

Chapitre 3 : Théorie de l'état de contraintes

3.1 Introduction :

3.1.1 Forces dans le milieu continu

a) Les forces extérieures ou volumiques (ou massiques) :

Une force volumique correspond à une force exercée par unité de volume. Elle provient généralement de l'attraction gravitationnelle. On peut calculer la résultante F_R de l'action volumique par :

$$F_R = \iiint_V \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV$$

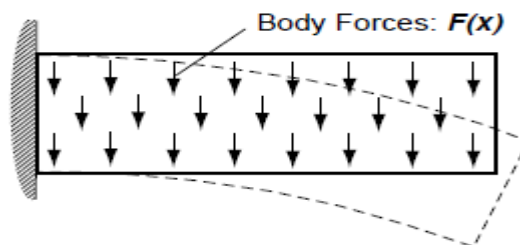


Figure 3.1 : Les forces volumiques

b) Les forces surfaciques de contact :

Une force surfacique est une force par unité de surface. Elle est associée à un contact entre deux solides ou entre un solide et un fluide. On peut calculer la résultante F_S de l'action surfacique par :

$$F_S = \iint_S \mathbf{T}^n(\mathbf{x}) dS$$

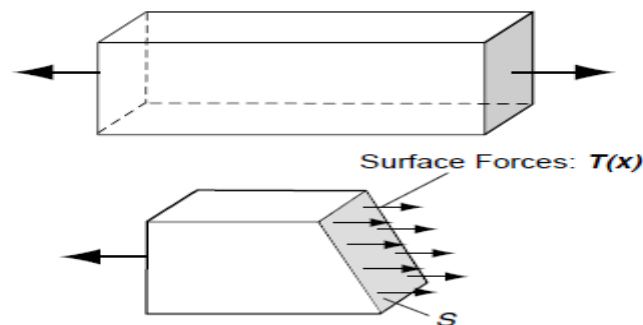


Figure 3.2 : Les forces surfaciques.

3.2 Notion de vecteur contrainte

En chaque point M d'un solide, des forces internes agissent, et ces forces peuvent être observées en réalisant une coupure du solide à travers une surface S, divisant celui-ci en deux parties, A et B.

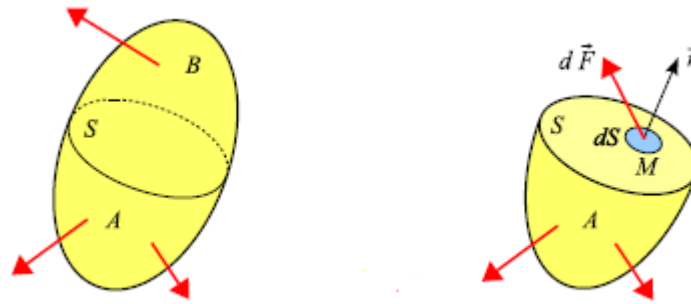


Figure 3.3 : Coupure et facette \vec{n} en M

Soit $d\vec{F}$ la force qui s'exerce sur cette facette. On appelle vecteur contrainte sur la facette \vec{n} en M, la quantité :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{dS}$$

Considérons, en un point M, le cylindre infiniment petit d'axe \vec{n} , de hauteur h et de section dS

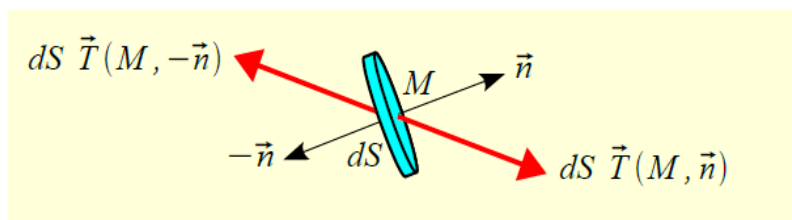


Figure 3.4 Efforts sur les facettes \vec{n} et $-\vec{n}$.

