Chapitre 4: Théorie de l'état des déformations

4.1 Définition :

Sous l'effet des forces appliquées, les points d'un solide se déplacent. Cela entraîne, pour des fibres infiniment petites de matière, des changements de longueur et des variations d'angle, que l'on appelle des déformations.

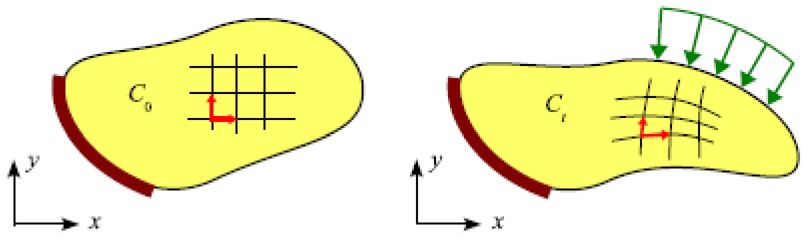

Figure 4.1 : *Déformations dans un solide.*

Le volume occupé par le solide à l'instant t est désigné par C_t et est appelé la configuration courante. La configuration initiale, notée C_0, correspond à la configuration de référence.

La figure (4.2) présente la déformation bidimensionnelle d'un élément rectangulaire :

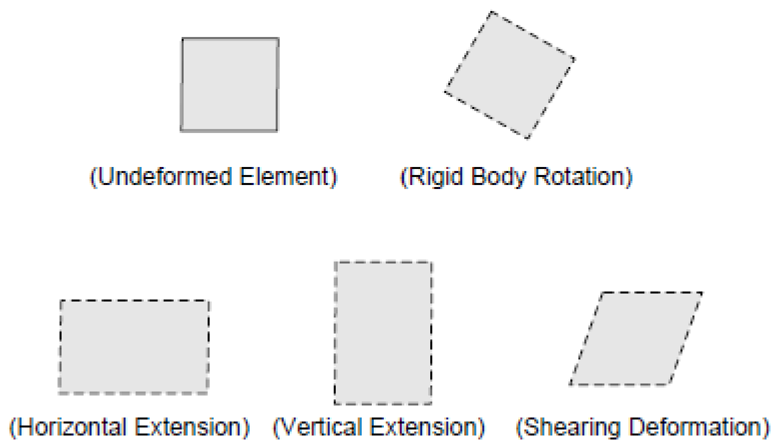

Figure 4.2 : *La déformation bidimensionnelle d'un élément rectangulaire.*

Considérons le point M_0 de la configuration initiale qui se transforme en point M dans la configuration courante, donc :

$$\overrightarrow{OM_0} = \vec{x}_0 = x_0\,\vec{\imath} + y_0\,\vec{\jmath} + z_0\,\vec{k}$$

$\overrightarrow{OM} = \vec{x} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$

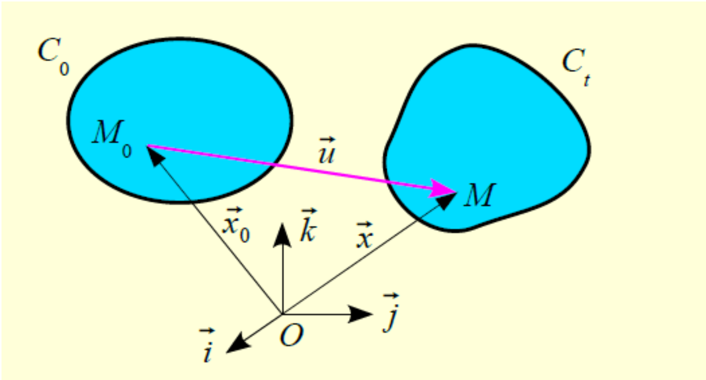

Figure 4.3 : *Transformation d'un point.*

Le vecteur déplacement du point M_0 s'écrit :

$$\vec{u}(M_0;t) = \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = u\,\vec{\imath} + v\,\vec{\jmath} + w\,\vec{k}$$

Avec : u, v et w sont des fonctions continues et d´dérivables de x_0, y_0 et z_0.

