

# Chapitre 5 : Relations de comportement

## 5.1 Introduction

La loi de comportement (ou loi constitutive) d'un matériau est une relation mathématique qui relie les contraintes et les déformations qu'il subit sous l'effet de sollicitations externes. Elle permet de caractériser le comportement mécanique du matériau en fonction des différentes charges et déformations appliquées.

## 5.2 Notation de Voigt

L'état de contrainte et l'état de déformation en un point seront représentés par un vecteur à six composantes :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

## 5.3 Loi de Hooke généralisée

La loi de Hooke généralisée définit la relation linéaire la plus générale entre toutes les composantes des tenseurs de contrainte et de déformation.

$$[\sigma] = [C] \cdot [\varepsilon]$$

Ou bien :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

$C_{ijkl}$  représente les composantes du tenseur d'ordre quatre, associé aux propriétés du matériau ou aux modules élastiques. Ce tenseur de rigidité d'ordre quatre comporte 81 composantes dans le cas des problèmes tridimensionnels et 16 composantes pour les problèmes bidimensionnels.

### 5.3.1 Matériau homogène et isotrope

Considérons un élément soumis à une seule composante de contrainte normale  $\sigma_x$ .

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x$$

Cela nous a permis d'écrire :

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \cdot \sigma_x / E$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$$

Avec :

$E$  : Modules d'élasticité (Module de Young)

$\nu$  : Coefficient de Poisson.

Lorsque  $\sigma_y$  est appliqué :

$$\varepsilon_y = 1/E \cdot \sigma_y$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_y = -\nu \cdot \sigma_y / E$$

Résultat similaire lorsque  $\sigma_z$  est appliqué :

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z = -\nu \cdot \sigma_z / E$$

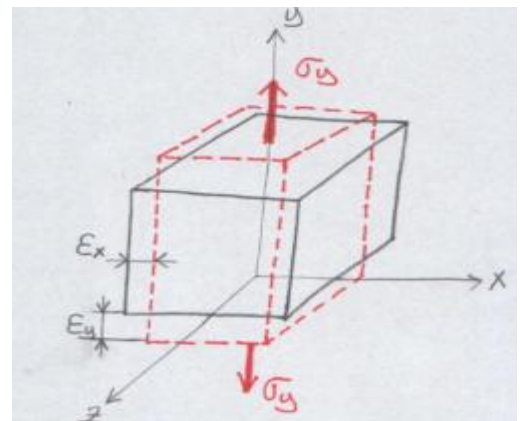
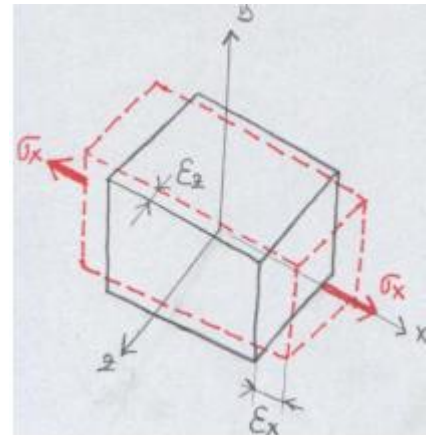
D'où :

$$\varepsilon_x = 1/E (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = 1/E (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_z = 1/E (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

Chaque composante de contrainte de cisaillement produit uniquement sa composante de déformation de cisaillement correspondante.



$$\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G} \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G}$$

G : Le module d'élasticité transversal

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Sous l'hypothèse de petites perturbations, pour un matériau homogène, linéaire et isotrope, la loi de Hooke généralisée se présente sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Ou bien :

$$[\varepsilon(M)] = \frac{1+\nu}{E} [\sigma(M)] - \frac{\nu s}{E} [I] \quad \text{Avec : } s = \text{tr}[\sigma(M)] = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

### 5.3.2 Influence de la Température

Imaginons la modélisation de la relation contrainte-déformation lorsque la température d'un matériau change également. Lorsqu'un corps est chauffé, il se dilate simplement sans qu'aucune contrainte n'apparaisse. Cette dilatation génère une déformation supplémentaire appelée déformation thermique ( $\varepsilon_T$ ), qui n'entraîne aucune contrainte dans le corps. Il s'avère que :

$$\varepsilon_T = \alpha \Delta T.$$

Avec :  $\Delta T$  désigne le changement de température et « $\alpha$ » le coefficient de dilatation thermique linéaire du solide.

D'où, on peut écrire :

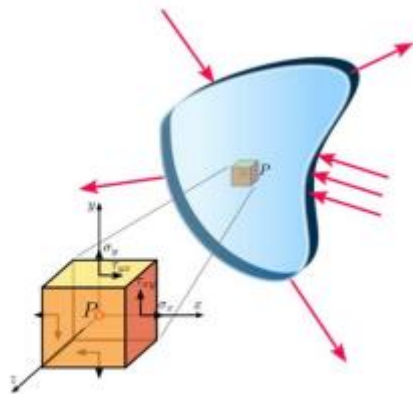
$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} - \alpha\Delta T &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})), \\ \epsilon_{yy} - \alpha\Delta T &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})), \\ \epsilon_{zz} - \alpha\Delta T &= \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})).\end{aligned}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}.$$

## 5.4 Problèmes particuliers

### 5.4.1 Contraintes planes

Il s'agit d'un état de contrainte où les composantes de contrainte varient le long d'un plan (par exemple le plan x-y), mais sont nulles dans la troisième direction (direction z). il inclut des problèmes tels que les plaques avec des trous ou d'autres variations de géométrie, soumises à des charges dans leur plan, entraînant des concentrations locales de contraintes.