Lorsque h tend vers 0, le cylindre est en équilibre sous l'effet des forces $dS \vec{T}(M, \vec{n})$ et $dS \vec{T}(M, -\vec{n})$, ce qui donne :

$$\vec{T}(M, -\vec{n}) = -\vec{T}(M, \vec{n})$$

3.3 Contrainte normale et contrainte tangentielle

Considérons une facette de normale \vec{n} . le vecteur de contrainte $\vec{T}(\vec{n})$ peut être décomposé en une composante normale σ_n et une composante tangentielle τ_n .

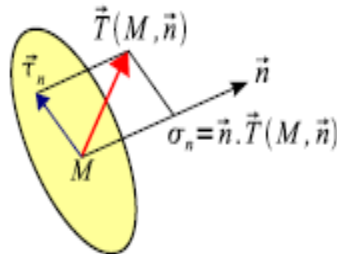


Figure 3.5 : Vecteur contrainte sur la facette \vec{n} en M.

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n$$

Avec :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n$$

$$\|\vec{T}\|^2 = \sigma_n^2 + \|\vec{\tau}_n\|^2$$

3.4 Tenseur des contraintes (Formule de Cauchy)

Considérons le tétraèdre infinitésimal MABC construit sur les axes x, y et z (figure 3.6). Soit \vec{n} le vecteur unitaire normal au plan ABC, de composantes (n_x, n_y, n_z) , dirigé vers l'extérieur du tétraèdre, et dS l'aire du triangle ABC.

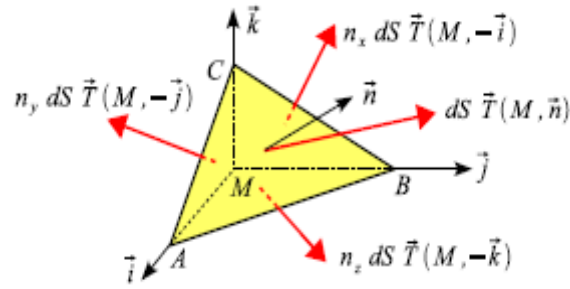


Figure3.6 : Equilibre du tétraèdre.

On a :

$$\text{aire } (MBC) = n_x dS,$$

$$\text{aire } (MAC) = n_y dS,$$

$$\text{aire } (MAB) = n_z dS$$

Le tétraèdre est en équilibre sous l'action des forces appliquées sur ses faces (les forces de volume sont des infiniment petits d'ordre supérieur) :

$$dS \vec{T}(M, \vec{n}) + n_x dS \vec{T}(M, -\vec{i}) + n_y dS \vec{T}(M, -\vec{j}) + n_z dS \vec{T}(M, -\vec{k}) = \vec{0}$$

Après simplification, on aura :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = n_x \vec{T}(M, \vec{i}) + n_y \vec{T}(M, \vec{j}) + n_z \vec{T}(M, \vec{k})$$

Sous forme matricielle :

$$\{T(M, \vec{n})\} = \begin{bmatrix} \{T(M, \vec{i})\} & \{T(M, \vec{j})\} & \{T(M, \vec{k})\} \end{bmatrix} \{n\}$$

Avec : $[\sigma(M)]$ est le tenseur des contraintes de Cauchy en M . Ses composantes sont données par :

$$\text{composantes sur } \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T}(M, \vec{i}) & \vec{T}(M, \vec{j}) & \vec{T}(M, \vec{k}) \\ \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

