Les expériences aléatoires

On lance 12 dés simultanément, ,,,

Analyse combinatoire

On veut asseoir 5 hommes et 4 femmes dans une rangée de 9 chaises.
Combien y a-t-il de possibilités de le faire ?

Il y a 362880 manières !

Combien existe-t-il de plaques minéralogiques à 7 caractères, si les deux premiers sont des lettres et les 5 autres des chiffres ?

Il y a 67600000 matricules !

Analyse combinatoire

A.C est le dénombrement des dispositions ou regroupement que l'on peut former à partir des éléments d'un ensemble fini.

<u>Disposition :</u>

Est l'ensemble formé d'éléments choisi parmi ***n*** élément d'un ensemble fini.

<u>Exemple 1</u>

Soit l'ensemble E = {1, 2, 3} , combien de dispositions de 2 éléments peut-on construire à partir de cet ensemble ?

$$\underbrace{\boxed{\textbf{?}}}_{3} * \underbrace{\boxed{\textbf{?}}}_{3} = 9 \text{ dispositions}$$

- On peut construire 9 nombre à partir des chiffres 1, 2, 3, qui sont :

11, 12, 21, 13, 31, 22, 23, 32, 33.

Analyse combinatoire

Types de disposition:

1) **Disposition sans répétition:** Est une disposition où un élément peut apparaitre 0 ou 1 fois.

   Exemple :

   Soit l'ensemble E = {1, 2, 3} , combien de disposition de 2 éléments peut-on construire à partir de cet ensemble , sans répétition?

   Dans ce cas les dispositions possibles sont : 12, 21, 31, 13, 23, 32

2) **Disposition avec répétition:** Est une disposition où un élément peut apparaitre plus d'une fois.

   Exemple :

   Soit l'ensemble E = {1, 2, 3} , combien de disposition de 2 éléments peut-on construire à partir de cet ensemble ?

   Dans ce cas les dispositions possibles sont : 11,12, 21, 31, 13, 22, 23, 32 , 33

Analyse combinatoire

3) **<u>Disposition ordonnée:</u>** l'orde des éléments dans une disposition est important.

<u>Exemple :</u>

Soit l'ensemble E = {1, 2, 3} , combien de disposition de 2 éléments peut-on construire à partir de cet ensemble ?

Dans ce cas les dispositions possibles sont : 11,12, 21, 31, 13, 22, 23, 32, 33.

4) **<u>Disposition non ordonnée:</u>** l'orde des éléments dans une disposition n'est pas important.

<u>Exemple :</u>

Soit l'ensemble E de 10 personnes, combien de maniérés peut-on construire un groupe de 6 personnes ?

Analyse combinatoire

4) <u>Disposition non ordonnée:</u> l’orde des éléments dans une disposition n’est pas important.

<u>Exemple :</u>

Soit l’ensemble E de 10 personnes, combien de maniérés peut-on construire un groupe de 6 personnes ?

- Il y a 210 groupes possibles.

Formules classiques d'analyse combinatoire

1) Multiplets :

Soit une disposition ordonnée de λ éléments $(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda)$ dont :

Le 1^{ere} est un élément de l'ensemble A , avec $card(A) = \alpha$

Le 2^{eme} est un élément de l'ensemble B , avec $card(B) = \beta$

.

.

.

Le λ^{eme} est un élément de l'ensemble S , avec $card(S) = \gamma$

Donc le nombre de dispositions possibles est $\boldsymbol{\alpha} * \boldsymbol{\beta} * \cdots .* \boldsymbol{\gamma}$

Exercice:

Quelle est la capacité d'un code de 4 symboles où les 2 premiers symboles sont des lettres de l'alphabet et les 2 derniers symboles sont des chiffres ?

$$\underbrace{\boxed{\;?\;}}_{\text{A}}\underbrace{\boxed{\;?\;}}_{\text{A}}\underbrace{\boxed{\;?\;}}_{\text{C}}\underbrace{\boxed{\;?\;}}_{\text{C}}$$

Tel que $A = \{A, B, C, \ldots, Z\}$ et $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Formules classiques d'analyse combinatoire

<u>Exercice :</u>

1) Combien y a-t-il de mots de 2 lettres on peut former dans un alphabet de 26 lettres?

2) Combien y a-t-il de mots de 2 lettres on peut former d'une consonne et d'une voyelle?

Formules classiques d'analyse combinatoire

2) <u>Arrangement avec répétition :</u>

Est une disposition ordonnée et avec répétition; on choisit **p** éléments parmi **n** éléments, il est possible que $p > n$, on le note $\mathbf{A_n^p = n^p}$

<u>Exemple</u> : considérons l'ensemble suivant $E = \{a, b\}$, combien de mots de 3 lettres peut on construire à partir de de l'ensemble E ?

$$\underbrace{\boxed{?}}_{2}\ \underbrace{\boxed{?}}_{2}\ \underbrace{\boxed{?}}_{2}$$

- Le nombre des mots possibles est $A_n^p = n^p \Rightarrow A_2^3 = 2^3 = 8$

Formules classiques d'analyse combinatoire

Exercice :

Un numéro de téléphone comporte 5 chiffres. Il doit commencer par 0, le second chiffre est compris entre 1 et 5, les autres chiffres sont libres.

Combien de numéros de téléphone différents peut- on former ?

