

Chapitre 4

Applications aux fonctions élémentaires

4.1 Fonction logarithme

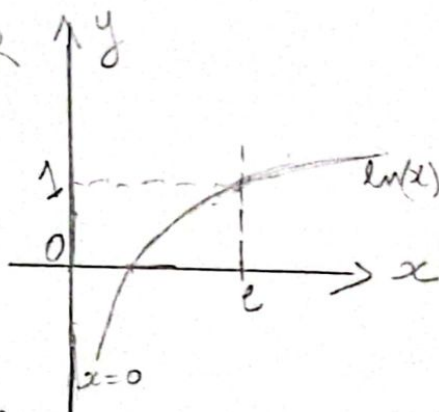
Définition 4.1.1

On appelle logarithme népérien et on note $\ln$ l'unique primitive s'annulant en 1 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Remarque:

La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue, strictement croissante et définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$



Propriétés des logarithmes:

Soient a et b des réels strictement positifs, et α un réel

1) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

2) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

3) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

4) $\ln(a^\alpha) = \alpha \ln a$

5) $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

Equations et d'inéquations avec des logarithmes

1) $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

2) $\ln a \geq \ln b \Leftrightarrow a \geq b$

3) $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

4) $\ln a \leq 0 \Leftrightarrow 0 < a \leq 1$ et $\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$

Limites particulières

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

4.2 Fonction exponentielle :

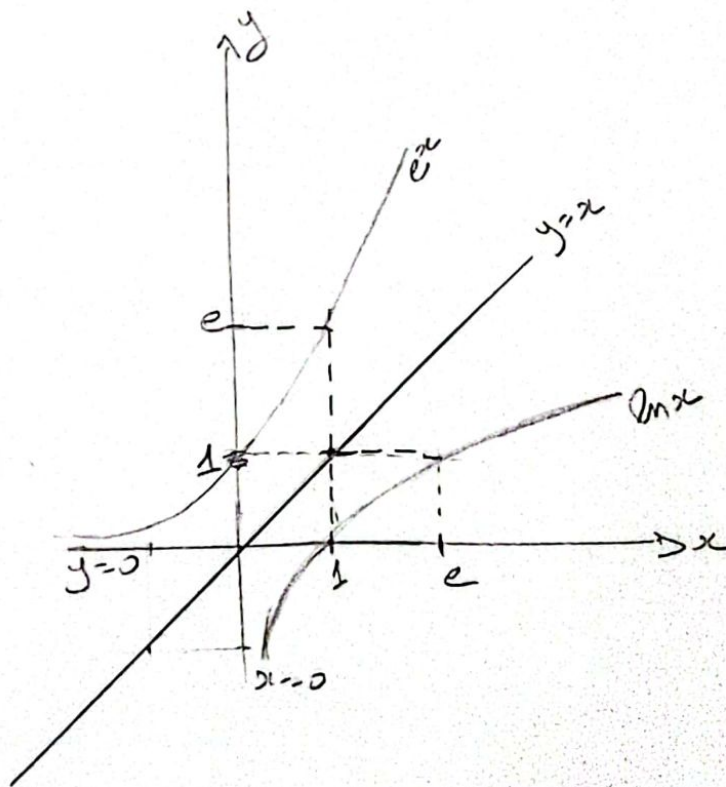
Définition 4.2.1 :

La fonction réciproque de $\ln: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ s'appelle la fonction exponentielle notée $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ou $e: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$

Remarque :

La fonction $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une fonction continue, strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$ ou

$$(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



propriétés des exponentielles

Sont a, b et n des réels

- 1) $e^a \times e^b = e^{a+b}$
- 2) $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$
- 3) $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- 4) $(e^a)^n = e^{na}$

Lien exponentielle et logarithme

- 1) $\ln(e^a) = a$
- 2) $e^{\ln a} = a > 0$
- 3) $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b$
- 4) $a^b = e^{b \ln a}$

Équations et inéquations avec des exponentielles:

- 1) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- 2) $e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$
- 3) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
- 4) $e^a \geq b > 0 \Leftrightarrow a \geq \ln b$
- 5) $e^a < b \Leftrightarrow a < \ln b$ avec $b > 0$

Limites particulières:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

4.3 Fonction puissance.

Définition 4.1.3:

On appelle fonction puissance d'un réel a positif, la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$$

Remarque:

