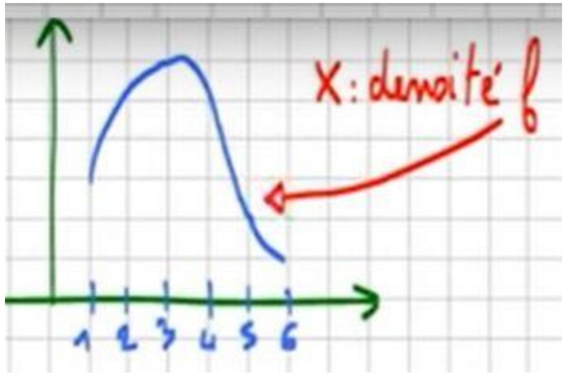
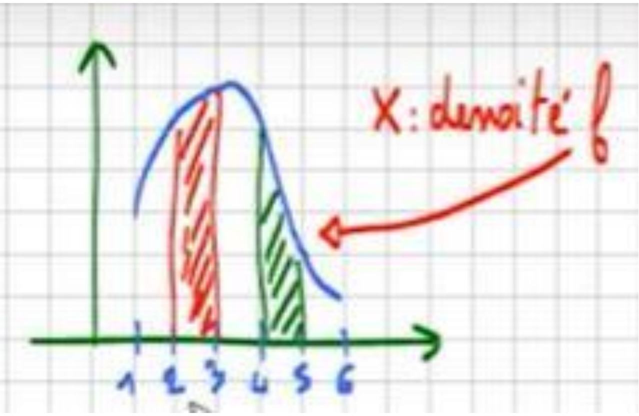
Les lois continues usuelles

