

Chapitre 1: Concepts généraux

1.1 Introduction :

La mécanique des milieux continus est une branche de la mécanique dédiée à l'étude des mouvements des corps déformables, qu'il s'agisse de gaz, de liquides ou de solides, en s'appuyant sur les principes et méthodes de la mécanique rationnelle. Elle s'intéresse aux corps matériels qui occupent l'espace de manière continue et homogène, dont les points varient de position lors du mouvement.

L'hypothèse des milieux continus consiste à supposer que les propriétés caractéristiques des milieux, telles que la densité, l'élasticité, etc., varient de manière continue. Cette hypothèse permet d'utiliser des outils mathématiques basés sur des fonctions continues et/ou dérivables.



Figure 1.1 : Domaines de la mécanique des milieux continus.

1.2 Quelques définitions

a) Continuité du milieu

Un milieu continu est un milieu dans lequel les propriétés physiques varient de manière continue d'un point à un autre. Par exemple, la masse m est une fonction continue des variables x, y, z , et t , à l'exception de certains points, lignes ou surfaces (appelés singularités).

- b) **Un matériau homogène** : est un matériau dont ses propriétés sont les mêmes en tout point.
- c) **Un matériau isotrope** : est un matériau dont ses propriétés ne dépendent pas du repère dans lequel elles sont observées ou mesurées.
- d) **La mécanique des solides déformables** : est une sous-discipline de la mécanique des milieux continus qui analyse le comportement des matériaux solides, notamment leurs déplacements et déformations sous l'effet de forces, de variations de température, de changements de phase ou d'autres influences internes ou externes.

1.3 Cinématiques des milieux continus

La cinématique des milieux continus a pour objectif d'étudier le milieu en termes de déplacement, de vitesse et d'accélération, sans prendre en compte les forces qui interviennent.

1.3.1 Description du mouvement

Pour caractériser le mouvement d'une particule dans un milieu continu, on s'intéressera aux différentes fonctions suivantes :

- **Fonctions vectorielles :**

Trajectoire de la particule : \vec{x}

$$\text{Vitesse : } \vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$\text{Accélération : } \vec{y} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

- **Fonctions scalaires :**

Pression : P

Masse volumique : ρ

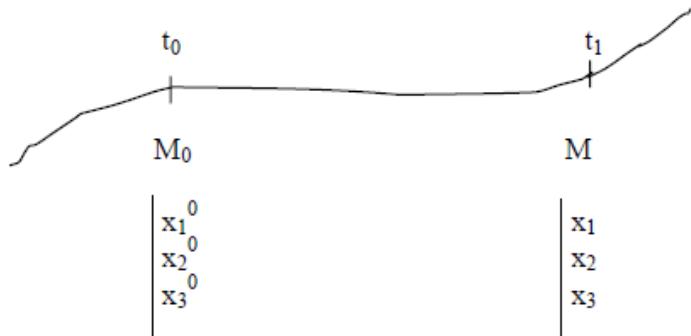
Température : T

Il existe deux méthodes de description du mouvement :

1.3.1.1 Représentation lagrangienne

Soit une particule occupant la position $M_0 (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ à l'instant t_0 et la position $M(x_1, x_2, x_3)$ à l'instant t :

On appelle instant de référence un instant t_0 choisi arbitrairement. On appelle instant actuel un instant t quelconque.



Le mouvement de la particule en un point M sera déterminé si :

$$x_1 = x_1 (x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)$$

$$x_2 = x_2 (x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)$$

$$x_3 = x_3 (x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)$$

(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) sont appelées variables de Lagrange.

La méthode de Lagrange consiste à identifier une particule du milieu continu et à suivre son mouvement. Les coordonnées de la particule à un instant donné sont exprimées en fonction de sa position initiale et du temps. (L'objectif est d'étudier l'évolution d'une particule matérielle spécifique).

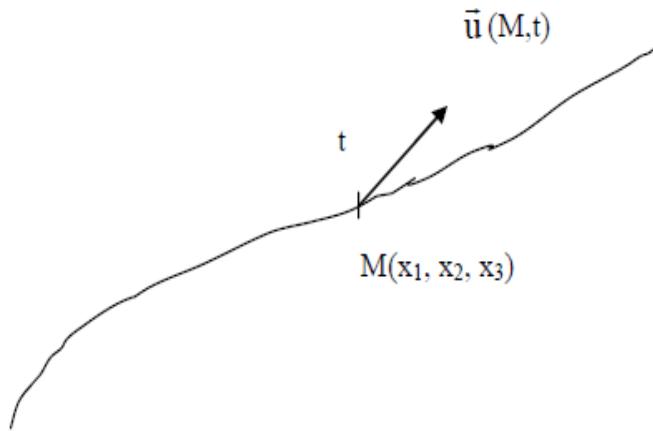
1.3.1.2 Représentation eulérienne

Soit un point M fixe de l'espace de coordonnées (x_1, x_2, x_3)

À l'instant t_0 , il y a en M une particule de vitesse \overrightarrow{U}_0

À l'instant t , il y a en M une autre particule de vitesse $\overrightarrow{U}_1 (u_1(x_1, x_2, x_3, t), u_2(x_1, x_2, x_3, t), u_3(x_1, x_2, x_3, t))$.

$$u_i = u_i(x_i, t)$$



Dans la description eulérienne, la cinématique du mouvement est abordée en analysant les vitesses des particules à un point fixe. Les coordonnées (x_1, x_2, x_3, t) sont appelées variables d'Euler. En effet, la méthode d'Euler consiste à choisir un point fixe dans l'espace et à étudier, en fonction du temps, les caractéristiques des particules présentes en ce point. (L'objectif est d'analyser l'évolution des propriétés du milieu à un endroit donné dans l'espace).