Equiprobabilité
(loi de probabilité uniforme discrète)

Système complet d'événement

Etant donné un univers Ω, on appelle système complet d'événements toute <u>partition</u> $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de l'ensemble Ω.

Autrement dit les A_i sont :

a) des événements (non impossibles) deux à deux incompatibles; $\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j,\ A_i \cap A_j = \phi$

b) de réunion égale à Ω ; $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \boldsymbol{A_i} = \boldsymbol{\Omega}$

<u>Exemple :</u>

Lorsqu'on jette un dé, les événements suivants forment-ils un système complet ?

Soit **Ω** ={1, 2, 3, 4, 5, 6}

1) A_1={2, 3}, A_2={1, 4, 5}, A_3={6, 3}? ✗

2) A_1={2}, A_2={1, 4, 5}, A_3={6, 3}? ✓

3) A_1={2, 3}, A_2={1, 4, 6}? ✗

Equiprobabilité (loi de probabilité uniforme discrète)

Sous cette hypothèse on admet que tous les résultats envisageables (possibles) ont la même probabilité d'apparition.

Définition d'équiprobabilité:

Soit (Ω, F, P) un espace probabilisé tel que Ω est un ensemble fini :

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}, \omega_n\} \Longrightarrow \mathrm{Card}(\Omega) = \mathrm{n} < \infty$.

Les $\{w_i\}$ constituent un système complet de Ω. alors on dit que P est l'équiprobabilité sur Ω si et seulement si :

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n,\ \mathrm{P}(\{w_i\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

Equiprobabilité (loi de probabilité uniforme discrète)

Démonstration

Supposons que tous les événements w_i ont la même probabilité (on dit qu'ils sont équiprobables ou uniformes) i. e, $\forall\, i = \overline{1, n}$, $\mathrm{P}(\{w_1\}) = \mathrm{P}(\{w_2\}) = \cdots = \mathrm{P}(\{w_n\}) = p$

On a $\Omega = \{\omega_1, \ \omega_2, \dots, \omega_\mathrm{n}\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{w_i\}$, et les $\{w_i\}$ constituent un système complet de Ω.

Et $P(\Omega) = 1 \ \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{w_i\}\right) = 1 \Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} P(\{w_i\}) = 1 \ \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} p = 1 \ \Rightarrow \ n * p = 1$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{n}$$

$$Donc, \ \forall\, i = 1, 2, \dots, n \quad \mathrm{P}(\{w_i\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

Equiprobabilité (loi de probabilité uniforme discrète)

<u>Exemple 1 :</u>

Lorsqu'on jette un dé <u>bien équilibré</u> (non truqué ou non pipé)

la probabilité d'avoir chaque face 1, 2, 3, 4, 5, 6 est :

$$\mathrm{P}(\{1\}) = \mathrm{P}(\{2\}) = \mathrm{P}(\{3\}) = \mathrm{P}(\{4\}) = \mathrm{P}(\{5\}) = \mathrm{P}(\{6\}) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

<u>Exemple 2 :</u>

On lance une pièce de monnaie <u>bien équilibrée</u>

la probabilité d'obtenir face ou pile est :

$$\mathrm{P}(\{pile\}) = \mathrm{P}(\{face\}) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{1}{2}$$

Equiprobabilité (loi de probabilité uniforme discrète)

Proposition

Soit (Ω, F, P) un espace probabilisé où *P* est l’´équiprobabilité sur Ω alors :

$$\forall\, \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}, \qquad \boldsymbol{P(A)} = \frac{\boldsymbol{card(A)}}{\boldsymbol{card(\Omega)}} = \frac{\boldsymbol{Nombre\ des\ cas\ favorables}}{\boldsymbol{Nombre\ des\ cas\ possibles}}$$

Equiprobabilité (loi de probabilité uniforme discrète)

Démonstration

Soit Ω un ensemble fini (avec $Card\ (\Omega) = n$) et soit un évènement A tel que :

$\mathrm{A} = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mathrm{k}\} \Rightarrow$ Card (A) = k .

On a $\mathrm{P(A)} = \mathrm{P}(\{\omega_1,\ \omega_2, \ldots, \omega_\mathrm{k}\}) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k}\{w_i\}\right)$

$$= \mathrm{P}(\{\omega_1\} + \mathrm{P}(\{\omega_2\}) + \cdots + P(\{\omega_\mathrm{k}\})$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Equiprobabilité (loi de probabilité uniforme discrète)

<u>Exemple:</u>

On jette un dé bien équilibré.

A : " obtenir un nombre pair"

A = {2, 4, 6}

la probabilité d'avoir un chiffre pair est :

$$\mathrm{p(A)} = \frac{\boldsymbol{card(A)}}{\boldsymbol{card(\Omega)}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Système complet d'événement

Remarque :

Souvent on attache plus d'importance à un système complet d'évènements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qu'aux éventualités (i.e. les éléments de Ω) ,

Dans ce cas, on considère les $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ comme de nouvelles éventualités et on utilise la distribution de probabilité associée aux $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Système complet d'événement

Exemple:

Si on joue avec deux dés un blanc et un rouge, l'expérience aléatoire peut être modélisée par l'ensemble des couples (a, b) où a est le numéro obtenu avec le dé blanc et b le numéro obtenu avec le dé rouge.

$$\Omega = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \ / \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} \Rightarrow \mathrm{card}(\Omega) = 6 * 6 = 36.$$

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots\}.$$

Considérons les événements A_i, $2 \leq i \leq 12$ définis par :

A_i : "la somme des points marqués égale i"

Les$(\mathrm{A_i})_{i=\overline{2, 12}}$, forment un système complet d'événements. Si on ne s'intéresse qu'à la somme des points marqués, il est plus commode d'introduire un nouvel espace Ω'

$$\Omega' = \{\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots, \mathrm{A}_{12}\}$$

Système complet d'événement

Le nouvel espace $\Omega' = \{A_2, A_3, \dots, A_{12}\}$, dont les nouvelles éventualités sont les Ai et la distribution de probabilité sur Ω' est donnée par :

$P(A_2) = \frac{1}{36}$, $P(A_3) = \frac{2}{36}$, $P(A_4) = \frac{3}{36}$, $P(A_5) = \frac{4}{36}$, $P(A_6) = \frac{5}{36}$,$P(A_7) = \frac{6}{36}$, $P(A_8) = \frac{5}{36}$,

$P(A_9) = \frac{4}{36}$, $P(A_{10}) = \frac{3}{36}$, $P(A_{11}) = \frac{2}{36}$,$P(A_{12}) = \frac{1}{36}$.