Les lois continues usuelles

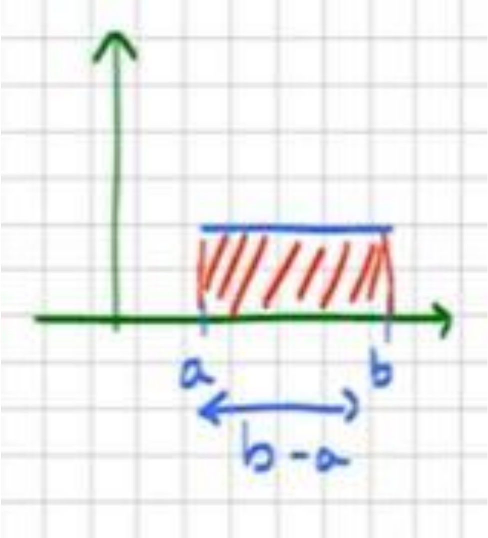
1. La loi uniforme $U([a, b])$

Avec $a, b \in \mathcal{R}$

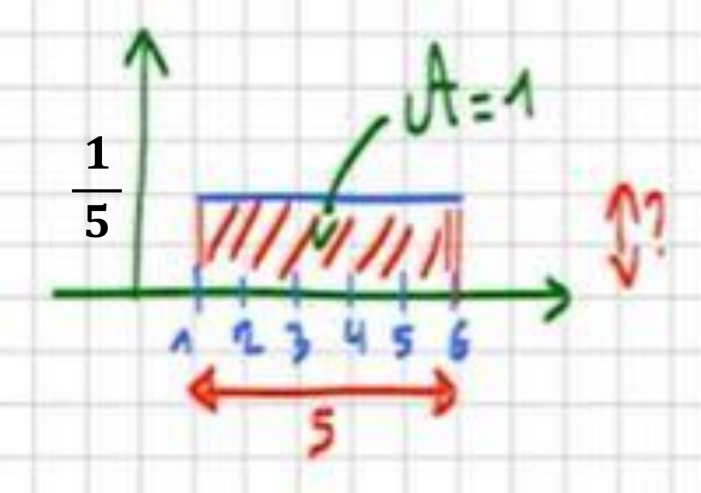


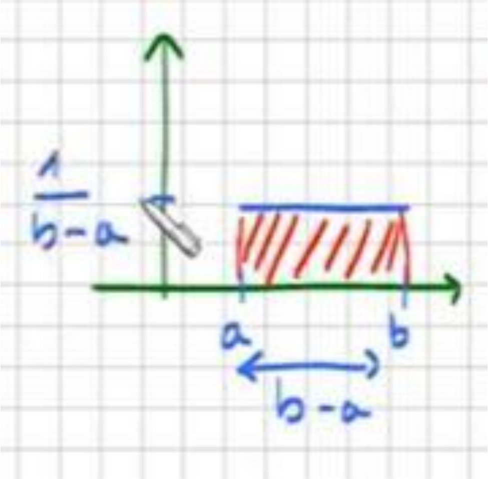


$P(2 \leq X \leq 3) > P(4 \leq X \leq 5)$



$P(2 \leq X \leq 3) = P(4 \leq X \leq 5)$





http://www.jaicompris.com/lycee/math/probabilite/loi-uniforme.php

Les lois continues usuelles

1. La loi uniforme $\boldsymbol{U([a,b])}$

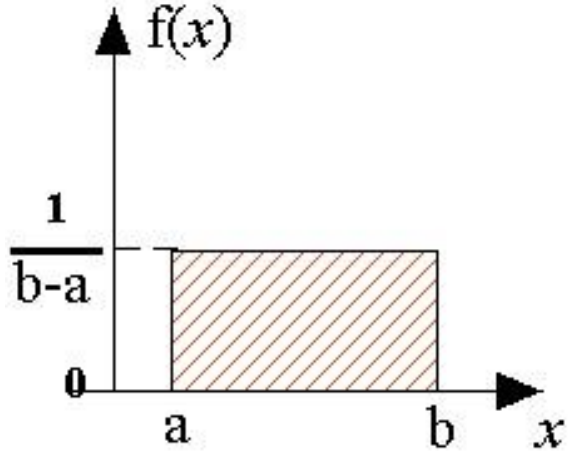
Avec $a, b \in \mathcal{R}$

- Cette loi est l'analogue continue de l'équiprobabilité dans le cas discret.

- Elle permet de modéliser le tirage d'un nombre aléatoire dans l'intervalle $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$

- La fonction de densité est **<u>constante</u>** et donné par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ x \in [a,b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$



Fonction de densité de probabilité

On dit que $\boldsymbol{X \sim U([a,b])}$

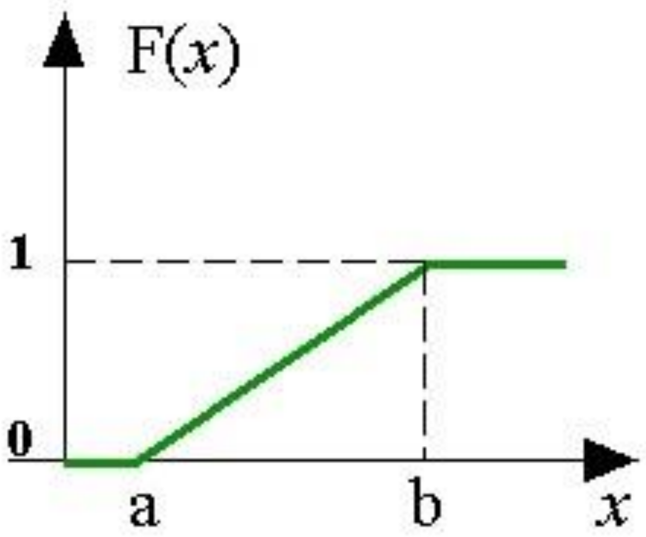
Les lois continues usuelles

1. La loi uniforme $\boldsymbol{U([a,b])}$

Avec $a, b \in \mathcal{R}$

- **La fonction de répartition**

$$\boldsymbol{F(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{si\ x < a} \\ \dfrac{\boldsymbol{x-a}}{\boldsymbol{b-a}}\ , & \boldsymbol{si\ x \epsilon\ [a,b]} \\ \boldsymbol{1}, & \boldsymbol{si\ x > b} \end{cases}$$