La fonction puissance est strictement positive $\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x = e^{x \ln a} > 0$

propriétés

Pour tous $a, b > 0$, on a les égalités suivantes

- 1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(a^x) = x \ln a$
- 2) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ et $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- 3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad (a^x)^y = a^{xy}$
- 4) $\forall x \in \mathbb{R} \quad (ab)^x = a^x \cdot b^x$

Étude de la fonction puissance:

Soit la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = a^x$

Comme $a^x = e^{x \ln a}$, elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, car composition de fonctions continues et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors:

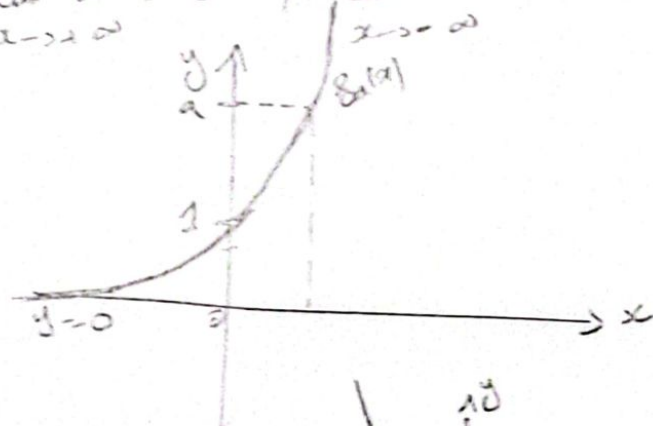
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'_a(x) = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln(a) a^x$$

Le signe de la dérivée dépend donc du signe de $\ln a$. On a alors :

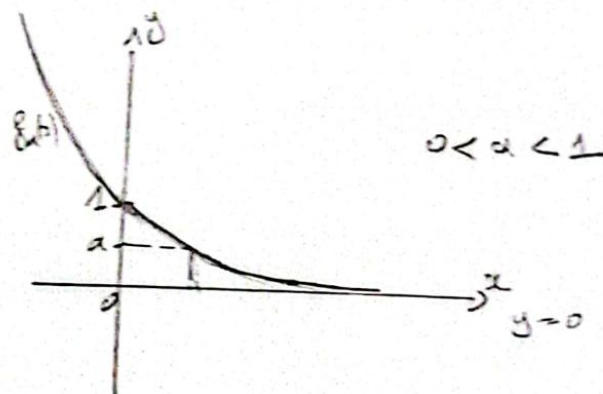
si $a > 1$, on a alors $\forall x \in \mathbb{R}, f'_a(x) > 0$, la fonction puissance est croissante
 si $0 < a < 1$, on a alors $\forall x \in \mathbb{R}, f'_a(x) < 0$, la fonction puissance est décroissante

$a > 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

$0 < a < 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$



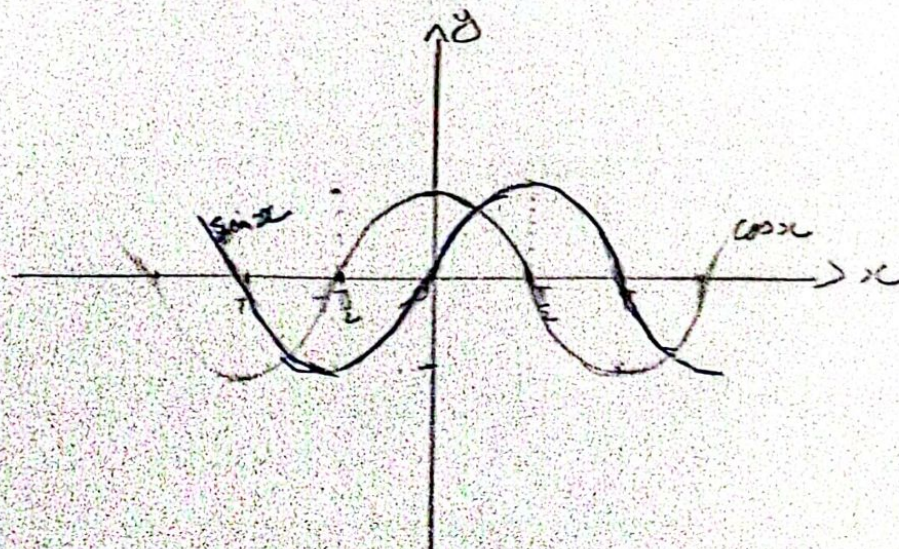
$a > 1$



$0 < a < 1$

4.4 Fonctions trigonométriques

- La fonction cosinus est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 2π sa dérivée est $-\sin x$
- La fonction sinus est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, impaire, périodique de période 2π sa dérivée est $\cos x$



