

## Les expériences aléatoires

On lance 12 dés  
simultanément, ...

# Analyse combinatoire

On veut asseoir 5 hommes et 4  
femmes dans une rangée de 9  
chaises.

Combien y a-t-il de possibilités  
de le faire ?

Il y a 362880 manières !

Combien existe-t-il de plaques  
minéralogiques à 7 caractères,  
si les deux  
premiers sont des lettres et les 5  
autres des chiffres ?

Il y a 67600000 matricules !

# Analyse combinatoire



A.C est le dénombrement des dispositions ou regroupement que l'on peut former à partir des éléments d'un ensemble fini.

## Disposition :

Est l'ensemble formé d'éléments choisis parmi  $n$  éléments d'un ensemble fini.



## Exemple 1

Soit l'ensemble  $E = \{1, 2, 3\}$ , combien de dispositions de 2 éléments peut-on construire à partir de cet ensemble ?



$$\begin{array}{|c|c|} \hline ? & ? \\ \hline \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_3 \quad * \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_3 = 9 \text{ dispositions}$



➤ On peut construire 9 nombres à partir des chiffres 1, 2, 3, qui sont :

11, 12, 21, 13, 31, 22, 23, 32, 33.

# Analyse combinatoire



## Types de disposition:

1) **Disposition sans répétition:** Est une disposition où un élément peut apparaître 0 ou 1 fois.



### **Exemple :**

Soit l'ensemble  $E = \{1, 2, 3\}$  , combien de disposition de 2 éléments peut-on construire à partir de cet ensemble , sans répétition?



Dans ce cas les dispositions possibles sont : 12, 21, 31, 13, 23, 32

2) **Disposition avec répétition:** Est une disposition où un élément peut apparaître plus d'une fois.



### **Exemple :**

Soit l'ensemble  $E = \{1, 2, 3\}$  , combien de disposition de 2 éléments peut-on construire à partir de cet ensemble ?

Dans ce cas les dispositions possibles sont : 11, 12, 21, 31, 13, 22, 23, 32 , 33



# Analyse combinatoire



3) **Disposition ordonnée:** l'ordre des éléments dans une disposition est important.

**Exemple :**

Soit l'ensemble  $E = \{1, 2, 3\}$  , combien de disposition de 2 éléments peut-on construire à partir de cet ensemble ?

Dans ce cas les dispositions possibles sont : 11,12, 21, 31, 13, 22, 23, 32, 33.



4) **Disposition non ordonnée:** l'ordre des éléments dans une disposition n'est pas important.

**Exemple :**

Soit l'ensemble E de 10 personnes, combien de manières peut-on construire un groupe de 6 personnes ?



# Analyse combinatoire

4) **Disposition non ordonnée:** l'ordre des éléments dans une disposition n'est pas important.

## **Exemple :**

Soit l'ensemble  $E$  de 10 personnes, combien de manières peut-on construire un groupe de 6 personnes ?



➤ Il y a 210 groupes possibles.



# Formules classiques d'analyse combinatoire



## 1) Multiplets :

Soit une disposition ordonnée de  $\lambda$  éléments  $(x_1, x_2, \dots, x_\lambda)$  dont :

Le 1<sup>ère</sup> est un élément de l'ensemble  $A$  , avec  $card(A) = \alpha$

Le 2<sup>ème</sup> est un élément de l'ensemble  $B$  , avec  $card(B) = \beta$

.

.

.

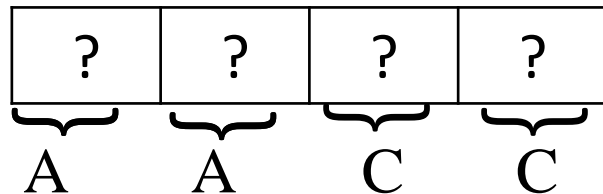
Le  $\lambda^{\text{ème}}$  est un élément de l'ensemble  $S$  , avec  $card(S) = \gamma$



Donc le nombre de dispositions possibles est  $\alpha * \beta * \dots * \gamma$

## Exercice:

Quelle est la capacité d'un code de 4 symboles où les 2 premiers symboles sont des lettres de l'alphabet et les 2 derniers symboles sont des chiffres ?



Tel que  $A = \{A, B, C, \dots, Z\}$  et  $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

# Formules classiques d'analyse combinatoire



## Exercice :

- 1) Combien y a-t-il de mots de 2 lettres on peut former dans un alphabet de 26 lettres?
- 2) Combien y a-t-il de mots de 2 lettres on peut former d'une consonne et d'une voyelle?



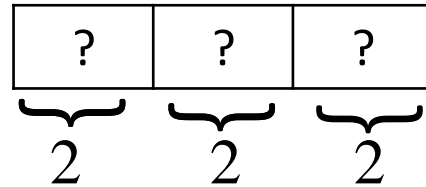
# Formules classiques d'analyse combinatoire

## 2) Arrangement avec répétition :

Est une disposition ordonnée et avec répétition; on choisit  $p$  éléments parmi  $n$  éléments, il est possible que  $p > n$ , on le note  $A_n^p = n^p$



**Exemple** : considérons l'ensemble suivant  $E = \{a, b\}$ , combien de mots de 3 lettres peut on construire à partir de de l'ensemble  $E$  ?