Fonction de répartition

Les lois continues usuelles

1. La loi uniforme $U([a, b])$

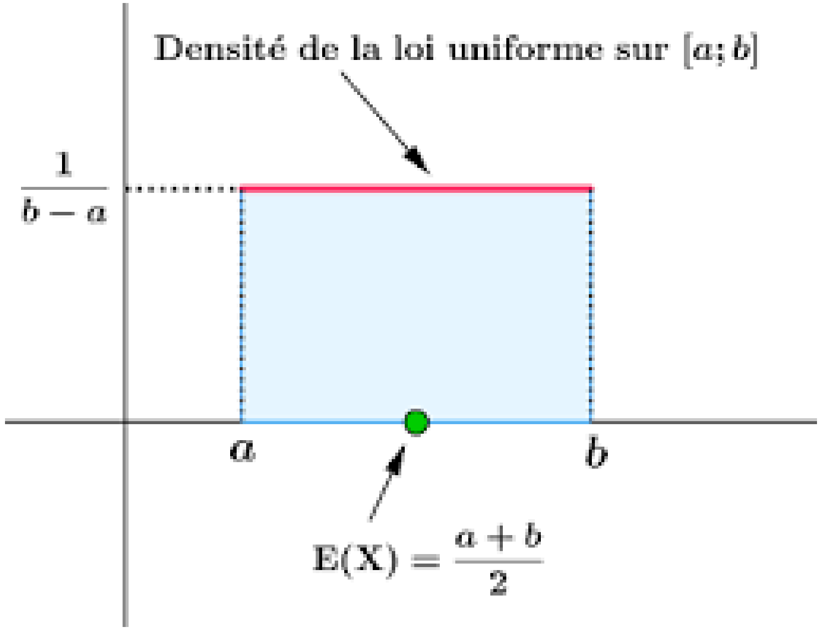
Avec $a, b \in \mathcal{R}$

<table>
<tr><td>

<u>Espérance Mathématique</u>

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

</td><td>



</td></tr>
<tr><td colspan="2">

<u>Variance</u>

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

</td></tr>
</table>

Les lois continues usuelles

1. La loi uniforme $\boldsymbol{U}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}])$

Avec $a, b \in \mathcal{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ x \in [a, b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

- **La fonction de répartition**

<u>Cas 1:</u> **Si $\mathbf{x} < \boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{x} \in]-\infty, \boldsymbol{a}[)$:**

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$$

<u>Cas 2:</u> **Si $\boldsymbol{a} \leq \mathbf{x} \leq \boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$:**

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{a} 0\, dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a}\, t \Big|_{a}^{x} = \frac{1}{b-a}(x-a)$$

Les lois continues usuelles

1. La loi uniforme $\boldsymbol{U([a,b])}$

Avec $a, b \in \mathcal{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ x \in [a,b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

- **La fonction de répartition**

Cas 3: **Si $\boldsymbol{x > b}$ $(\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{b}, +\infty[)$:**

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} 0\,dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dt + \int_{b}^{x} 0\,dt$$

$$F(x) = \frac{1}{b-a}\,t\Big|_{a}^{b} = \frac{1}{b-a}(b-a) = 1$$

Les lois continues usuelles

1. La loi uniforme $\boldsymbol{U}([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}])$

Avec $a, b \in \mathcal{R}$

<u>Exemple :</u>

Anissa doit retrouver Manou au café entre 19h et 20h.

1) Quelle est la probabilité qu’elle arrive à 19h 15?

2) Quelle est la probabilité qu’elle arrive avant 19h20 ?

3) Quelle est la probabilité qu’elle arrive entre 19h25 et 19h35 ?

Les lois continues usuelles

1. La loi uniforme $\boldsymbol{U}([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}])$

Avec $a, b \in \mathcal{R}$

Exemple :

Anissa doit retrouver Manou au café entre 19h et 20h.

Entre 19h et 20h il y a 60 minutes, et Anissa peut arriver à n'importe quelle moment sur cette période (les valeurs de cette période ont la même chance (l'équiprobabilité)), alors on dit que

$\boldsymbol{X}$: $\boldsymbol{indique\ l'heure\ d'arriv}$é $\boldsymbol{d'Anissa\ apr}$é$\boldsymbol{s\ 19h}$

$$X \sim U([0,60]) \Longrightarrow \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{60} & si\ x \in [0,60] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1) La probabilité qu'elle arrive à 19h 15 :

$$P(X = 15) = 0$$

http://www.jaicompris.com/lycee/math/probabilite/loi-uniforme.php

Les lois continues usuelles

1. La loi uniforme $\boldsymbol{U}([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}])$

Avec $a, b \in \mathcal{R}$

<u>Exemple :</u>

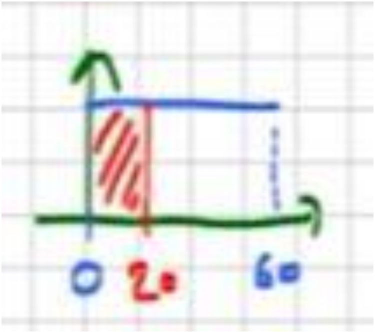
$X: indique\ l'heure\ d'arrivé\ d'Anissa\ aprés\ 19h$