Propriétés:

Les fonctions sinus et cosinus satisfont les propriétés suivantes, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- 1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- 2) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
- 3) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
- 4) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
- 5) $\sin(2x) = 2 \cos x \sin x$

Formules d'addition

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a

- 1) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- 2) $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
- 3) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- 4) $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

Formules de transformation de produit en somme:

- 1) $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$
- 2) $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$
- 3) $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$
- 4) $\cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$

Formules de transformation de sommes en produit

- 1) $\sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- 2) $\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- 3) $\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- 4) $\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Les fonctions tangente et cotangente:

Définition 4.2.1:

On appelle tangente la fonction $\tan$ (ou tg) définie par

$$x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

On appelle cotangente la fonction cot définie par

$$x \mapsto \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

propriétés:

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, on a

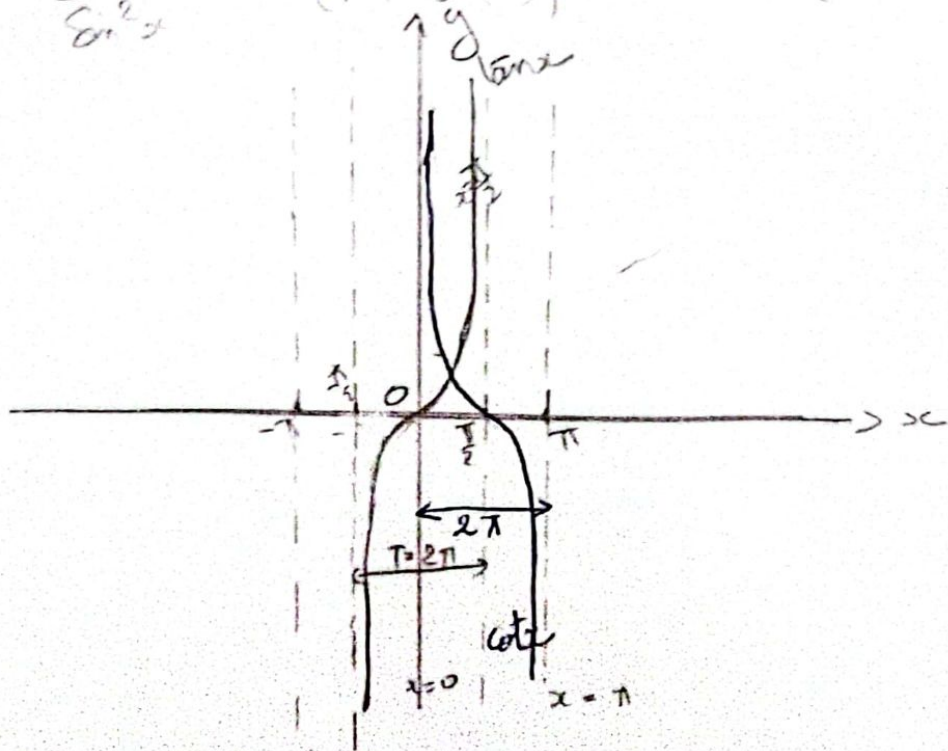
$$\cot(x) \tan(x) = 1$$

Les deux fonctions étant périodiques de période π , on peut donc restreindre le domaine de l'étude à un intervalle de longueur π par exemple $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ pour la tangente et $]0, \pi[$ pour la cotangente

Les fonctions tangente et cotangente sont continues et dérivables sur leurs domaines de définition et l'on a

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\cot' x = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$



propriétés:

La fonction tangente satisfait les propriétés suivantes, $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ on a

$$1) \tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$2) \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$3) \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$-1) \tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$

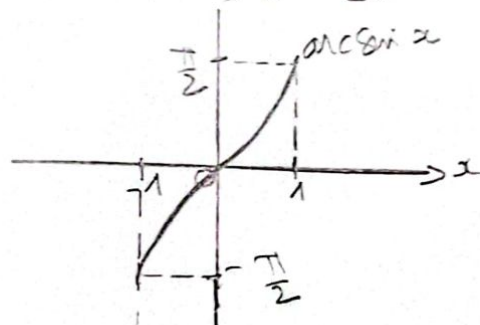
4.5 Fonctions circulaires réciproques :