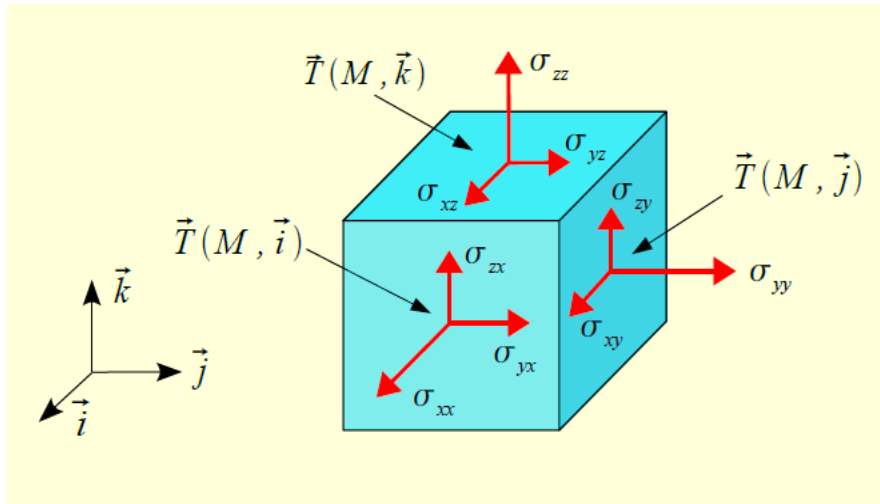


Figure 3.7 : Vecteur contrainte sur les facettes \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} en M

Les contraintes σ_x , σ_y , σ_z représentent les contraintes normales, et σ_{xy} , σ_{yx} , σ_{xz} , σ_{zx} , σ_{yz} , σ_{zy} (ou τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{xz} , τ_{zx} , τ_{yz} , τ_{zy}) représentent les contraintes tangentielles.

La contrainte normale sur la facette \vec{n} en M est égale à :

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{n\}^T [\sigma(M)] \{n\}$$

3.5 Réciprocité des contraintes tangentielles

Considérons un parallélépipède élémentaire infiniment petit.

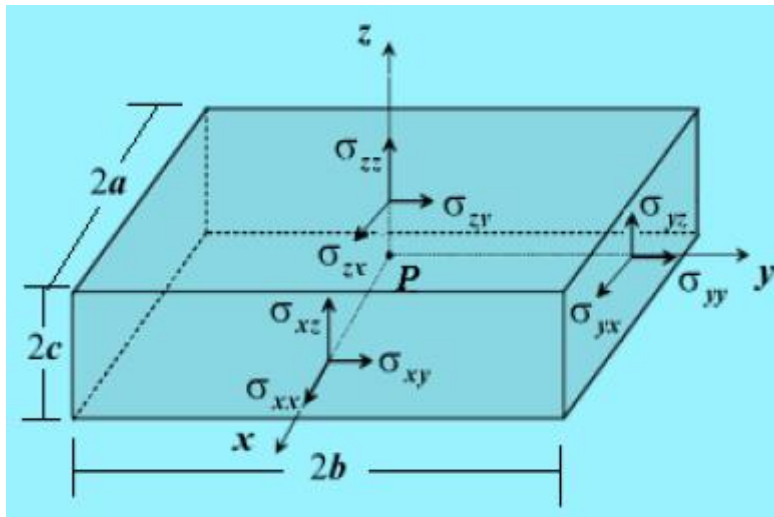


Figure 3.8 : Réciprocité des contraintes tangentielles.

Equilibre en rotation (réciprocité des contraintes tangentielles) :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \rightarrow \begin{cases} \sigma_{xy} = \sigma_{yx} \\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \end{cases}$$

Le tenseur des contraintes est donc symétrique :

$$[\sigma] = [\sigma]^T$$

3.6 Equations d'équilibre

Considérons un sous-domaine fermé de volume V et de surface S à l'intérieur d'un corps en équilibre. Pour un équilibre statique, la conservation de la quantité de mouvement linéaire implique que les forces agissant sur cette région sont équilibrées et que la force résultante doit donc être nulle. Ce concept peut être exprimé en notation indicielle comme suit :