$X \sim U([0,60])$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60} & si\ x \in [0,60] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

2) La probabilité qu'elle arrive avant 19h20 :

$$P(0 \leq X \leq 20) = \int_0^{20} \frac{1}{60}\, dx = \frac{1}{60}\, x \Big|_0^{20} = \frac{1}{60}(20-0) = \frac{1}{3}$$



http://www.jaicompris.com/lycee/math/probabilite/loi-uniforme.php

Les lois continues usuelles

1. La loi uniforme $\boldsymbol{U}([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}])$

Avec $a, b \in \mathcal{R}$

<u>Exemple :</u>

X: $indique\ l'heure\ d'arriv$é $d'Anissa\ apr$és $19h$

$X \sim U([0,60])$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{60} & si\ x \in [0,60] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

3) La probabilité qu'elle arrive entre 19h25 et 19h35 :

$$P(25 \leq X \leq 35) = \int_{25}^{35} \frac{1}{60}\, dx = \frac{1}{60}\, x \Big|_{25}^{35} = \frac{1}{60}(35-25) = \frac{1}{6}$$

Les lois continues usuelles

2. La loi exponentielle $\boldsymbol{Exp(\lambda)}$

Avec $\lambda > 0, \lambda \in \mathcal{R}$

La loi exponentielle est souvent utilisée pour modéliser:

- le temps d’attente avant l’arrivé d’un évènement spécifie.
- La durée de vie du hardware.
- Le temps écoulé entre appels téléphoniques.

Les lois continues usuelles

2. La loi exponentielle $\boldsymbol{Exp(\lambda)}$

Avec $\lambda > 0, \lambda \in \mathcal{R}$

- **La fonction de densité est donné par :**

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

- On dit que X est V. A exponentielle de paramètre λ $\qquad \boldsymbol{X \sim Exp(\lambda)}$

Les lois continues usuelles

2. La loi exponentielle $Exp(\lambda)$

Avec $\lambda > 0, \lambda \in \mathcal{R}$

- **La fonction de répartition**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

- **L'espérance mathématique :**

$$\boldsymbol{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$$

- **La variance de X :**

$$\boldsymbol{V(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

Les lois continues usuelles

2. La loi exponentielle $Exp(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

- **La fonction de répartition**

<u>Cas 1:</u> **Si x < 0** $(x \in]-\infty, 0[)$ **:**

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

$$\int U'(x)e^{U(x)} = e^{U(x)}$$

$$- -\ e^{-t}$$

<u>Cas 2:</u> **Si x ≥ 0** $(x \in [0, +\infty]$ **:**

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = -e^{-\lambda t}\Big|_{0}^{x} = 1 - e^{-\lambda x}$$

Les lois continues usuelles

2. La loi exponentielle $Exp(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

L'espérance mathématique :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{+\infty} x * \lambda * e^{-\lambda x}\, dx =$$

$$\boldsymbol{\int_a^b v'(x) * u(x)dx = v(x) * u(x)\Big|_b^a - \int_a^b v(x) * u'(x)dx}$$

$$\boldsymbol{v'(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} \Rightarrow v(x) = -e^{-\lambda x}}$$

$$\boldsymbol{u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow E(x) = -e^{-\lambda x} * x\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x}dx}$$

Les lois continues usuelles

2. La loi exponentielle $\boldsymbol{Exp(\lambda)}$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

L'espérance mathématique :

$$\boldsymbol{E}(X) = -\boldsymbol{e}^{-\lambda x} * \boldsymbol{x}\,\Big|_{\boldsymbol{0}}^{+\infty} - \int_{\boldsymbol{0}}^{+\infty} -\boldsymbol{e}^{-\lambda x} dx = -\overset{\mathbf{0}}{\boldsymbol{e}^{-\infty}} * \infty + \overbrace{\boldsymbol{e}^{\mathbf{0}} * \mathbf{0}}^{\mathbf{0}} - \int_{\boldsymbol{0}}^{+\infty} -\boldsymbol{e}^{-\lambda x} \boldsymbol{dx}$$

$$\boldsymbol{E}(X) = -\int_{\boldsymbol{0}}^{+\infty} - \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{e}^{-\lambda x} \boldsymbol{dx} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}} \int_{\boldsymbol{0}}^{+\infty} -\boldsymbol{\lambda}\, \boldsymbol{e}^{-\lambda x} \boldsymbol{dx} = -\frac{1}{\lambda} \boldsymbol{e}^{-\lambda x}\Big|_{\boldsymbol{0}}^{+\infty} = -\frac{1}{\lambda}\left(\overset{\mathbf{0}}{\boldsymbol{e}^{-\infty}} - \overset{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}^{\mathbf{0}}}\right)$$

$$\boldsymbol{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Les lois continues usuelles

