Introduction aux probabilités 1

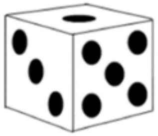
Expérience aléatoire

Ce sont les expériences qui entrainent des résultats aléatoires lorsqu'on répète l'expérience dans les mêmes conditions.

- On ne peut pas prévoir leurs résultats d'avance.

- Les résultats dépendent directement du hasard,

Exemples : jeu pile ou face, jet de dé



La théorie des probabilités

La théorie de probabilité ne permet pas de prédire quel résultat va se réaliser mais quelle chance à chaque résultat (issue) de se réaliser.

- Les probabilités sont l’étude de hasard et de l’incertain.

La théorie de probabilité contient trois éléments essentiels:

1) L’univers,
2) Les évènements,
3) La mesure de probabilité,

Univers

L’ensemble de tous les résultats possibles d’une expérience aléatoire noté Ω

- On appelle aussi ensemble fondamentale d’une expérience aléatoire.

Exemples

1) **<u>Expérience aléatoire:</u>** on lance une pièce de monnaie.

$$\Omega = \{\text{Pile} , \text{Face}\}$$

2) **<u>Expérience aléatoire:</u>** on lance un dé.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

3) **<u>Expérience aléatoire:</u>** on lance une pièce de monnaie et un dé simultanément.

$$\Omega = \{(x, y) \ /x \in \{pile, face\}, \qquad y = \overline{1,6}\}$$

$$\Omega = \{(\text{Pile}, 1), (\text{Pile}, 2), (\text{Pile}, 3), (\text{Pile}, 4), (\text{Pile}, 5), (\text{Pile}, 6), (\text{Face}, 1), (\text{Face}, 2), (\text{Face}, 3), (\text{Face}, 4), (\text{Face}, 5), (\text{Face}, 6)\}$$

Univers

Exemples

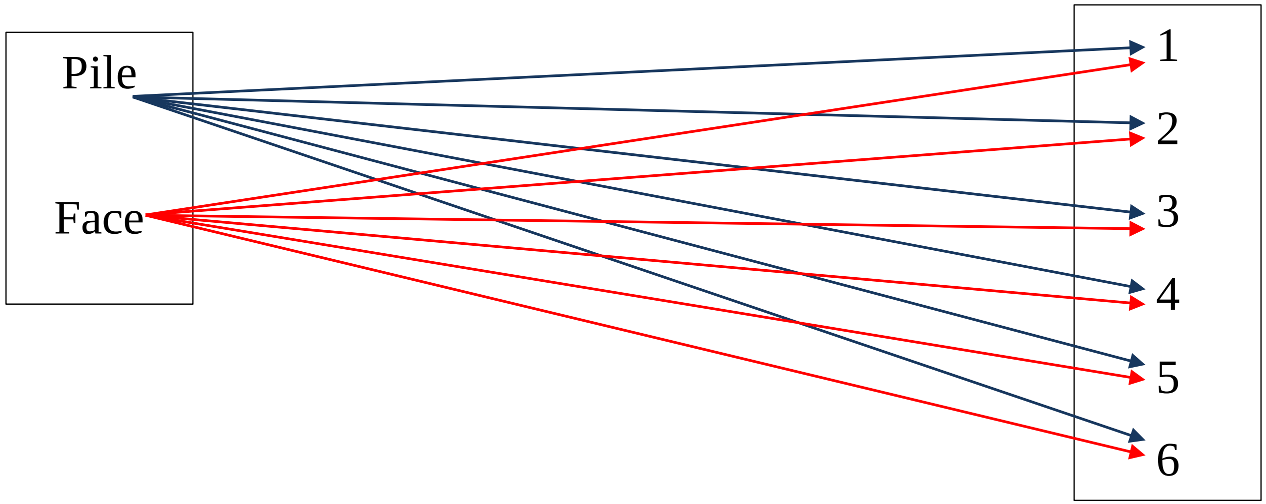
3) **<u>Expérience aléatoire:</u>** on lance une pièce de monnaie et un dé simultanément.

$$\Omega = \{(x, y) \ /x \in \{pile, face\}, \qquad y = \overline{1,6}\}$$

$$\Omega = \{(\text{Pile}, 1), (\text{Pile}, 2), (\text{Pile}, 3), (\text{Pile}, 4), (\text{Pile}, 5), (\text{Pile}, 6)$$
$$(\text{Face}, 1), (\text{Face}, 2), (\text{Face}, 3), (\text{Face}, 4), (\text{Face}, 5), (\text{Face}, 6)\}$$

