

Les expériences aléatoires



Analyse combinatoire

On veut asseoir 5 hommes et 4 femmes dans une rangée de 9 chaises.

Combien y a-t-il de possibilités de le faire ?

Il y a 362880 manières !

On lance 12 dés simultanément, ,,,

Combien existe-t-il de plaques minéralogiques à 7 caractères, si les deux premiers sont des lettres et les 5 autres des chiffres ?

Il y a 67600000 matricules !

Analyse combinatoire



A.C est le dénombrement des dispositions ou regroupement que l'on peut former à partir des éléments d'un ensemble fini.

Disposition :

Est l'ensemble formé d'éléments choisi parmi n élément d'un ensemble fini.



Exemple 1

Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$, combien de dispositions de 2 éléments peut-on construire à partir de cet ensemble ?



$$\begin{array}{|c|c|} \hline ? & ? \\ \hline \end{array} \underbrace{\quad}_{3} * \underbrace{\quad}_{3} = 9 \text{ dispositions}$$



➤ On peut construire 9 nombre à partir des chiffres 1, 2, 3, qui sont :

11, 12, 21, 13, 31, 22, 23, 32, 33.

Analyse combinatoire



Types de disposition:

1) **Disposition sans répétition:** Est une disposition où un élément peut apparaître 0 ou 1 fois.



Exemple :

Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$, combien de disposition de 2 éléments peut-on construire à partir de cet ensemble , sans répétition?



Dans ce cas les dispositions possibles sont : 12, 21, 31, 13, 23, 32

2) **Disposition avec répétition:** Est une disposition où un élément peut apparaître plus d'une fois.



Exemple :

Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$, combien de disposition de 2 éléments peut-on construire à partir de cet ensemble ?



Dans ce cas les dispositions possibles sont : 11,12, 21, 31, 13, 22, 23, 32 , 33

Analyse combinatoire



3) **Disposition ordonnée:** l'orde des éléments dans une disposition est important.

Exemple :

Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$, combien de disposition de 2 éléments peut-on construire à partir de cet ensemble ?

Dans ce cas les dispositions possibles sont : 11,12, 21, 31, 13, 22, 23, 32, 33.



4) **Disposition non ordonnée:** l'orde des éléments dans une disposition n'est pas important.

Exemple :

Soit l'ensemble E de 10 personnes, combien de manières peut-on construire un groupe de 6 personnes ?



Analyse combinatoire

4) **Disposition non ordonnée:** l'ordre des éléments dans une disposition n'est pas important.

Exemple :

Soit l'ensemble E de 10 personnes, combien de manières peut-on construire un groupe de 6 personnes ?



- Il y a 210 groupes possibles.



Formules classiques d'analyse combinatoire



1) Multiplets :

Soit une disposition ordonnée de λ éléments $(x_1, x_2, \dots, x_\lambda)$ dont :



Le 1^{ère} est un élément de l'ensemble A , avec $card(A) = \alpha$

Le 2^{eme} est un élément de l'ensemble B , avec $card(B) = \beta$

.

.

.



Le λ ^{eme} est un élément de l'ensemble S , avec $card(S) = \gamma$

Donc le nombre de dispositions possibles est $\alpha * \beta * \dots * \gamma$

Exercice:

Quelle est la capacité d'un code de 4 symboles où les 2 premiers symboles sont des lettres de l'alphabet et les 2 derniers symboles sont des chiffres ?

?	?	?	?
A	A	C	C

Tel que $A = \{A, B, C, \dots, Z\}$ et $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Formules classiques d'analyse combinatoire



Exercice :

- 1) Combien y a-t-il de mots de 2 lettres on peut former dans un alphabet de 26 lettres?
- 2) Combien y a-t-il de mots de 2 lettres on peut former d'une consonne et d'une voyelle?



Formules classiques d'analyse combinatoire

2) Arrangement avec répétition :

Est une disposition ordonnée et avec répétition; on choisit **p** éléments parmi **n** éléments, il est possible que $p > n$, on le note $A_n^p = n^p$



Exemple : considérons l'ensemble suivant $E = \{a, b\}$, combien de mots de 3 lettres peut on construire à partir de de l'ensemble E ?



?	?	?
2	2	2

- Le nombre des mots possibles est $A_n^p = n^p \Rightarrow A_2^3 = 2^3 = 8$



Formules classiques d'analyse combinatoire

Exercice :

Un numéro de téléphone comporte 5 chiffres. Il doit commencer par 0, le second chiffre est compris entre 1 et 5, les autres chiffres sont libres.

Combien de numéros de téléphone différents peut-on former ?



