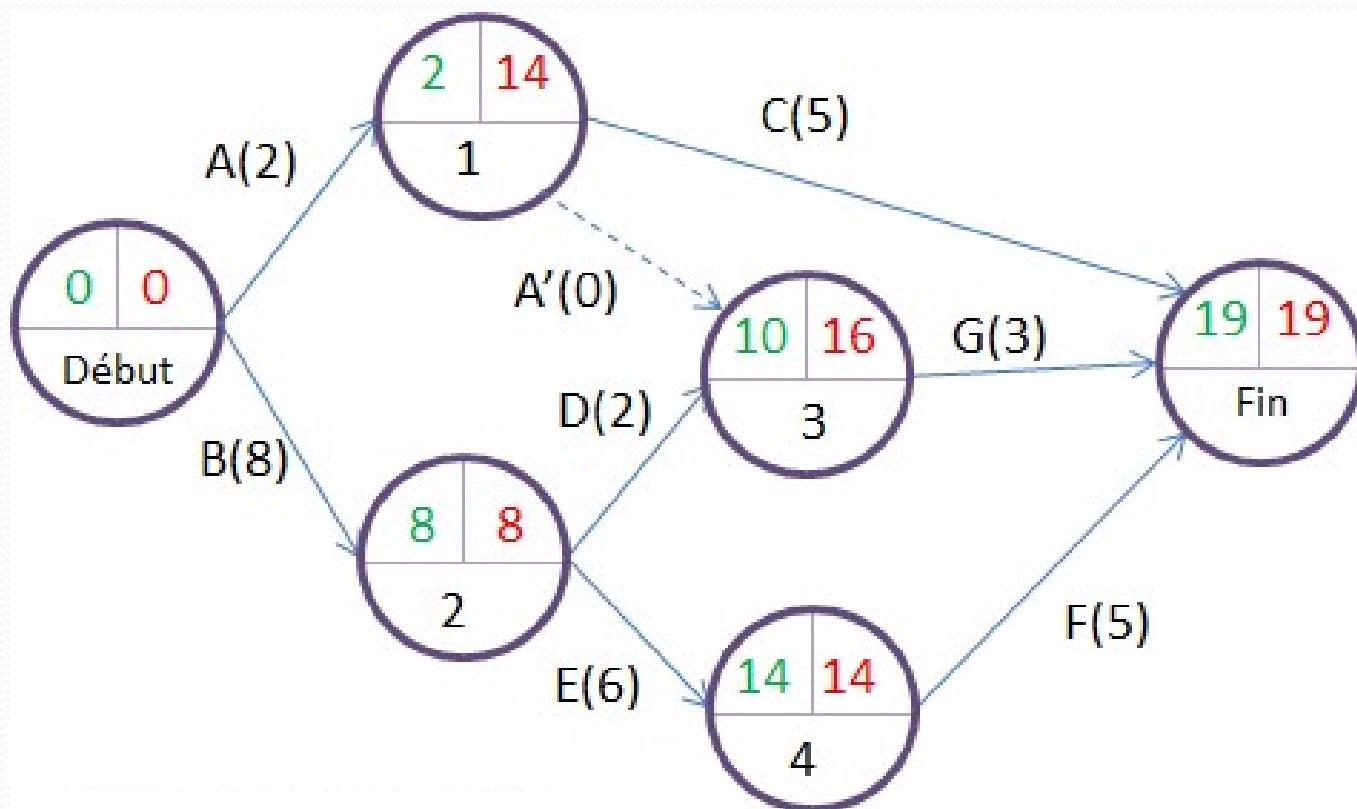
- Lorsque plusieurs tâches convergent vers une même étape (ici l'étape de Fin), retenez comme date au plus tôt, le nombre de jours le plus grand des différentes possibilités.
- Dans notre exemple :
 - Le chemin passant par la tâche C donne une date au plus tôt de 7 jours
 - par la tâche G, 13 jours
 - par F, 19 jours
- On retient donc 19 jours, car le projet se finira au plus tôt 19 jours après son début.

Le cas de la tâche fictive

- Concernant la G, elle possède 2 antérieurs D et A. Comme une tâche ne peut être représentée que par une seule flèche, il est nécessaire de créer une tâche fictive. Comme la D possède la date au plus tôt la plus élevée, on crée à son extrémité de façon conventionnelle l'étape 3 - puis on crée une tâche fictive A' avec une durée de 0 reliant les étapes 1 et 3.

4. Renseignez les dates au plus tard

- Parcourez le chemin inverse pour calculer les dates au plus tard. Partez de la dernière étape et indiquez la date au plus tard égale à la date au plus tôt, ici 19 jours. Puis remontez le graphe en retranchant cette fois à la date au plus tard de l'étape en question, la durée de la tâche qui la précède pour trouver la date au plus tard de l'étape positionnée en amont.
- Exemple pour l'étape 1 : 19 jours (nœud final) - 5 jours (tâche C) = 14 jours



- Lorsque 2 tâches ont pour origine la même étape, calculez les dates dans les 2 cas et retenez la date la plus petite. Procédez de la même manière avec les tâches fictives.
- Exemple pour l'étape 2 : en passant par la tâche D, la date au plus tard est de 14, alors que via l'étape E, nous avons 8. Nous retenons donc 8.

5. Calculez les marges des tâches

Ces marges sont des degrés de liberté qui permettent d'absorber des retards. Elles assurent la flexibilité du projet.

Définition de la marge totale

La marge totale représente le retard que peut prendre la réalisation d'une tâche sans impacter la date de fin du projet (à condition qu'elle ait commencé à sa date le plus tôt).

- Pour évaluer la marge d'une tâche, prenez les 2 étapes qui l'entourent et appliquez le calcul suivant :
- **Formule de la marge totale** : Date au plus tard de l'étape suivante - Durée de la tâche - Date au plus tôt de l'étape précédente
- Exemple : pour la tâche D, la marge totale est de 6 jours (16-2-8).

- **Définition de la marge libre**

La marge libre correspond au retard que peut prendre la réalisation d'une tâche sans impact sur la date au plus tôt des tâches suivantes (à condition qu'elle ait débuté à sa date le plus tôt).

- **Formule de la marge libre :** Date au plus tôt de l'étape suivante - Durée de la tâche - Date au plus tôt de l'étape précédente

- A noter : la marge libre ne peut pas être supérieure à la marge totale
- Ce qui est particulièrement important lorsqu'une équipe extérieure doit intervenir à une date précise. Il ne faut pas que cette date soit décalée à cause du retard de la tâche précédente.

- Calcul des marges dans l'exemple

Tâche	Marge libre	Marge totale
A	0	12
C	12	12
B	0	0
D	0	6
G	6	6
E	0	0
F	0	0

6. Définition du chemin critique

- Il s'agit du chemin passant par les tâches dont la marge totale est nulle. Ce tracé indique le délai incompressible pour réaliser le projet. En savoir plus sur **le chemin critique**.