Résultats possible du jet de pièce de monnaie

Résultats possible du jet de dé



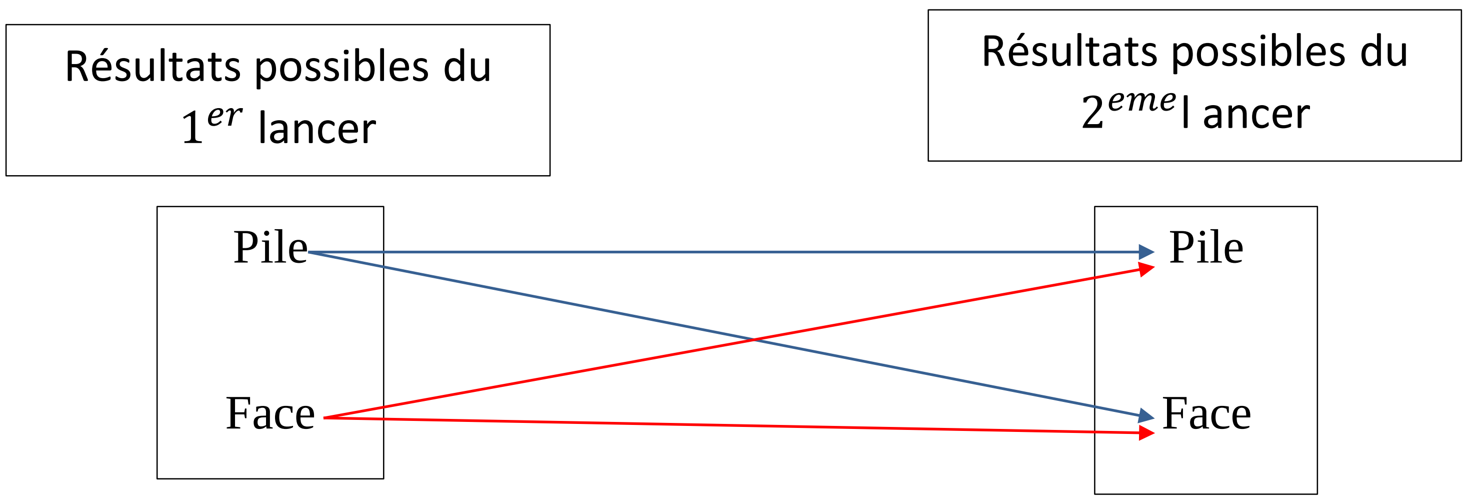
Univers

Exemples

4) **<u>Expérience aléatoire</u>:** On jette une pièce de monnaie 2 fois.

$$\Omega = \{xy \ / \ x \in \{\text{pile}, \text{face}\}, y \in \{\text{pile}, \text{face}\}\}$$

$$\Omega = \{ \text{ Pile Pile}, \quad \text{Pile Face}, \quad \text{Face Pile}, \quad \text{Face Face } \}$$



Evènement

Un évènement est un sous-ensemble quelconque A_i de Ω dont les éléments ayant une propriété donnée.

Exemples

1) **Expérience aléatoire** : on lance un dé

A: " obtention un nombre pair"

B: " obtention un nombre impair"

C: "obtention $un\ nombre\ inférieur$ à 6"

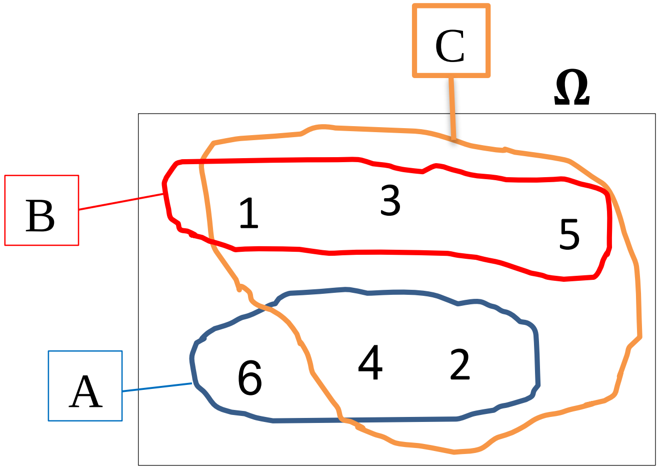


Diagramme de Venn

2) **Expérience aléatoire** : jeter deux pièces de monnaie simultanément.