Fonction $x \mapsto \arcsin x$

La fonction sinus a une fonction dérivée strictement positive sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc c'est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $]-1, 1[$. La bijection réciproque est appelée fonction arcsin et est notée $\arcsin$

$$\arcsin [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$x \mapsto \arcsin x$$



propriétés :

- 1) $\forall x \in [-1, 1], \sin(\arcsin(x)) = x$
- 2) $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \arcsin(\sin(x)) = x$
- 3) $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \sin x = y \Leftrightarrow x = \arcsin y$
- 4) $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

proposition 4.5.1

La fonction arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ et l'on a

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Démonstration

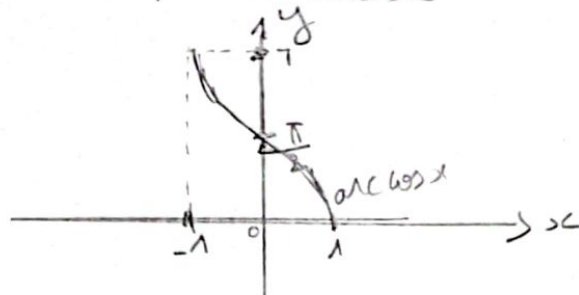
Pour tout $x \in] -1, 1[$, on a $\sin(\arcsin(x)) = x$, par dérivation, on obtient

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Fonction $x \mapsto \arccos x$

La fonction cosinus a une fonction dérivée strictement négative sur $]0, \pi[$, donc bijectrice de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. La bijection réciproque est appelée fonction arccosinus et est notée $\arccos$

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$
$$x \mapsto \arccos x$$



propriétés:

- 1) $\forall x \in [-1, 1]$, on a $\cos(\arccos(x)) = x$
- 2) $\forall x \in [0, \pi]$, on a $\arccos(\cos x) = x$
- 3) $\forall x \in [0, \pi]$, on a $\cos x = y \Leftrightarrow x = \arccos y$
- 4) $\forall x \in [-1, 1]$, on a $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$

proposition 4.5.2

La fonction $\arccos$ est dérivable dans $] -1, 1[$, et l'on a

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

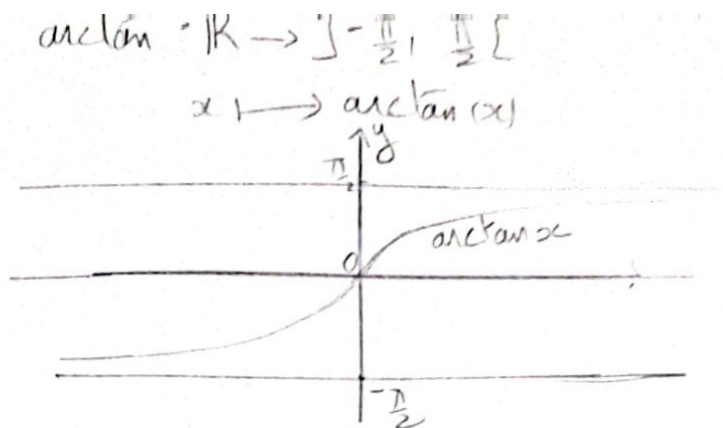
Démonstration

$\forall x \in] -1, 1[$, on a $\cos(\arccos(x)) = x$, par dérivation, on obtient

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Fonction $x \mapsto \arctan x$

La fonction tangente a une fonction dérivée strictement positive sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc c'est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. La bijection réciproque est appelée fonction arctangente et est notée $\arctan$



propriétés

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ on a } \tan(\arctan(x)) = x$
- 2) $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \text{ on a } \arctan(\tan x) = x$
- 3) La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

4.6 Fonctions hyperboliques et leurs inverses

4.6.1 Fonctions hyperboliques

Definition 4.6.1 :

Les fonctions de la variable x

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}, \quad \text{coth } x = \frac{1}{\text{th } x} \quad (x \neq 0)$$

s'appellent respectivement cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique et co-tangente hyperbolique

propriétés :

- 1) La fonction ch est paire et les fonctions $\text{sh}, \text{th}, \text{coth}$ impaires
- 2) pour tous $x \in \mathbb{R}$, on a les relations

$$\begin{aligned} \text{ch } x + \text{sh } x &= e^x & \text{ch } x - \text{sh } x &= e^{-x} \\ \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x &= 1 & 1 - \text{th}^2 x &= \frac{1}{\text{coth}^2 x} \end{aligned}$$