Donc, on peut écrire :

$$\begin{Bmatrix} x(x_0,y_0,z_0;t) \\ y(x_0,y_0,z_0;t) \\ z(x_0,y_0,z_0;t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u(x_0,y_0,z_0;t) \\ v(x_0,y_0,z_0;t) \\ w(x_0,y_0,z_0;t) \end{Bmatrix}$$

4.2 Tenseur de déformation

Considérons un élément de matériau rectangulaire, infinitésimal et bidimensionnel, de dimensions dx × dy, qui, après déformation, prend la forme d'un losange. La déformation est décrite par le champ de déplacement u. D'après la géométrie de la figure (4.4), nous avons :

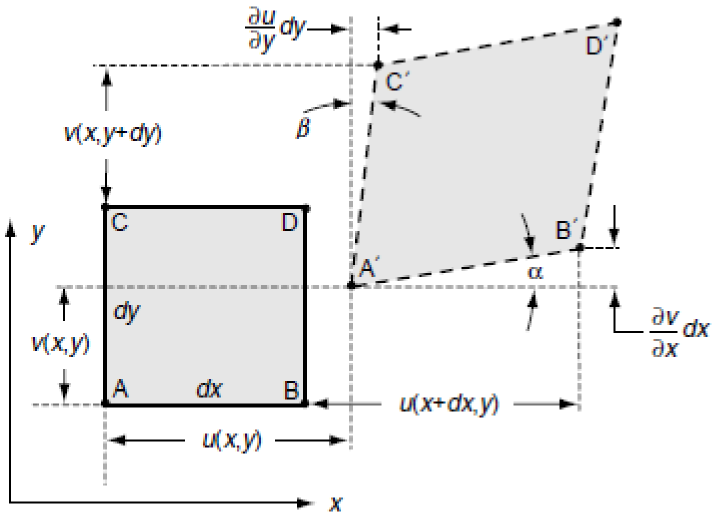

Figure 4.4 : *La déformation d'un élément infinitésimal et bidimensionnel.*

La déformation normale (dilatation ou allongement relatif) dans la direction x peut être écrite par :

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB}$$

Avec :

$$A'B' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2} = \sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}\,dx \approx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx$$

En posant AB=dx, on obtient :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

De façon similaire, la déformation normale dans la direction y est donnée par :

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

La déformation de cisaillement (glissement ou distorsion) est définie comme le changement d'angle entre deux directions orthogonales. D'après la figure (4.4), la distorsion par rapport aux directions x-y est :

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \angle C'A'B' = \alpha + \beta$$

Pour des petites déformations, on aura :

$$\gamma_{xy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y}dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y}dy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

En considérant un comportement similaire dans les directions y-z et x-z, on obtient :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Ou bien :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})^T]$$

Le tenseur des déformations, est un tenseur symétrique d'ordre 2 qui s'écrit :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \epsilon_{yy} & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

4.3 Déformation pure et rotation pure

Chaque tenseur de second ordre, peut se décomposer en une partie symétrique (ε_{ij}) et une partie antisymétrique (w_{ij}). Donc on peut écrire :

$$(u_{i,j}) = (\varepsilon_{ij}) + (\omega_{ij}).$$

Avec :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}),$$

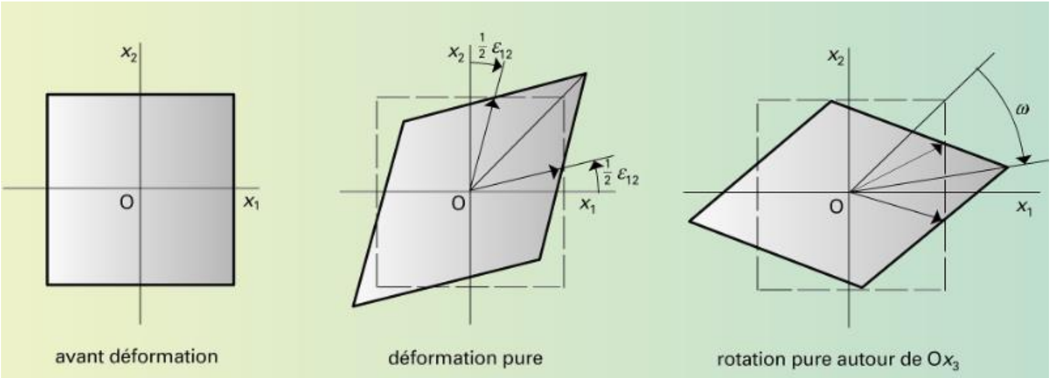

Figure 4.5 : *Déformation pure et rotation pure.*

4.4 Déformations et directions principales

Il existe une base orthonormée ($\vec{x}_I$, $\vec{x}_{II}$, $\vec{x}_{III}$) dans laquelle le tenseur des déformations est représenté par une matrice diagonale :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{pmatrix}$$

Les directions ($\vec{x}_I$, $\vec{x}_{II}$, $\vec{x}_{III}$) sont appelées directions principales, et les déformations ε_I, ε_{II} et ε_{III} sont les déformations principales.