Formules classiques d'analyse combinatoire

3) Arrangement sans répétition :

Est une disposition ordonnée et sans répétition; on choisit p éléments parmi n éléments, il est possible que $p < n$, on le note $\boldsymbol{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$

Exemple : considérons l'ensemble suivant $E \ = \{a, b, c, d, e, f\}$, combien de mots de 3 lettres différentes peut on construire à partir de de l'ensemble E ?

$$\underbrace{\boxed{?}}_{6}\ \underbrace{\boxed{?}}_{5}\ \underbrace{\boxed{?}}_{4}$$

- Le nombre des mots possibles est

$$A_n^p = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p})!} \Rightarrow A_6^3 = \frac{\mathbf{6}!}{(\mathbf{6}-\mathbf{3})!} = \frac{\mathbf{6}!}{\mathbf{3}!} = \frac{\mathbf{6}*\mathbf{5}*\mathbf{4}*\mathbf{3}!}{\mathbf{3}!} = \mathbf{6} * \mathbf{5} * \mathbf{4} = \mathbf{120}\ \boldsymbol{mots}$$

Formules classiques d’analyse combinatoire

Exercice :

Un numéro de téléphone comporte 5 chiffres. Il doit commencer par 0, le second chiffre est compris entre 1 et 5, les autres chiffres sont libres.

Combien y a-t-il de numéros comportant des chiffres tous différents?

Formules classiques d'analyse combinatoire

4) <u>Permutations sans répétition :</u>

Est un arrangement sans répétition; on choisit $\boldsymbol{n}$ éléments parmi $\boldsymbol{n}$ éléments.

on le note $\mathbf{P_n} = \mathbf{A_n^n} = \mathbf{n}!$

<u>Exemple</u> : Quelles sont les permutations possibles des lettres suivantes $\{a, b, c\}$?

$$\underbrace{\boxed{\;?\;}}_{3}\;\underbrace{\boxed{\;?\;}}_{2}\;\underbrace{\boxed{\;?\;}}_{1}$$

Le nombre des mots possibles est $\mathbf{P_n} = \mathbf{n}! \Rightarrow \mathbf{P_3} = 3! = 3 * 2 = 6$

Formules classiques d'analyse combinatoire

5) **Permutations avec répétition :**

On appelle une permutation avec répétition de n éléments dont

n_1 sont semblables

n_2 sont semblables

.
.
.

n_r sont semblables , avec $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$

$$\boldsymbol{P_n^{(n_1, n_2, \ldots, n_r)}} = \frac{\mathbf{n}!}{\boldsymbol{n_1}! * \boldsymbol{n_2}! * \cdots * \boldsymbol{n_r}!}$$

Exemple : Combien de mots différents peut-on former à partir des lettres $\{A, B, B, C, A, D, B\}$?

On a 7 lettres tel que : 2 lettres de A, 3 lettres B et 1 lettre C et une lettre D :

- On remarque que 7 = 2 +3 +1 + 1

$$\boldsymbol{P_n^{(n_1, n_2, \ldots, n_r)}} = \boldsymbol{P_7^{(2,3,1,1)}} = \frac{\mathbf{7}!}{\mathbf{2}! * \mathbf{3}! * \mathbf{1}! * \mathbf{1}!} = \mathbf{420}\ \boldsymbol{mots\ possibles}$$

Formules classiques d'analyse combinatoire

5) Permutations avec répétition :

Exemple :

On jette successivement 12 dés. On appelle résultat , une suite ordonnée de 12 points emmenés.

Combien y t il de résultats possibles où la face 1 se trouve 5 fois, la face 2 se trouve 3fois et la face 3 se trouve 3 fois et la face 4 une fois ?

$\Omega = \{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}x_{11}x_{12}/x_i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ et $i=\overline{1,12}$ }

- Ici $n = 12$ éléments, la disposition est ordonnée et avec répétition, On remarque que 12 = 5 +3 +3 + 1+0+0

$$\boldsymbol{P_{12}^{(5,3,3,1,0,0)}} = \boldsymbol{P_{12}^{(5,3,3,1,0,0)}} = \frac{\mathbf{12}!}{\mathbf{5}! * \mathbf{3}! * \mathbf{3}! * \mathbf{1}!}$$

Formules classiques d'analyse combinatoire

6) <u>Combinaisons sans répétitions</u>

Est une disposition **<u>non-ordonnée</u>** et **<u>sans répétition</u>**, constitue de **p** éléments choisis parmi **n** éléments.

$$\boldsymbol{C_n^p} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{p}! * (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p})!}$$

<u>Exemple :</u>
On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de résultats possibles?

$$C_{32}^5 = \frac{32!}{5!*(32-5)!} = \frac{32!}{5!*27!} = \frac{32*31*30*29*28*27!}{5*4*3*2*27!} =$$

Formules classiques d'analyse combinatoire

7) <u>Combinaisons avec répétitions</u>

Est une disposition <u>non-ordonnée</u> et <u>avec répétition</u>, constitue de p éléments choisis parmi n éléments.

$$\boldsymbol{K_n^p = C_{n+p-1}^p}$$

<u>Exemple:</u>

Dans un jeu de domino, il y a 7 valeurs possibles {blanc, 1, 2 , 3 , 4, 5, 6}, Sur un domino, 2 valeur sont inscrites, l'ordre n'est pas important (retourner le domino n'a aucune influence sur ce qu'elle représente).

- Le nombre total de dominos que nous pouvons former est de $p = 2$ éléments choisi parmi $n = 7$, c.à.d.,

$K_7^2 = C_{7+2-1}^2$= 28 pièces de domino