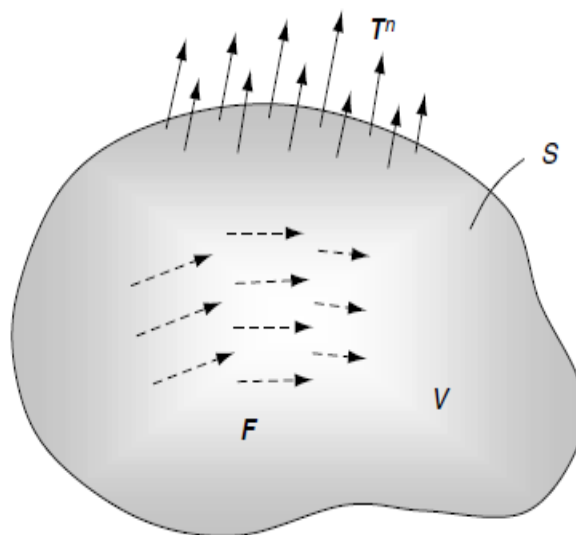


Figure 3.9 : Les forces agissant sur une portion arbitraire d'un continuum.

$$\iint_S T_i^n dS + \iiint_V F_i dV = 0$$

D'où :

$$\iint_S \sigma_{ji} n_j dS + \iiint_V F_i dV = 0$$

Ce qui nous donne :

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0$$

Ou bien :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0$$

Ces équations sont appelées équations d'équilibre et doivent être satisfaites en tout point du corps.

3.7 Contraintes et directions principales

Si en M une facette \vec{n} telle que le vecteur contrainte soit colinéaire à \vec{n} , le vecteur de cisaillement est nul sur cette facette, et le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ vérifie la relation suivante :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n}$$

Soit :

$$[\sigma(M)]\{n\} = \sigma_n \{n\}$$

σ_n est alors valeur propre du tenseur des contraintes et \vec{n} est le vecteur propre associé.

Dans le repère principal $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Avec : $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

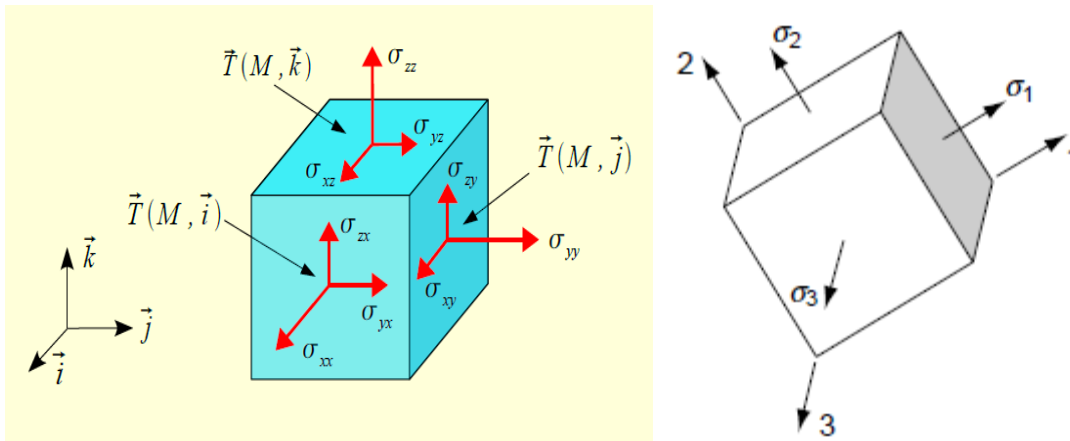


Figure 3.10 : Contraintes et directions principales.

La détermination des contraintes principales implique la diagonalisation de la matrice des contraintes. Il convient donc de trouver les solutions de l'équation suivante :

$$\det(\sigma(M) - \lambda I) = 0 \rightarrow -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0$$

I₁, I₂ et I₃ sont les **invariants** du tenseur des contraintes :

$$I_1 = \text{tr}[\sigma] = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} ((\text{tr}[\sigma])^2 - \text{tr}[\sigma^2]) = \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{xx} \sigma_{zz} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2 \\ &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \det[\sigma] = \sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} + 2 \sigma_{xy} \sigma_{xz} \sigma_{yz} - \sigma_{xx} \sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy} \sigma_{xz}^2 - \sigma_{zz} \sigma_{xy}^2 \\ &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned}$$

3.8 Tenseur déviateur des contraintes

Il est toujours possible d'exprimer le tenseur des contraintes comme la somme d'un tenseur sphérique et d'un tenseur déviateur de trace nulle.

$$[\sigma(P)] = \sigma_m I + S \text{ avec } \begin{cases} \text{tr}(S) = 0 \\ \sigma_m = \frac{I_1}{3} \end{cases}$$

$\sigma_m I$: est le tenseur hydrostatique.

