Chapitre2 : Préliminaires mathématique

2.1) Quelques définitions :

Un scalaire :

Un scalaire est défini comme une quantité représentée par un seul nombre, qui est indépendant de tous base (par exemple, l'énergie, la masse, la température, le volume, etc.).

Un vecteur :

Est un segment linéaire, caractérisé par une direction, un sens et une norme (ou module).

Repère orthonormé direct :

Base orthonormée :-orthogonale : $\overrightarrow{e_1} \perp \vec{e}_2$, $\overrightarrow{e_2} \perp \vec{e}_3$, $\overrightarrow{e_1} \perp \vec{e}_3$.

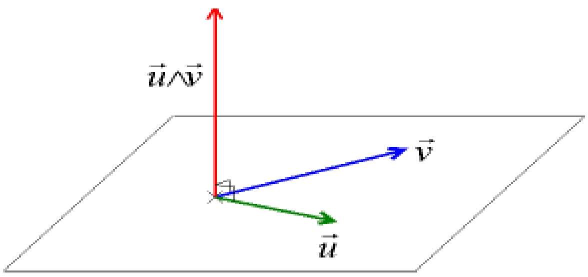
-Normé : $|\overrightarrow{e_1}| = |\overrightarrow{e_2}| = |\overrightarrow{e_3}|$

Le produit scalaire :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \cos\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$$

Le produit vectoriel :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \left|\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})\right|$$



Notons les coordonnées $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$.

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

2.2 Convention de somation (Convention d'Einstein) :

Dans un monôme, si un indice est répété deux fois, cela signifie qu'il y a sommation sur cet indice dans son intervalle. Cet indice est appelé **muet**, tandis que les autres indices sont appelés **libres**.

Exemples :

1)

$$a_{ii} = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

2)

$$a_{ij}b_j = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}b_j = a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2 + a_{i3}b_3$$

2.3 Symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, if\ i = j \\ 0, if\ i \neq j \end{cases} \qquad = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4 Symbole de permutation :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est } (1,2,3), (2,3,1) \text{ ou } (3,1,2), \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est } (3,2,1), (1,3,2) \text{ ou } (2,1,3), \\ 0 & \text{si } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i. \end{cases}$$

2.5 Notation indicielle

La notation indicielle est un schéma d'abréviation dans lequel un ensemble entier de nombre est représenté par un seul symbole avec des indices.

Exemples :

$$a_i = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

2.6 Tenseur :

Un tenseur généralement une fonction des coordonnées de l'espace à n dimensions par n^k composante, avec k est l'ordre du tenseur.

- L'ordre d'un tenseur est égal le nombre d'indices nécessaires pour décrire ses composantes
- Le nombre de composantes d'un tenseur d'ordre n dans une base tridimensionnel est : 3^{n}.

Exemples :

1) Le vecteur Ti a un indice : tenseur d'ordre 1 ($\bar{T}$)
2) La matrice T_{ij} : tenseur d'ordre 2 ($\bar{\bar{T}}$)

2.7 Les opérations sur les tenseurs :

2.7.1 Le produit tensoriel

Notons ⊗ le produit tensoriel et ∧ le produit vectoriel.

1) Le produit vectoriel est un vecteur : $\bar{C} = \bar{A} \wedge \bar{B}$
2) Le produit tensoriel de deux vecteurs est un tenseur d'ordre 2 : $\bar{\bar{C}} = \bar{A} \otimes \bar{B}$ ou $C_{ij} = A_i B_j$

2.7.2 Tenseur symétrique et antisymétrique

$\bar{\bar{A}}$ Symétrique : $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{A}}^T$ ou $A_{ij} = A_{ji}$

$\bar{\bar{A}}$ Antisymétrique : $\bar{\bar{A}} = -\bar{\bar{A}}^T$ ou $A_{ij} = -A_{ji}$

2.7.3 Trace d'un tenseur

La trace d'un tenseur d'ordre 2 est la somme de ces termes diagonaux.

$$Tr\,\bar{\bar{A}} = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

2.8 Les opérations sur les matrices

Soit ***A*** et ***B*** deux matrices de composantes $\boldsymbol{A_{ij}}$ et $\boldsymbol{B_{ij}}$ et $\boldsymbol{\alpha}$ est un scalaire.