$$\Omega = \{(\text{Pile}, \text{Pile}), (\text{Pile}, \text{Face}), (\text{Face}, \text{Pile}), (\text{Face}, \text{Face})\}$$

Si L'évènement $A = \{(\text{Pile}, \text{Pile}), (\text{Pile}, \text{Face})\}$ alors on définit A comme suit :

A: " La 1^{er} pièce de monnaie montre pile "

Evènement

3) Expérience aléatoire : jeter deux dés , alors :

$\Omega = \{(x, y) \ / x, y = \overline{1,6}\ \}$ = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), …

…………………………………….., (6, 6)} tel que card(Ω) = 6*6 = 36

Si L'évènement $A = \{(1, 6), (2, 5)\ , (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}\ Alors$

A: " La somme de résultats des deux dés égale à 7"

Réalisation d'un évènement :

Si le résultat d'une expérience aléatoire est compris dans A, on dit que l'évènement A est réalisé.

Exemple :

Expérience aléatoire : on lance un dé

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

A: " obtention un nombre pair"

B: " obtention un nombre impair"

C: "obtention $un\ nombre\ inférieur$ à 6"

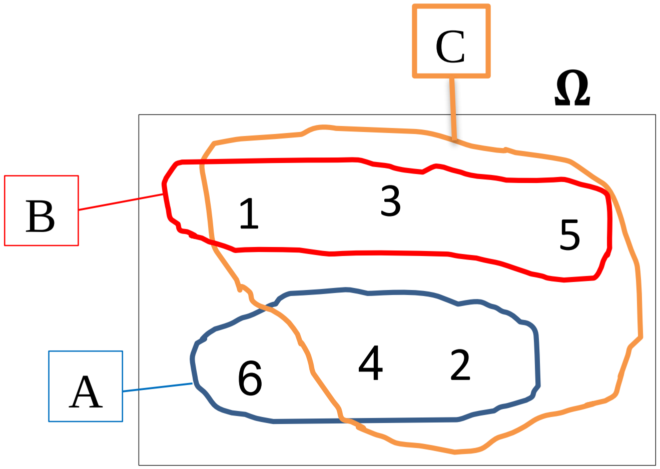


Diagramme de Venn

- Si après le jet de dé, on obtient la face 4 alors on dit que l'évènement A est réalisé ; ainsi l'évènement C .

Evènements particuliers

1) Si l'évènement $A = \Omega$, alors on dit que A est **l'évènement certain**

Exemple :

$Si \quad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et A : " obtention d'un nombre inférieur à 7 " alors

$A = \Omega$ et on dit que A est certain .

2) Si l'évènement $A = \phi$, alors on dit que A est **l'évènement impossible** .

Exemple :

$Si \quad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et A : " obtention de la face 7 " alors $A = \phi$ et on dit que A est impossible .

3) Si l'évènement A constitue d'un seul élément de Ω on dit que A est **l'évènement élémentaire**, il se réalise d'une seule façon .

Exemple :

$Si \quad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $A = \{2\}$, on dit que A est l'évènement élémentaire

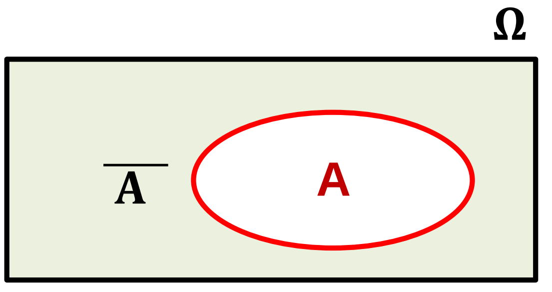
Complémentaire

Soit **A** un évènement de **Ω**, on appelle complémentaire de **A** par rapport à ***Ω***, noté $\overline{\mathbf{A}}$, le sous-ensemble constitue de tous les éléments qui n'appartient pas à **A**.