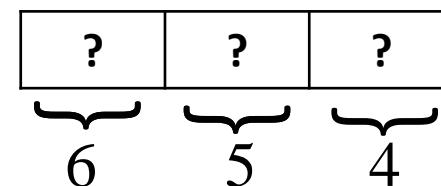


Formules classiques d'analyse combinatoire

3) Arrangement sans répétition :

Est une disposition ordonnée et sans répétition; on choisit p éléments parmi n éléments, il est possible que $p < n$, on le note $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Exemple : considérons l'ensemble suivant $E = \{a, b, c, d, e, f\}$, combien de mots de 3 lettres différentes peut on construire à partir de de l'ensemble E ?



➤ Le nombre des mots possibles est

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \Rightarrow A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6*5*4*3!}{3!} = 6 * 5 * 4 = 120 \text{ mots}$$

Formules classiques d'analyse combinatoire

Exercice :

Un numéro de téléphone comporte 5 chiffres. Il doit commencer par 0, le second chiffre est compris entre 1 et 5, les autres chiffres sont libres.

Combien y a-t-il de numéros comportant des chiffres tous différents?



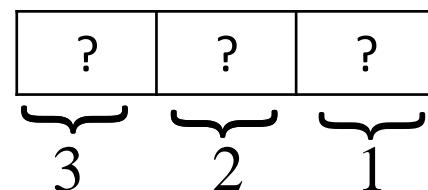
Formules classiques d'analyse combinatoire

4) Permutations sans répétition :

Est un arrangement sans répétition; on choisit **n** éléments parmi **n** éléments.

on le note $P_n = A_n^n = n!$

Exemple : Quelles sont les permutations possibles des lettres suivantes $\{a, b, c\}$?



Le nombre des mots possibles est $P_n = n! \Rightarrow P_3 = 3! = 3 * 2 = 6$



Formules classiques d'analyse combinatoire



5) Permutations avec répétition :



On appelle une permutation avec répétition de n éléments dont

n_1 sont semblables

n_2 sont semblables

⋮

n_r sont semblables , avec $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \dots * n_r!}$$

Exemple : Combien de mots différents peut-on former à partir des lettres $\{A, B, B, C, A, D, B\}$?

On a 7 lettres tel que : 2 lettres de A , 3 lettres B et 1 lettre C et une lettre D :

➤ On remarque que $7 = 2 + 3 + 1 + 1$

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} = P_7^{(2, 3, 1, 1)} = \frac{7!}{2! * 3! * 1! * 1!} = 420 \text{ mots possibles}$$

Formules classiques d'analyse combinatoire

5) Permutations avec répétition :

Exemple :

On jette successivement 12 dés. On appelle résultat , une suite ordonnée de 12 points emmenés.

Combien y t il de résultats possibles où la face 1 se trouve 5 fois, la face 2 se trouve 3 fois et la face 3 se trouve 3 fois et la face 4 une fois ?

$$\Omega = \{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12} / x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ et } i = \overline{1, 12}\}$$

- Ici $n = 12$ éléments, la disposition est ordonnée et avec répétition, On remarque que $12 = 5 + 3 + 3 + 1 + 0 + 0$

$$P_{12}^{(5,3,3,1,0,0)} = P_{12}^{(5,3,3,1,0,0)} = \frac{12!}{5! * 3! * 3! * 1!}$$





Formules classiques d'analyse combinatoire

6) Combinaisons sans répétitions

Est une disposition non-ordonnée et sans répétition, constitue de p éléments choisis parmi n éléments.

$$C_n^p = \frac{n!}{p! * (n - p)!}$$



Exemple :

On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de résultats possibles?

$$C_{32}^5 = \frac{32!}{5!*(32-5)!} = \frac{32!}{5!*27!} = \frac{32*31*30*29*28*27!}{5*4*3*2*27!} =$$

Formules classiques d'analyse combinatoire



7) Combinaisons avec répétitions

Est une disposition non-ordonnée et avec répétition, constitue de p éléments choisis parmi n éléments.

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p$$

Exemple:

Dans un jeu de domino, il y a 7 valeurs possibles {blanc, 1, 2 , 3 , 4, 5, 6}, Sur un domino, 2 valeur sont inscrites, l'ordre n'est pas important (retourner le domino n'a aucune influence sur ce qu'elle représente).

- Le nombre total de dominos que nous pouvons former est de $p = 2$ éléments choisi parmi $n = 7$, c.à.d.,

$$K_7^2 = C_{7+2-1}^2 = 28 \text{ pièces de domino}$$

