

Chapitre 5

Développement limité

5-1 Formule de Taylor-Young

La formule de Taylor-Young permet d'écrire une fonction au voisinage d'un point sous la forme d'un polynôme et d'un reste.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Théorème 5.1 Taylor-Young

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n et soit $a \in I$. Alors pour chaque $x \in I$, nous avons

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x) \quad (5.1)$$

c'est à dire

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}_{T_n(x)} + \underbrace{(x-a)^n \varepsilon(x)}_{R_n(x)}$$

avec $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a .

$T_n(x)$ s'appelle la partie polynomiale ou régulière de Taylor. $R_n(x)$ est le reste de Taylor.

On appelle (5.1) la formule de Taylor-Young de f à l'ordre n au point a .

Exemple 5.1

Soient $f(x) = \ln(1+x)$ et $I =]-1, +\infty[$.

La fonction f est de classe C^∞ sur I . La formule de Taylor-Young de f à l'ordre n au pt $x=0$

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k + (x-0)^n \varepsilon(x)$$

$$f(0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad , \quad f'(0) = 1 = 0!$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \quad , \quad f''(0) = -1 = -1!$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad , \quad f^{(3)}(0) = 2 = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} \quad , \quad f^{(4)}(0) = -6 = -3!$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5} \quad , \quad f^{(5)}(0) = 24 = 4!$$

donc $f^{(n)}(x) = \frac{n!(-1)^{n-1}}{(1+x)^n}$, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$

donc $f(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{k!} \frac{(x-0)^k}{k!} + (x-0)^n \varepsilon(x)$
 $= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + x^n \varepsilon(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$

avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$

5.2 Formule de Taylor-Lagrange.

Le reste de cette formule est différent à celui de la formule de Taylor-Young. Ci-dessous le théorème de Taylor-Lagrange

Théorème 5.2.1.

Considérons une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} et soit $a, x \in I$. Alors, il existe forcément un $c \in I$ entre a et x vérifiant

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (5.2)$$

c'est à dire

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

exemple 5.2

Soit $f(x) = \cos x$. La fonction f est de classe C^∞

La formule de Taylor-Lagrange de f au pt 0

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-0)^{n+1}$$

$f(x) = \cos x$	$f(0) = 1$
$f'(x) = -\sin x$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x$	$f''(0) = -1$
$f^{(3)}(x) = \sin x$	$f^{(3)}(0) = 0$
$f^{(4)}(x) = \cos x$	$f^{(4)}(0) = 1$

$f^{(5)}(x) = -\sin x$	$f^{(5)}(0) = 0$
$f^{(6)}(x) = -\cos x$	$f^{(6)}(0) = -1$

On remarque que

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \cos x & f^{(2k)}(0) &= (-1)^k \\ f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^{k+1} \sin x & f^{(2k+1)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

donc si $n = 2m$, on a $\cos x = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+2)!} \sin c x^{2m+2} \quad (2)$

Si $n = 2m+1$ on a

$$\cos x = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{(-1)^{m+1} \cos c}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

ou c est un réel compris entre 0 et x

• Nous allons refaire l'exemple 5.1 pour la formule de Taylor-Lagrange.

La partie polynomiale reste la même mais le reste change

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^n = \frac{n! (-1)^n x^{n+1}}{(1+c)^{n+1} (n+1)!} = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+c)^{n+1} (n+1)}$$

Remarque:

La formule de Taylor-Young et celle de Taylor-Lagrange ont la même partie polynomiale mais les restes sont différents. En fait, la formule de Taylor-Young ne donne pas une information sur le reste à part qu'il tend vers 0 quand x tend vers a , or la formule de Taylor-Lagrange offre un encadrement du reste. Par ailleurs, la formule de Taylor-Young exige que f soit de classe C^n quand il s'agit d'un développement d'ordre n , mais celle de Taylor-Lagrange nécessite que f soit de classe C^{n+1} .

5.3 Développement limité au voisinage d'un point:

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

Définition 5.3.1:

Soit $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité (DL) au point a à l'ordre n dans le cas où il existe $c_0, c_1, \dots, c_n$ et une fonction $\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}$ qui pour chaque $x \in I$ satisfait à

$$f(x) = \underbrace{c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n}_{T_n(x)} + \underbrace{(x-a)^n \varepsilon(x)}_{R_n(x)}$$

Les formules de Taylor nous permettent d'obtenir un DL en posant $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.
 Du moment que f soit de classe C^n sur I , alors le DL qui vient de la formule de Taylor-Young est donnée par

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Remarque: Si $a = 0$ la formule de Taylor s'appelle développement de Maclaurin

exemple 5.3

DL de $f(x) = \sin x$ au voisinage de π à l'ordre $n=5$

$$f(\pi) = \sin \pi = 0$$

$$f'(x) = \cos x \quad f'(\pi) = -1$$

$$f''(x) = -\sin x \quad f''(\pi) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \quad f'''(\pi) = 1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \quad f^{(4)}(\pi) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x \quad f^{(5)}(\pi) = -1$$

$$f^{(6)}(x)$$

$$\text{donc } f(x) = (x-\pi) - \frac{1}{6}(x-\pi)^3 + \frac{(x-\pi)^5}{120} + (x-\pi)^5 \varepsilon(x)$$

$\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pi} 0$

$$\varepsilon(x) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow \pi$$

5.3.1 DL des fonctions usuelles au voisinage de 0

Les DL des fonctions les plus utilisées au voisinage de 0

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+3} \varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2^n n!} x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^{n+1} \varepsilon(x)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\sinh x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+3} \varepsilon(x)$$