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \;:\; \boldsymbol{A}_{ij} = \boldsymbol{B}_{ij}$$

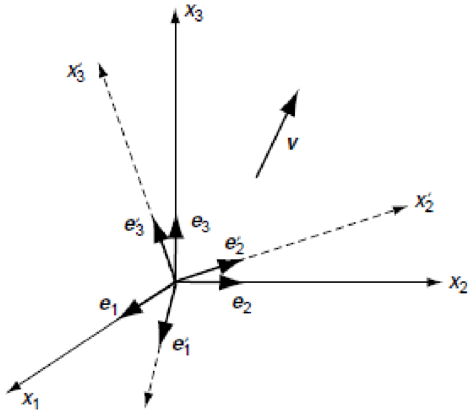
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \;:\; \boldsymbol{C}_{ij} = \boldsymbol{A}_{ij} + \boldsymbol{B}_{ij}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = [\boldsymbol{A}][\boldsymbol{B}] \;:\; \boldsymbol{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}_{ik} \boldsymbol{B}_{kj}$$

$$\boldsymbol{C} = \alpha \boldsymbol{A} \;:\; \boldsymbol{C}_{ij} = \alpha \boldsymbol{A}_{ij}$$

2.9 Changement de repère :

Soit $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ une base orthonormée et $\vec{e_1'}$, $\vec{e_2'}$, $\vec{e_3'}$ une autre base orthonormée.



On définit la matrice de passage Q telle que:

$$\vec{e}_1' = Q_{11}\vec{e}_1 + Q_{12}\vec{e}_2 + Q_{13}\vec{e}_3$$
$$\vec{e}_2' = Q_{21}\vec{e}_1 + Q_{22}\vec{e}_2 + Q_{23}\vec{e}_3$$
$$\vec{e}_3' = Q_{31}\vec{e}_1 + Q_{32}\vec{e}_2 + Q_{33}\vec{e}_3$$

En notations indicielles :

$$\vec{e}_i' = Q_{ij}\vec{e}_j$$

Un vecteur $\vec{V}$ devient dans la base $\vec{e_1'}$, $\vec{e_2'}$, $\vec{e_3'}$:

$V_i' = Q_{ij}V_j$

Un tenseur de second ordre (matrice) devient :

$$a_{ij}' = Q_{ip}Q_{jq}a_{pq}$$

2.10 Polynôme caractéristique :

Les valeurs propres d'un tenseur du second ordre sont obtenues par la résolution de l'équation caractéristique

$$\boldsymbol{P}(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

Soit en développant

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$$

Avec :

$$\begin{cases} I_3 = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnp}A_{im}A_{jn}A_{kp} = Det(A) \\ I_2 = \frac{1}{2}\left(A_{ii}A_{jj} - A_{ij}A_{ji}\right) = \frac{1}{2}\left[(Tr\ A)^2 - Tr\ A^2\right] \\ I_1 = A_{ii} = Tr\ A \end{cases}$$

I_1, I_2, I_3 sont appelés les invariants fondamentaux du tenseur A.

2.11 Application aux calculs tensoriels :

Il est pratique d'introduire la notation par virgule pour la dérivation partielle :

$$a_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i}a,\ a_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x_j}a_i,\ a_{ij,k} = \frac{\partial}{\partial x_k}a_{ij}, \cdots$$

La dérivation d'un vecteur $a_{i,j}$ produit un tenseur de second ordre.

$$a_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Considérons une fonction scalaire f :

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

Avec le vecteur unitaire n est :

$$n = \frac{dx}{ds}e_1 + \frac{dy}{ds}e_2 + \frac{dz}{ds}e_3$$

Donc :

$$\frac{df}{ds} = n \cdot \nabla f$$

∇f : est le gradient de la fonction scalaire *f*.

$$\nabla f = \textbf{grad}\ f = e_1 \frac{\partial f}{\partial x} + e_2 \frac{\partial f}{\partial y} + e_3 \frac{\partial f}{\partial z}$$

Le gradient d'un scalaire :

$$\nabla \phi = \phi_{,i} e_i$$

Divergence d'un vecteur :

$$\nabla \cdot u = u_{i,i}$$