$\overline{A} = \{\omega \ / \ \omega \in \Omega \text{ et } \omega \notin A\}$ tel que

$$A \cap \overline{A} = \phi \quad \text{et}$$

$$A \cup \overline{A} = \Omega$$



Exemple :

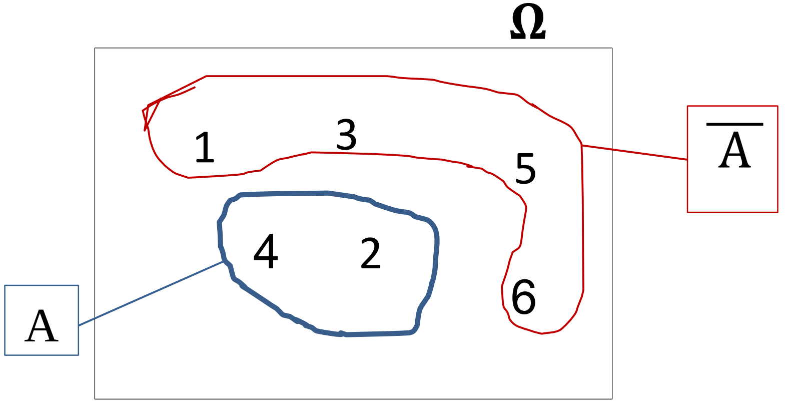


Diagramme de Venn

Evénements incompatibles ou disjoints

Deux évènements A et B sont disjoints (incompatibles) s’ils n’ont aucun élément en commun.

$$A \cap B = \phi$$

Exemple :

Expérience aléatoire : on lance un dé

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A: " obtention un nombre pair"

B: " obtention un nombre impair"

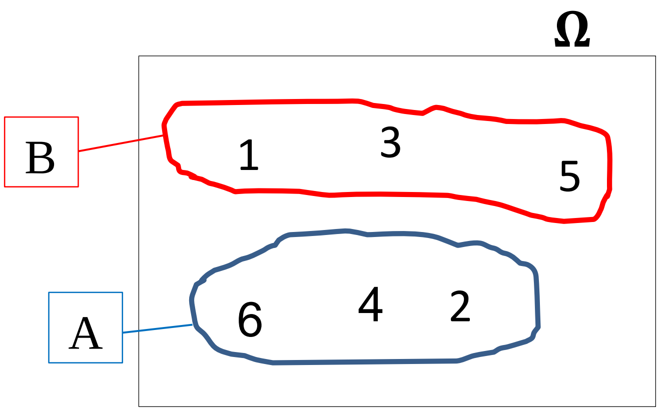


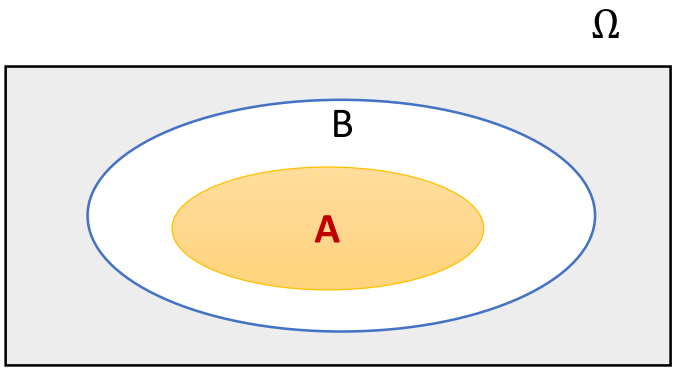
Diagramme de Venn

- On a $A \cap B = \phi$ alors A et B sont disjoints ou incompatibles

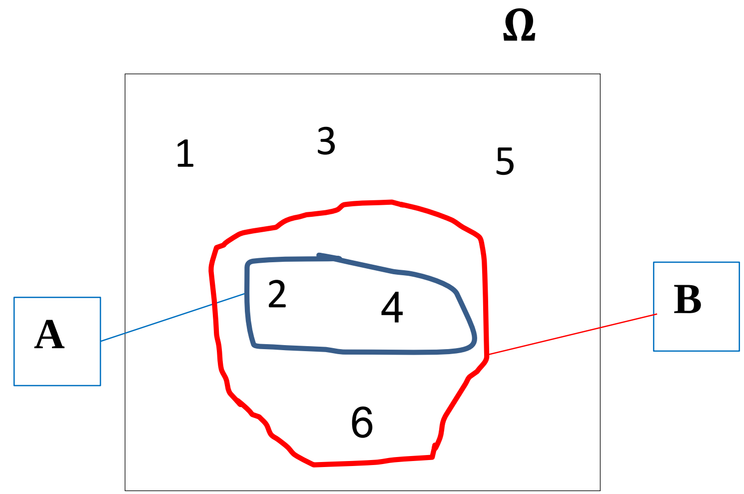
Relation et opérations sur les évènements

Inclusion $(A \subset B)$

$$A \subset B \ \ si \ \forall\, \omega \in \mathrm{A} \ \Rightarrow \ \omega \in B$$