➤ Le nombre des mots possibles est  $A_n^p = n^p \Rightarrow A_2^3 = 2^3 = 8$





# Formules classiques d'analyse combinatoire

## Exercice :

Un numéro de téléphone comporte 5 chiffres. Il doit commencer par 0, le second chiffre est compris entre 1 et 5, les autres chiffres sont libres.

Combien de numéros de téléphone différents peut- on former ?



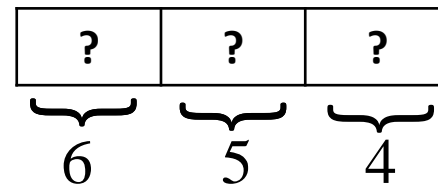
# Formules classiques d'analyse combinatoire



## 3) Arrangement sans répétition :

Est une disposition ordonnée et sans répétition; on choisit  $p$  éléments parmi  $n$  éléments, il est possible que  $p < n$ , on le note  $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

**Exemple** : considérons l'ensemble suivant  $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ , combien de mots de 3 lettres différentes peut on construire à partir de de l'ensemble  $E$  ?



➤ Le nombre des mots possibles est

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \Rightarrow A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6*5*4*3!}{3!} = 6 * 5 * 4 = 120 \text{ mots}$$

# Formules classiques d'analyse combinatoire

## Exercice :

Un numéro de téléphone comporte 5 chiffres. Il doit commencer par 0, le second chiffre est compris entre 1 et 5, les autres chiffres sont libres.

Combien y a-t-il de numéros comportant des chiffres tous différents?



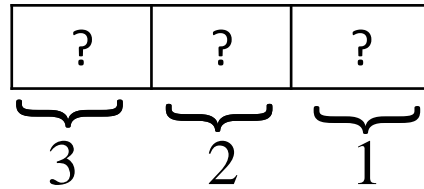
# Formules classiques d'analyse combinatoire

## 4) Permutations sans répétition :

Est un arrangement sans répétition; on choisit  $n$  éléments parmi  $n$  éléments.

on le note  $P_n = A_n^n = n!$

**Exemple** : Quelles sont les permutations possibles des lettres suivantes  $\{a, b, c\}$ ?



# Formules classiques d'analyse combinatoire



## 5) Permutations avec répétition :

On appelle une permutation avec répétition de  $n$  éléments dont

$n_1$  sont semblables

$n_2$  sont semblables

$\vdots$

$n_r$  sont semblables , avec  $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \dots * n_r!}$$

**Exemple** : Combien de mots différents peut-on former à partir des lettres  $\{A, B, B, C, A, D, B\}$  ?

On a 7 lettres tel que : 2 lettres de  $A$ , 3 lettres  $B$  et 1 lettre  $C$  et une lettre  $D$  :

➤ On remarque que  $7 = 2 + 3 + 1 + 1$

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} = P_7^{(2, 3, 1, 1)} = \frac{7!}{2! * 3! * 1! * 1!} = 420 \text{ mots possibles}$$

# Formules classiques d'analyse combinatoire

## 5) Permutations avec répétition :

### Exemple :

On jette successivement 12 dés. On appelle résultat , une suite ordonnée de 12 points emmenés.

Combien y t il de résultats possibles où la face 1 se trouve 5 fois, la face 2 se trouve 3fois et la face 3 se trouve 3 fois et la face 4 une fois ?

$$\Omega = \{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}x_{11}x_{12}/x_i \in \{1,2,3,4,5,6\} \text{ et } i=\overline{1,12} \}$$

➤ Ici  $n = 12$  éléments, la disposition est ordonnée et avec répétition, On remarque que  $12 = 5 + 3 + 3 + 1 + 0 + 0$

$$P_{12}^{(5,3,3,1,0,0)} = P_{12}^{(5,3,3,1,0,0)} = \frac{12!}{5! * 3! * 3! * 1!}$$



# Formules classiques d'analyse combinatoire



## 6) Combinaisons sans répétitions

Est une disposition non-ordonnée et sans répétition, constitue de **p** éléments choisis parmi **n** éléments.

$$C_n^p = \frac{n!}{p! * (n - p)!}$$



### Exemple :

On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de résultats possibles?

$$C_{32}^5 = \frac{32!}{5! * (32 - 5)!} = \frac{32!}{5! * 27!} = \frac{32 * 31 * 30 * 29 * 28 * 27!}{5 * 4 * 3 * 2 * 27!} =$$

# Formules classiques d'analyse combinatoire



## 7) Combinaisons avec répétitions

Est une disposition non-ordonnée et avec répétition, constitue de  $p$  éléments choisis parmi  $n$  éléments.

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p$$

### Exemple:

Dans un jeu de domino, il y a 7 valeurs possibles {blanc, 1, 2, 3, 4, 5, 6}, Sur un domino, 2 valeur sont inscrites, l'ordre n'est pas important (retourner le domino n'a aucune influence sur ce qu'elle représente).

➤ Le nombre total de dominos que nous pouvons former est de  $p = 2$  éléments choisi parmi  $n = 7$ , c.à.d.,

$$K_7^2 = C_{7+2-1}^2 = 28 \text{ pièces de domino}$$

