9. Repère sphérique

Lorsqu'on a une symétrie

sphérique autour de l'origine O. On utilise les coordonnées sphériques (R, θ, φ) pour déterminer la position d'un mobile M dans l'espace telles que :

$R = \|\overrightarrow{OM}\|$

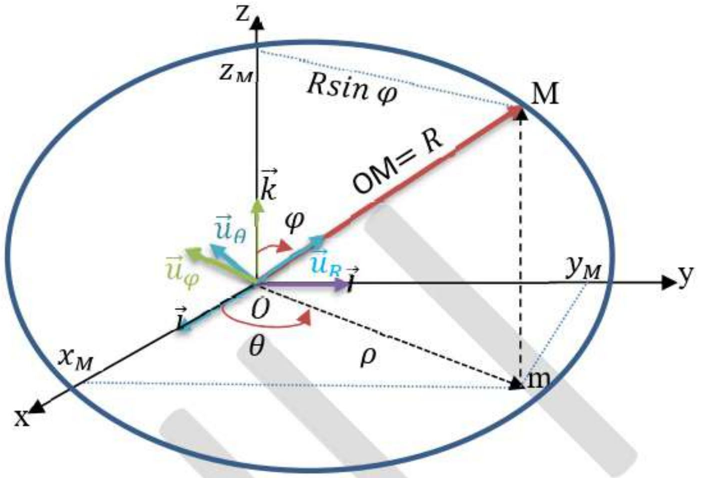
θ =l'angle (Ox, ρ)

φ =l'angle (Oz, R)

Avec : $0 < R < +\infty$

$0 < \theta < 2\pi$

$0 < \varphi < \pi$



Et une nouvelle base de vecteurs unitaires $(\vec{u}_R, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ s'introduit.

9.1 Vecteur position en coordonnées sphériques :

Soit $\overrightarrow{OM} = \vec{R} = x_M\vec{\imath} + y_M\vec{\jmath} + z_M\vec{k}$ le vecteur positon du point M exprimé en coordonnées cartésiennes, pour pouvoir exprimer $\overrightarrow{OM}$ en fonction des coordonnées sphériques (R, θ, φ), on écrit $x_M, y_M\ et\ z_M$ en foction de R, θ, φ de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_M = \rho\cos(\theta) \\ y_M = \rho\sin(\theta) \\ z_M = R\cos(\varphi) \end{cases} \xrightarrow{\rho = R\sin(\varphi)} \begin{cases} x_M = R\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y_M = R\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z_M = R\cos(\varphi) \end{cases}$$

On remplace $x_M, y_M\ et\ z_M$ par leurs expressions dans $\overrightarrow{OM}$ et on obtient :

$\overrightarrow{OM} = R\sin(\varphi)\cos(\theta)\,\vec{\imath} + R\sin(\varphi)\sin(\theta)\,\vec{\jmath} + R\cos(\varphi)\,\vec{k}$.

On prend R en facteur : $\overrightarrow{OM} = R\big(\sin(\varphi)\cos(\theta)\,\vec{\imath} + \sin(\varphi)\sin(\theta)\,\vec{\jmath} + \cos(\varphi)\,\vec{k}\big)$.

Posant : $\vec{u}_R = \big(\sin(\varphi)\cos(\theta)\,\vec{\imath} + \sin(\varphi)\sin(\theta)\,\vec{\jmath} + \cos(\varphi)\,\vec{k}\big)$

Donc le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, exprimé dans un repère sphérique de centre O et muni des vecteurs unitaires $(\vec{u}_R\ , \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$, deviendra :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = R.\vec{u}_R}$$

Avec : $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Tels que $\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{R}}$, $\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}}$ et $\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varphi}}$ sont les vecteurs unitaires du repère sphérique et ont les expressions suivantes dans la base cartésienne :

$$\begin{cases} \vec{u}_R = \sin(\varphi)\cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\varphi)\sin(\theta)\,\vec{j} + \cos(\varphi)\,\vec{k} = \sin(\varphi)\,\vec{u}_\rho + \cos(\varphi)\,\vec{k}. \\ \vec{u}_\theta = \dfrac{d}{dt}\vec{u}_\rho = -\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\,\vec{j} \\ \vec{u}_\varphi = \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_R = \cos(\varphi)\,\vec{u}_\rho - \sin(\varphi)\,\vec{k} = \dfrac{d}{d\varphi}\vec{u}_R \end{cases}$$

9.2 Vecteur vitesse en coordonnées sphériques :

La vitesse, en coordonnées sphériques, est calculée de la même manière suivante :

$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{R}\vec{u}_R + R\dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{u}_\theta + +R\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi}$$

9.3 Vecteur accélération en coordonnées cylindriques

Le vecteur accélération, en coordonnées cylindriques, est donnée par :

$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2 - R\dot{\theta}^2\sin^2\varphi\right)\vec{u}_R + \left(R\ddot{\varphi} + 2\dot{R}\dot{\varphi} - R\dot{\theta}^2\sin\varphi\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi + \left(R\ddot{\theta}\,sin\,\varphi + 2\dot{R}\dot{\theta}\,sin\,\varphi + 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\,cos\,\varphi\right)\vec{u}_\theta$$

9.4 Correspondance entre les coordonnées sphériques et les coordonnées cartésiennes

Pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques, on utilise les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} R \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} : \begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan(\theta) = \frac{y}{z} \\ \tan(\varphi) = \frac{\rho}{z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{cases}$$

Pour passer des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes, on utilise les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} R \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x = R\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y = R\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z = R\cos(\varphi) \end{cases}$$