S : est le tenseur déviateur des contraintes

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{pmatrix}$$

3.9 Représentation graphique (Cercle de Mohr)

Dans un état bidimensionnel, le tenseur de contrainte est définie par :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Considérons un élément de matériau bidimensionnel autour du point O. En utilisant l'équilibre des forces, on obtient :

$$\sigma_n = 1/2 (\sigma_x + \sigma_y) + 1/2 (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_n = -1/2 (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

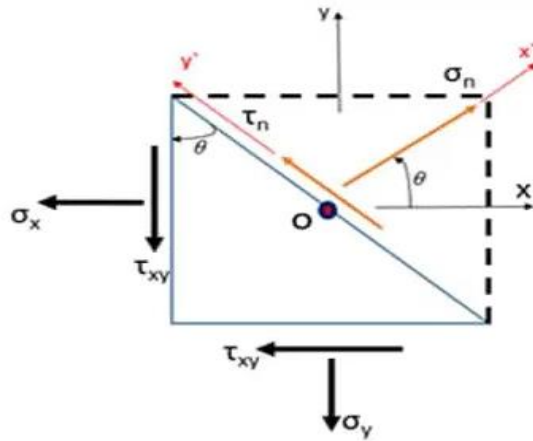


Figure 3.11 : *Un élément bidimensionnel.*

Le tenseur de contrainte s'écrit dans le repère (o, x', y') par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Avec : $\sigma_{x'} = \sigma_n$ and $\tau_{x'y'} = \tau_n$

On obtient :

$$\sigma_n = 1/2 (\sigma_x + \sigma_y) + 1/2 (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_n = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin\theta \cos\theta + \tau_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

Avec :

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta, \sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$$

Éliminons le paramètre 2θ , on obtient :

$$\sigma_n = 1/2 (\sigma_x + \sigma_y) + 1/2 (\sigma_x - \sigma_y) + \tau_{xy}$$

$$\tau_n = -1/2 (\sigma_x - \sigma_y) + \tau_{xy}$$

Ces équations peuvent être réarrangées comme suit :

$$[\sigma_n - 1/2 (\sigma_x + \sigma_y)]^2 + \tau_n^2 = [1/2 (\sigma_x - \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2$$

Cette équation présente l'équation du cercle de Mohr du centre C $((\sigma_x + \sigma_y)/2, 0)$ et de rayon R.

Avec :