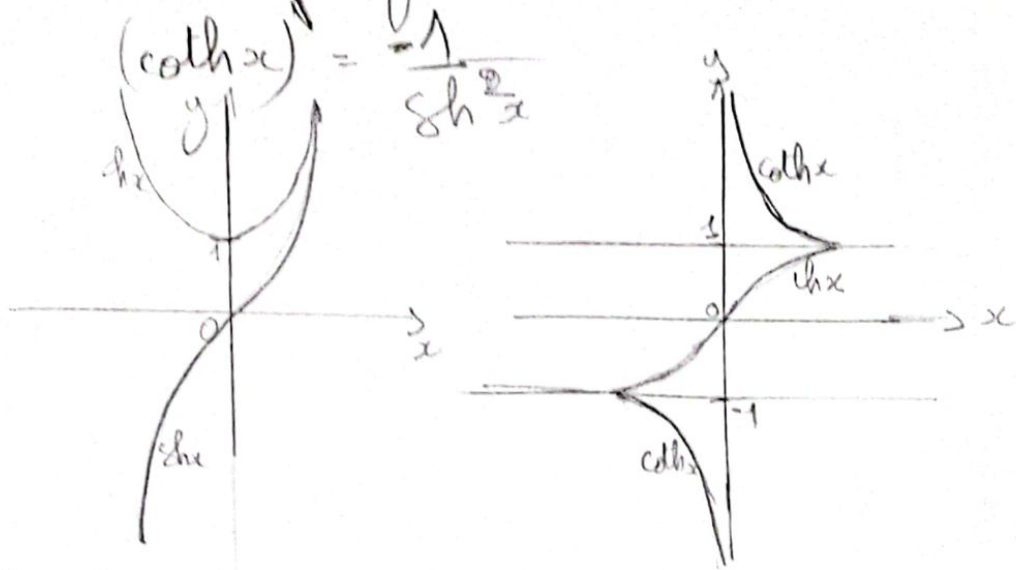
- 3) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a les relations

$$\begin{aligned} \text{ch}(x+y) &= \text{ch } x \text{ch } y + \text{sh } x \text{sh } y \\ \text{sh}(x+y) &= \text{sh } x \text{ch } y + \text{ch } x \text{sh } y \\ \text{th}(x+y) &= \frac{\text{th } x + \text{th } y}{1 + \text{th } x \text{th } y} \end{aligned}$$

- 4) Les fonctions $\text{ch}, \text{sh}, \text{th}$ sont indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et l'on a

$$(ch x)' = sh x, \quad (sh x)' = ch x, \quad (th x)' = \frac{1}{ch^2 x} = 1 - th^2 x$$

5) La fonction coth est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et l'on a

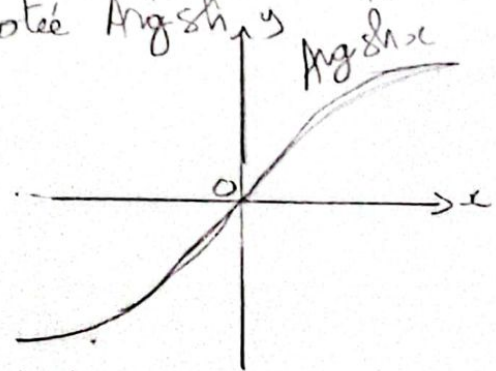


4.3.2 Fonctions hyperboliques réciproques

Fonction $x \mapsto \text{Argsh}$

La fonction sinus hyperbolique est de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. L'application réciproque est appelée argument sinus hyperbolique et est notée Argsh .

$$\begin{aligned} \text{Argsh} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \text{Argsh } x \end{aligned}$$



propriétés

$$1) \forall x \in \mathbb{R}, \quad sh(\text{Argsh } x) = x \text{ et } \text{Argsh}(sh x) = x$$

$$2) \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Argsh } x = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$$

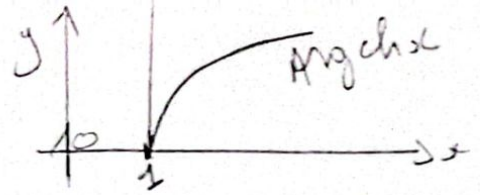
3) La fonction Argsh est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, et l'on a

$$(\text{Argsh } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Fonction $x \mapsto \text{Argch}$