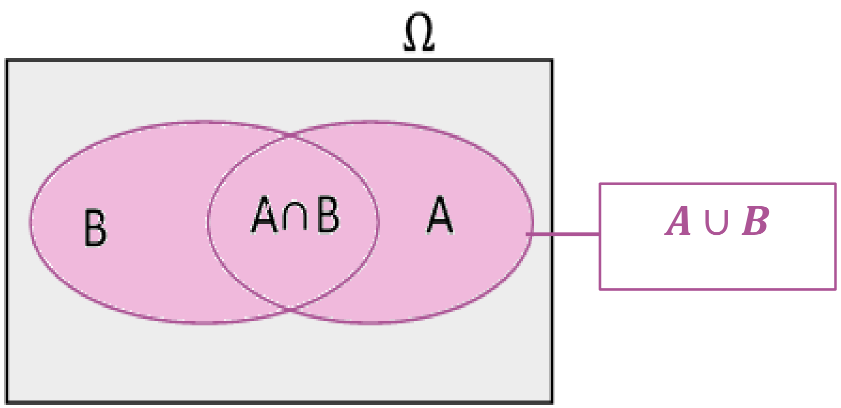


Exemple



Union $(A \cup B)$

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \ / \ \omega \in A \ ou \ \omega \in B\}$$



Exemple: si $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A " : obtient un nombre pair"

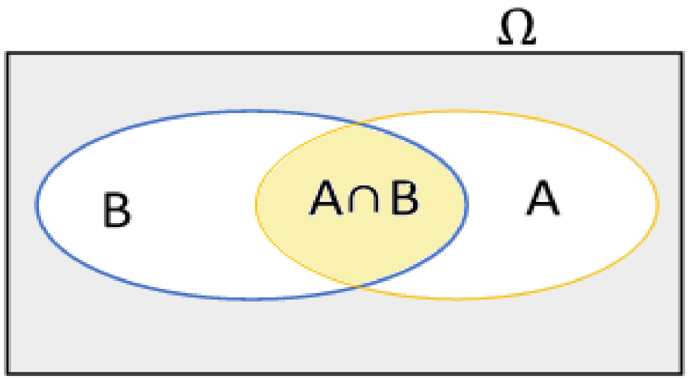
B " :obtient un nombre supérieur ou égale 3"

$A = \{\, 2, 4, 6\}$ et $B = \{\, 3, 4, 5, 6\}$ alors

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Intersection $(\boldsymbol{A \cap B})$

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega \ / \ \omega \in A \ et \ \omega \in B\}$$



Exemple: si $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A " : obtient un nombre pair"

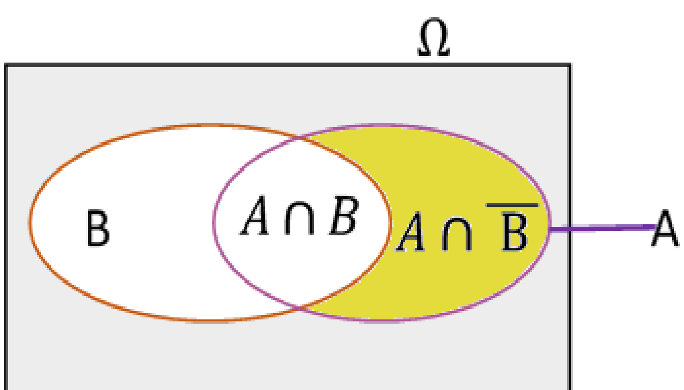
B " :obtient un nombre multiple de 3"

$A = \{\ 2, 4, 6\}$ et $B = \{\ 3, 6\}$ alors

$A \cap B = \{6\}$

Différence $(\boldsymbol{A \backslash B})$

$$\mathrm{A \backslash B = A \cap \overline{B} = \{\omega \in \Omega \ / \ \omega \in A \ et \ \omega \notin B\}}$$



Exemple: si $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A " : obtient un nombre pair"

B " :obtient un nombre multiple de 3"

$A = \{\ 2, 4, 6\}$ et $B = \{\ 3, 6\}$ alors

$A \backslash B = A \cap \overline{\mathrm{B}} = \{2{,}4\}$

Exercice 1 :

On lance une paire de dés, soit les évènements suivants :

A: " la somme des points est supérieur à 15 "

B: " la somme des points inférieur à 13 "

C: " la somme des points est égale à 2 "

- Décrire chacun des évènements.