2. La loi exponentielle $\boldsymbol{Exp(\lambda)}$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

La variance de X :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{0}^{+\infty} x^2 * \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$\boldsymbol{\int_a^b v'(x) * u(x) dx = v(x) * u(x)\Big|_b^a - \int_a^b v(x) * u'(x) dx}$$

$$\boldsymbol{v'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \Rightarrow v(x) = -e^{-\lambda x}}$$

$$\boldsymbol{u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow E(X^2) = -e^{-\lambda x} * x^2\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x} * 2x\, dx}$$

Les lois continues usuelles

2. La loi exponentielle $\boldsymbol{Exp(\lambda)}$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

La variance de X :

$$E(X^2) = -e^{-\lambda x} * x^2 \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x} * 2x\, dx = -\overset{0}{e^{-\infty}} * \infty + \overbrace{e^0 * 0}^{0} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x} * 2x\, dx$$

$$E(X^2) = -2\left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} * x \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} dx\right] = -2\left[-\overset{0}{e^{-\infty}} * \infty + \overbrace{e^0 * 0}^{0} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} dx\right]$$

Les lois continues usuelles

2. La loi exponentielle $Exp(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

La variance de X :

$$E(X^2) = -2\left[\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} \frac{-\lambda}{\lambda} e^{-\lambda x} dx\right] = -2\left[\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} -\lambda e^{-\lambda x} dx\right] = \frac{-2}{\lambda^2}\left[e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}\right] = \frac{-2}{\lambda^2}\left(\overset{0}{e^{-\infty}} - \overset{1}{e^{0}}\right)$$

$$E(X^2) = \frac{-2}{\lambda^2}(0-1) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Les lois continues usuelles

2. La loi exponentielle $Exp(\lambda)$

Exemple :

Considérons la situation suivante une imprimante reçoit 3 tâches par heure.

1) Quelle est la durée moyenne (en heure) séparant les tâches?

2) Quelle est la probabilité que la prochaine tâche soit envoyée dans 5 minutes?

Les lois continues usuelles

2. La loi exponentielle $\boldsymbol{Exp(\lambda)}$

<u>Exemple :</u>

X: indique le temps séparant les tâches en heure

λ : Le nombre de tâches envoyé par heure (La moyenne)

$$\lambda = 3$$

Donc $X \sim Exp(3)$

1) La durée moyenne (en heure) séparant les tâches

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3} \text{ heure}$$

Les lois continues usuelles

2. La loi exponentielle $\boldsymbol{Exp(\lambda)}$

<u>Exemple :</u>

X: indique le temps séparant les tâches en heure

$X \sim Exp(3)$

2) la probabilité que la prochaine tâche soit envoyée dans 5 minutes

$P(X \leq 5\ m) = ?$

$5m \longrightarrow \frac{1}{12}\ heure \qquad \Longrightarrow P(X \leq 5\ m) = P\left(X \leq \frac{5}{60}\right) = P\left(X \leq \frac{1}{12}\right)$

$P\left(X \leq \frac{1}{12}\right) = F\left(\frac{1}{12}\right) = 1 - e^{-3*\frac{1}{12}} \quad = 1 - e^{-\frac{1}{4}} = 0{,}2211 \quad = 22{,}11\%$

Les lois continues usuelles

Remarque:

$\boldsymbol{\lambda}$: Le nombre moyen de réalisation d'un évènement spécifié (La moyenne)

La loi de poisson	La loi exponentielle
X: indique le nombre de réalisation d'un évènement sur un intervalle donné	X : indique le temps d'attente entre 2 réalisations d'un évènement sur un intervalle donné
$\boldsymbol{E(X) = \lambda}$	$\boldsymbol{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$

Les Variables aléatoires continues

Remarque 2:

- **Fonction de répartition**

$$\boldsymbol{P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) =}$$

$$\boldsymbol{P(a < X < b) = P(a \leq X < b) =}$$

$$\boldsymbol{F(b) - F(a)}$$