La fonction cosinus hyperbolique est de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc c'est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $[1, +\infty[$. L'application réciproque est appelée argument hyperbolique et est notée Argch .

$$\text{Argch} : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[\\ x \mapsto \text{Argch } x$$



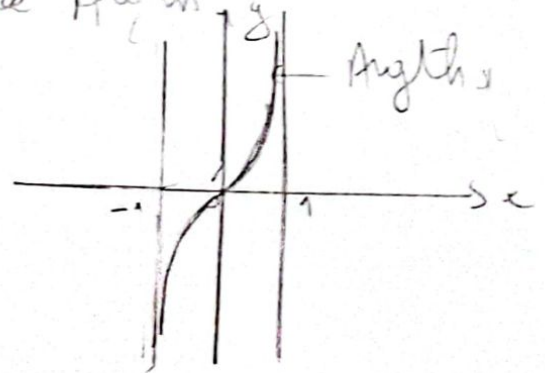
propriétés:

- 1) $\forall x \in [1, +\infty[\quad \text{ch}(\text{Argch } x) = x$
- 2) $\forall x \in [0, +\infty[\quad \text{Argch}(\text{ch } x) = x$
- 3) $\forall x \in [1, +\infty[\quad \text{Argch } x = \ln \sqrt{x^2 - 1} + x$
- 4) la fonction Argch est continue sur $[1, +\infty[$, dérivable sur $]1, +\infty[$, et l'on a $(\text{Argch } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Fonction $x \mapsto \text{Argth}$

La fonction tangente hyperbolique est de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$. L'application réciproque est appelée argument tangente hyperbolique et est notée Argth .

$$\text{Argth} :] -1, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \text{Argth } x$$

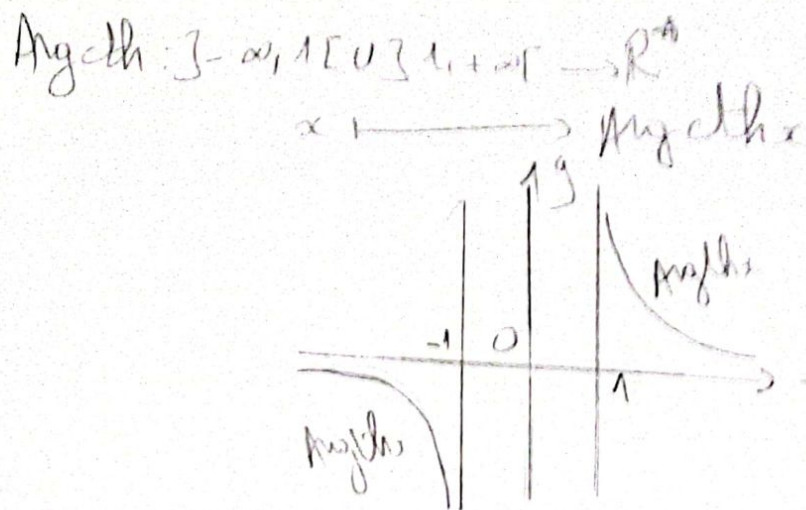


propriétés:

- 1) $\forall x \in] -1, 1[\quad \text{th}(\text{Argth } x) = x$
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Argth}(\text{th } x) = x$
- 3) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \text{Argth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$
- 4) la fonction Argth est continue et dérivable sur $] -1, 1[$, et l'on a $(\text{Argth } x)' = \frac{1}{1-x^2}$

Fonction $x \mapsto \text{Argcth}$

La fonction cotangente hyperbolique est de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, donc c'est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $] -\infty, 1[\cup] 1, +\infty[$. L'application réciproque est appelée argument cotangente hyperbolique et est notée Argcth .



propriétés

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{coth}(\text{Argcth } x) = x$
- 2) $\forall x \in]-\infty, 1[\cup] 1, +\infty[\quad \text{Argcth}(\text{coth } x) = x$
- 3) $\forall x \in]-\infty, 1[\cup] 1, +\infty[\quad \text{Argcth } x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$
- 4) La fonction Argcth est continue et dérivable sur $] -\infty, 1[\cup] 1, +\infty[$
et l'on a $(\text{Argcth } x)' = \frac{1}{x^2 - 1}$