**Figure 5.1 :** Etat plan de contrainte.

Le tenseur des contraintes soit de la forme :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le tenseur des contraintes soit de la forme :

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Les composantes des tenseurs des contraintes et des déformations sont :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}]$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{-\nu}{E} [\sigma_{xx} + \sigma_{yy}] = -\frac{\nu}{1-\nu} [\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}]$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy}$$

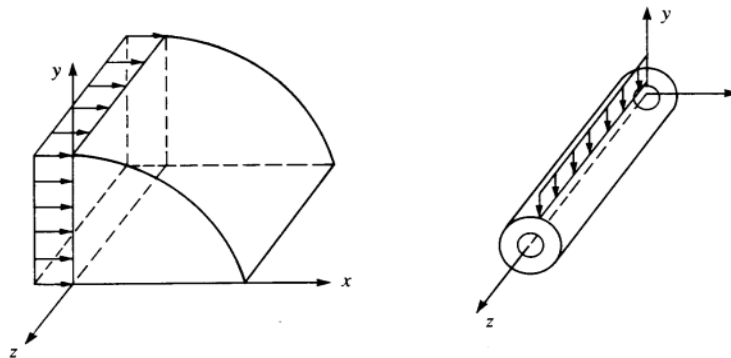
$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}]$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy}$$

#### 5.4.2 Déformations planes

Un état de déformation où toutes les déformations se produisent dans un plan (comme le plan x-y), et la troisième direction (direction z) ne présente aucune déformation. Il inclut des problèmes tels qu'un long conduit souterrain soumis à une charge uniforme agissant de manière constante sur sa longueur, ou une longue tige cylindrique soumise à une charge qui reste constante sur la longueur de sa tige (ou sa profondeur).



**Figure 5.2:** *Etat plan de déformation.*

Le champ de déplacement soit de la forme :

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ w = 0 \end{cases}$$

Le tenseur des déformations est:

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le tenseur des contraintes est:

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Les composantes des tenseurs des contraintes et des déformations sont :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}]$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}]$$

$$\sigma_{zz} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy}$$

## 5.5 Equations de Lamé

L'équation de Lamé (l'inverse de la loi de Hooke), qui décrit la relation entre les contraintes  $\sigma_{ij}$  et les déformations  $\varepsilon_{ij}$  d'un matériau isotrope linéaire élastique, peut être formulée de la manière suivante :

$$[\sigma(\mathbf{M})] = \lambda \text{tr}[\varepsilon(\mathbf{M})] \mathbf{I} + 2\mu[\varepsilon(\mathbf{M})]$$

Ou bien :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{G} + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mathbf{G} + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mathbf{G} + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

Où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \mathbf{G} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

## 5.6 Energie de déformation

D'après le principe de la conservation d'énergie, le travail effectué par des forces extérieures  $W$  est emmagasiné dans le corps sous forme d'énergie de déformation désignée par  $U$ . Donc :

$$U = W$$

L'énergie de déformation d'un corps s'obtient par :

$$U = \frac{1}{2E} \int_V (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) dv + \frac{1}{2G} \int_V (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) dv$$

Pour une barre de longueur  $l$  sollicitée par traction ou compression  $\sigma_x = \frac{N}{A}$ , et l'énergie de déformation est :

$$U = \int_0^l \frac{N^2}{2EA^2} dx \int_A dA = \int_0^l \frac{N^2}{2EA} dx$$

Pour une barre élastique sollicitée par un moment de torsion  $M_t$ ,  $G$  le module d'élasticité en cisaillement et  $J$  le moment d'inertie polaire, l'énergie de déformation est:

$$U = \int_0^l \frac{M_t^2}{2GJ} dx$$

Pour une poutre de longueur  $L$  sollicitée en flexion pur, l'énergie de déformation est :

$$U = \int_0^l \frac{M_z^2}{2EI_z} dx \quad (\text{Moment autour de l'axe } z).$$

$$U = \int_0^l \frac{M_y^2}{2EI_y} dx \quad (\text{Moment autour de l'axe } y).$$

L'énergie de déformation engendrée par l'effort tranchant est donné par :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{k_y T_y^2}{GA} dx \quad (\text{Effort tranchant suivant l'axe } y)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{k_z T_z^2}{GA} dx \quad (\text{Effort tranchant suivant l'axe } z)$$

Les coefficients  $k_y$ , et  $k_z$  appelés facteurs de cisaillement qui caractérisent la distribution des contraintes tangentielles dues à l'effort tranchant.

L'expression de l'énergie de déformation pour une poutre soumise aux sollicitations  $N, T_y, M_z$  et  $M_t$  s'obtient par :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_t^2}{GJ} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{k_y T_y^2}{GA} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_z^2}{EI_z} dx$$