Avec :

$$\boldsymbol{\varepsilon_I \geq \varepsilon_{II} \geq \varepsilon_{III}}$$

Les déformations principales correspondent aux valeurs propres du tenseur, et les directions principales sont les vecteurs propres associés. Les valeurs propres λ satisfont l'équation suivante :

$$\det(\varepsilon - \lambda I) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$$

Les invariants I_1, I_2, I_3 du tenseur des déformations sont présentés par :

$$I_1 = tr[\varepsilon] = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$I_2 = \left(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}{}^2 + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{23}{}^2 + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} - \varepsilon_{13}{}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{ik}{}^2\right)$$

$$I_3 = \det(\varepsilon_{ij})$$

Il est toujours possible d'exprimer le tenseur des déformations comme la somme d'un tenseur sphérique et d'un tenseur déviateur :

$$\varepsilon = \varepsilon_m I + s^{\bullet} \quad avec \begin{cases} tr(s^{\bullet}) = 0 \\ \varepsilon_m = \dfrac{I_1}{3} \end{cases}$$

$s^{\bullet}$ représente Le tenseur déviateur des déformations:

$$s^{\bullet} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_m & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} - \varepsilon_m & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} - \varepsilon_m \end{pmatrix}$$

4.5 Représentation graphique de l'état de déformation en un point

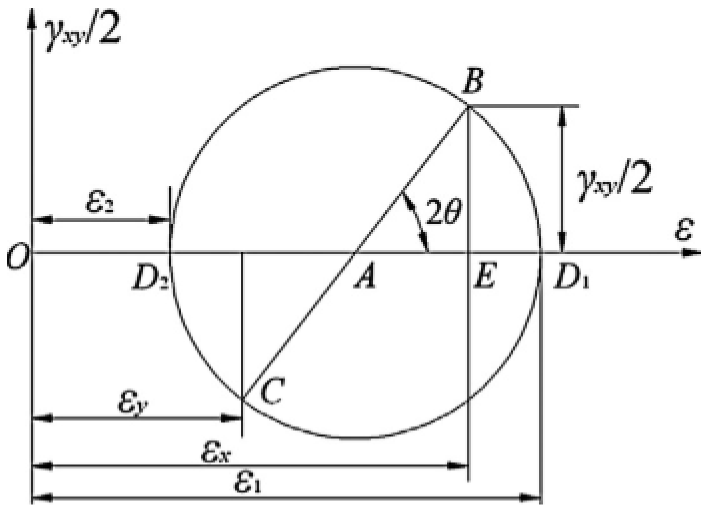

Figure 4.6 : *Cercle de Mohr*

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \qquad \tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

4.6 Dilatation volumique

La déformation volumique, également appelée déformation de volume, est la variation relative du volume, résultant de la dilation ou de la compression ; c'est le premier invariant de déformation ou la trace du tenseur de déformation:

$$\delta = \frac{\Delta V}{V_0} = I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

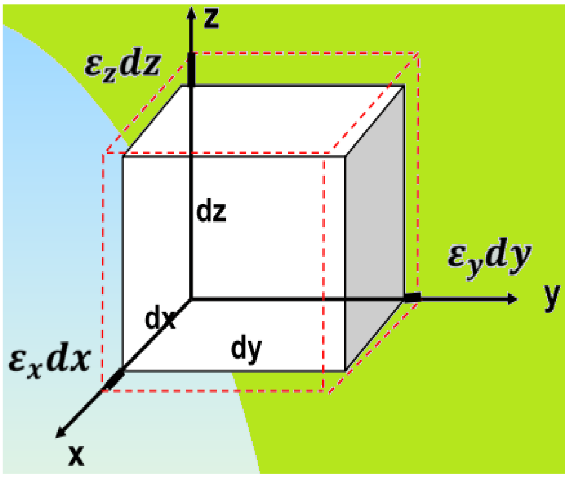

Figure 4.7 : *Changement de volume et de forme*

4.7 Les équations de compatibilité

Comme mentionné précédemment, les déplacements peuvent être déterminés à partir des déformations par intégration, en tenant compte d'un mouvement rigide. Dans le cas bidimensionnel, il y a trois relations entre les déformations et les déplacements, mais seulement deux composants de déplacement. Cela signifie que les déformations ne sont pas indépendantes, mais qu'elles sont interconnectées d'une certaine manière. Ces relations entre les déformations sont appelées conditions de compatibilité.