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

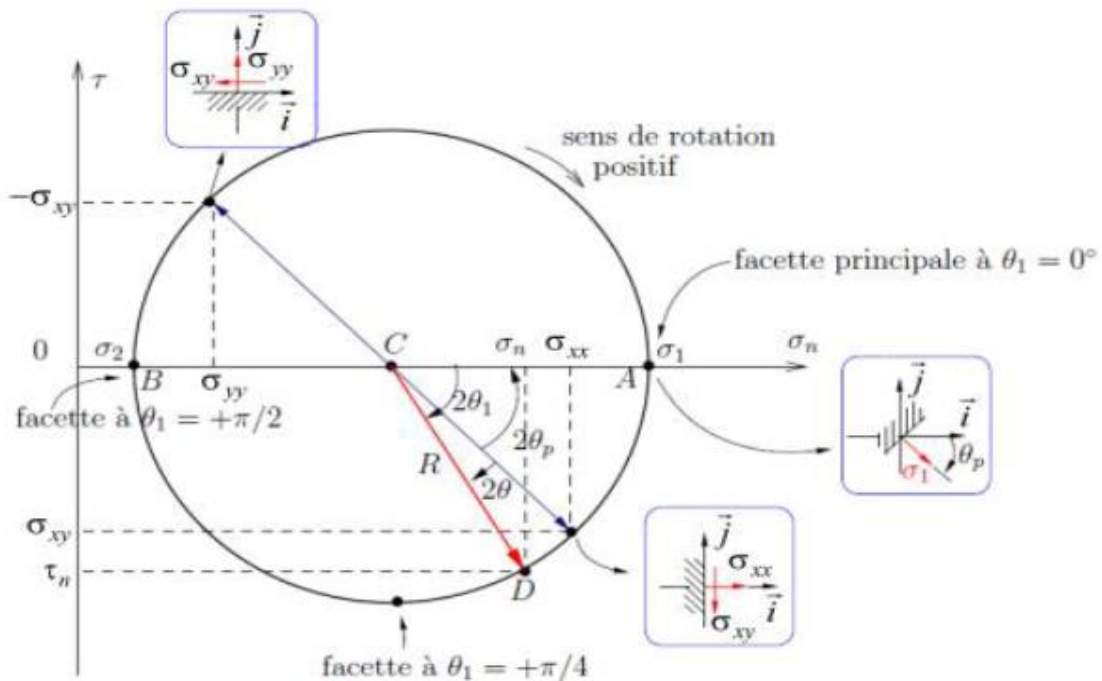


Figure 3.12 : Cercle de Mohr.

D'après ce cercle, on peut calculer les contraintes et les directions principale par :

$$OC = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

$$R = \sqrt{(\sigma_{xx} - OC)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$\sigma_1 = OC + R$$

$$\sigma_2 = OC - R$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - OC} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

La contrainte de cisaillement maximale est exprimée par la formule suivante :

$$\tau_{\max} = \max|\vec{\tau}_n| = \frac{1}{2}|\sigma_{\max} - \sigma_{\min}|$$

Le cercle de Mohr pour un état général de contraintes en trois dimensions est représenté par :

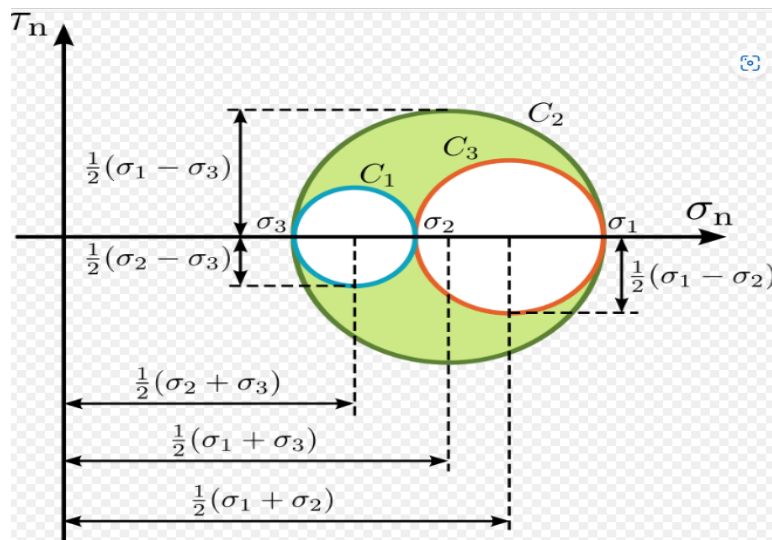
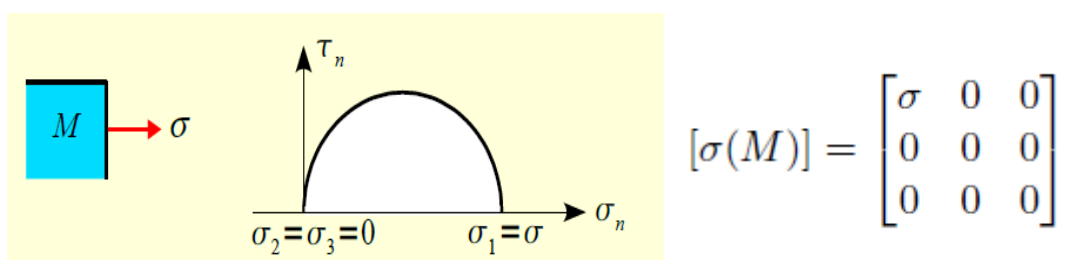