Les équations de compatibilité sont données par :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$
$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial y \partial z}$$
$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 \epsilon_{zx}}{\partial z \partial x}$$
$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z}\right)$$
$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z}\right)$$
$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z}\right)$$

4.8 Relations entre les déplacements et les déformations en coordonnées polaires

On dénote le déplacement radial et tangentiel par les symboles u et v respectivement, et les déformations radiale et tangentielle par ε_r et ε_θ respectivement, et la déformation angulaire par $\gamma_{r\theta}$. Ces déformations sont exprimées en fonction des déplacements u et v. En considérant la déformation d'un élément représenté sur les figure 4.8 où ABCD représente un petit élément de dimensions *rdθ* et *dr* sans chargement et A'B'C'D' représente l'élément après déformation.

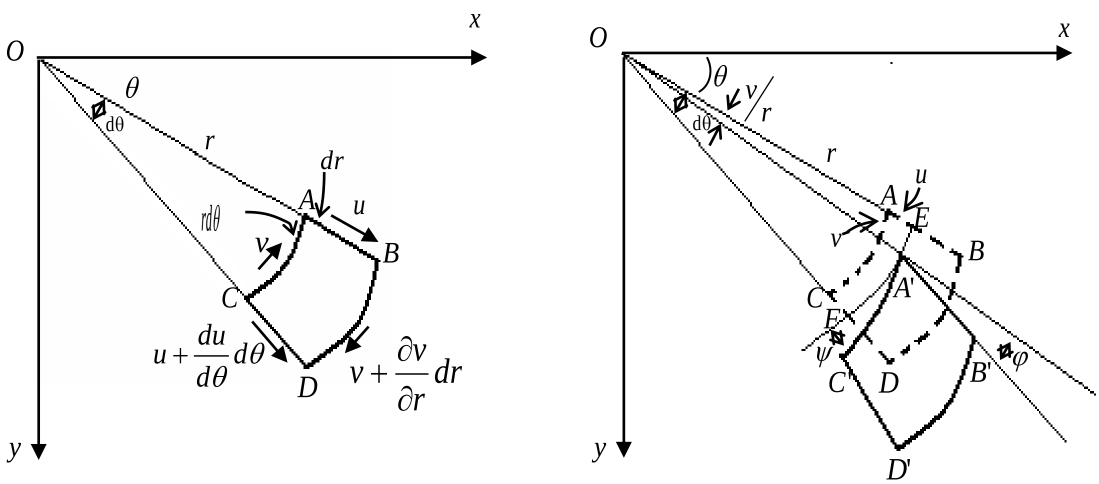

Figure 4.8 : *déformation d'un élément secteur.*

Les déformations ε_r et ε_θ sont exprimées par les relations suivantes :

$$\varepsilon_r = \frac{\overline{A'}\overline{B'} - \overline{A}\overline{B}}{AB} = \frac{dr + \left[u + (\frac{\partial u}{\partial r})dr \right] - u - dr}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\overline{A'}\overline{C'} - \overline{A}\overline{C}}{AC} = \frac{\overline{E}\overline{F} + (\frac{\partial v}{\partial \theta})d\theta}{rd\theta} = \frac{(1+\frac{u}{r})rd\theta + (\frac{\partial v}{\partial \theta})d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{1}{r}(u + \frac{\partial v}{\partial \theta})'$$

La déformation angulaire $\gamma_{r\theta}$ est due à la distorsion de l'angle BAC. Le changement de cet angle est la somme de deux petites angles φ et ψ où :

$$\varphi = \frac{v + (\frac{\partial v}{\partial r})dr - v}{dr} - \frac{v}{r} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

$$\psi = \frac{u + (\frac{\partial u}{\partial \theta})d\theta - u}{rd\theta} = \frac{1}{r} \times \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{r\theta} = \varphi + \psi = \frac{\partial u}{r\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

Les équations de déformations deviennent, alors :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

4.9 L'équation de compatibilité en coordonnées polaires :

L'équation de compatibilité en coordonnées polaire s'écrit:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial r\,\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial^2 \theta} - r\frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial^2 r} - 2\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} = 0$$