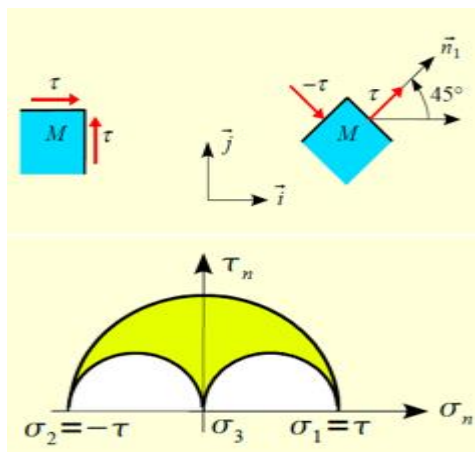
Figure 3.13 : Le cercle de Mohr pour en trois dimensions.

3.10 Etats des contraintes particuliers

a) Etat de contrainte uniaxial (traction simple)

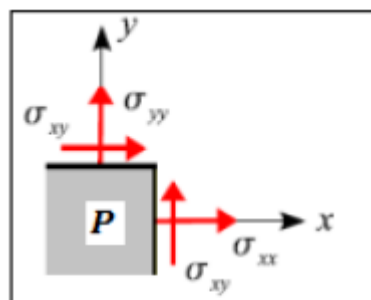


b) Etat de cisaillement simple

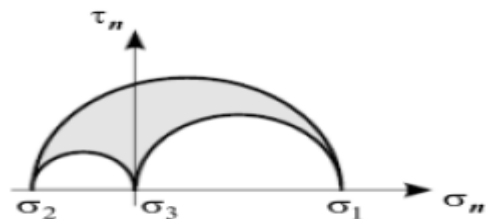


$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Etat de contrainte plan



$$[\sigma(P)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



3.11 Equation d'équilibre en coordonnées polaires

L'équation d'équilibre de l'élément abcd (figure 3.12) dans la direction radiale et circonférentielle en tenant compte les composantes de force de volume \$F_r\$ et \$F_\theta\$ est :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0 \quad (2.61)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0 \quad (2.62)$$

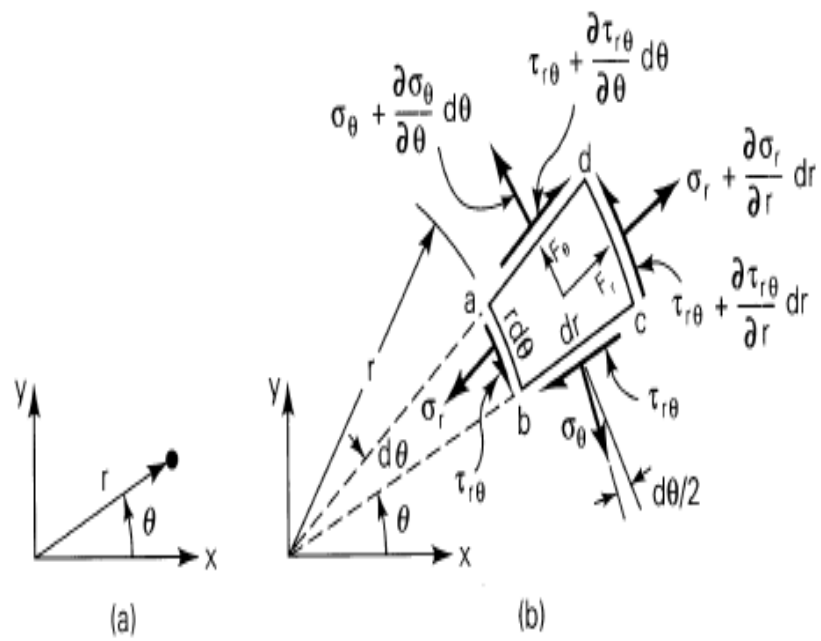


Figure 3.14 : *Un élément secteur en coordonnées polaires.*