5.3.2 Unicité d'un DL

Dans cette partie, on va montrer que si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, admet un DL au voisinage d'un point $a \in I$, alors ce DL est unique. Supposons que f admet deux D.L au pt a

c'est à dire

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots + b_n(x-a)^n + \varepsilon_1(x)(x-a)^n$$

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \varepsilon_2(x)(x-a)^n$$

avec b_i et c_i sont des réels pour $i=0, \dots, n$ et $\varepsilon_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, $\varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

$$\text{donc } (b_0 - c_0) + (b_1 - c_1)(x-a) + \dots + (b_n - c_n)(x-a)^n + (\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x))(x-a)^n = 0$$

On remplace $x = a$ dans $|A|$ on obtient $c_0 = b_0$. Après avoir divisé (A) par $(x - a)$, on obtient $c_2 = b_2, c_3 = b_3, \dots, c_{n-1} = b_{n-1}$

Enfin $(c_n - b_n) + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) = 0 \quad \forall x \in I$

quand $x \rightarrow a$ on a $c_n = b_n$ et donc $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x) \quad \forall x \in I$

5.3.3 Les principales propriétés du D.L

On va présenter les propriétés nécessaires à connaître pour le D.L au voisinage de c

Somme et produit

Soient les fonctions $M: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $L: I \rightarrow \mathbb{R}$ où I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ qui ont des D.L d'ordre n au point donné par

$$M(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + x^n \varepsilon_1(x)$$

$$L(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots + d_n x^n + x^n \varepsilon_2(x)$$

avec $\varepsilon_1(x) \rightarrow 0, \varepsilon_2(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. Donc $M+L$ possède un D.L au pt 0 d'ordre n donné par

$$(M+L)(x) = c_0 + d_0 + (c_1 + d_1)x + (c_2 + d_2)x^2 + \dots + (c_n + d_n)x^n + x^n \underbrace{(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))}_{\varepsilon(x)}$$

et $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$

Aussi $M \times L$ possède un D.L d'ordre n au point 0 donné par

$$(M \times L)(x) = T_n(x) + x^n \varepsilon(x)$$

où $T_n(x) = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n)(d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots + d_n x^n)$

ceci en prenant uniquement les coefficients des monômes de degré $\leq n$, le reste des termes on l'introduit dans le reste $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0

Exemple 5.61 $f(x) = e^x \cos x$

Le D.L de f à l'ordre 4 au pt 0

D.L de e^x à l'ordre 4 au pt 0

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon_1(x) \quad \varepsilon_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

D.L de $\cos x$ à l'ordre 4 au voisinage de 0

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon_2(x) \quad \varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\text{Donc } f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon_1(x)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon_2(x)\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{2! \cdot 2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon(x)$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + x^4 \varepsilon(x) \quad \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + x^4 \varepsilon(x) \quad \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

(5)

Exemple 5.5

Le D.L de $h(x) = (1 + \ln(1-x))^3$ à l'ordre 3 au voisinage de 0

$$\text{on a } 1 + \ln(1-x) = 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_1(x) \quad \varepsilon_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\begin{aligned} \text{donc } (1 + \ln(1-x))^2 &= (1 + \ln(1-x))(1 + \ln(1-x)) \\ &= \left(1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_1(x)\right) \left(1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_1(x)\right) \\ &= 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_2(x) \\ (1 + \ln(1-x))^2 &= 1 - 2x + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_2(x) \quad \varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + \ln(1-x))^3 &= (1 + \ln(1-x))^2 (1 + \ln(1-x)) = \left(1 - 2x + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_2(x)\right) \left(1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_1(x)\right) \\ &= 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - 2x + 2x^2 + x^3 + \frac{x^3}{6} + \dots \\ &= 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 + x^3 + x^3 \varepsilon_3(x) \quad \varepsilon_3(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Composition

Soient les fonctions M et L qui ont des DL d'ordre n au point 0 donnés par

$$\begin{aligned} M(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + x^n \varepsilon_1(x) \quad \varepsilon_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ L(x) &= d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots + d_n x^n + x^n \varepsilon_2(x) \quad \varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Si $L(0) = 0$ on a $d_0 = 0$ donc $M \circ L$ possède un DL d'ordre n au pt 0 comme suit

$$(M \circ L)(x) = T_n(x) + x^n \varepsilon(x)$$

où $T_n(x) = C(D(x))$ en prenant uniquement les coefficients des monômes de degré $\leq n$ le reste des termes on les met dans le reste $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0

Remarque

La condition $L(0) = 0$ est nécessaire, car quand $x \rightarrow 0$ si $L(0) \neq 0$ alors on peut pas parler du DL au voisinage de 0 de $M(L(x))$.

Exemple 5.6

le DL de $h(x) = \sqrt{1 + \sin x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0

on a $\sin 0 = 0$ donc la composition est faisable.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_1(x) \quad \varepsilon_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + u^3 \varepsilon_2(x) \quad \varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$u^2 = \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 = x^2 + x^3 \varepsilon_3(x) \quad \varepsilon_3(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

⑥

$$U^3 = U^2 \times U = \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)x^2 = x^3 \varepsilon_4(x) x^3 \quad \varepsilon_4(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

On déduit que $\sqrt{1 + \sin x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} - \frac{x^5}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3 \varepsilon(x)$
 $= 1 + x - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + x^3 \varepsilon(x) \quad \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

le DL de $f(x) = e^{\sin x}$ en 0 à l'ordre 4

$\sin(0) = 0$ donc le D.L est faisable

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_1(x) \quad \varepsilon_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$f(x) = e^U = 1 + U + \frac{U^2}{2!} + \frac{U^3}{3!} + \frac{U^4}{4!} + \frac{U^4}{4!} \varepsilon_2(x) \quad \varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$U^2 = \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 = x^2 - \frac{2x^4}{3!} + x^3 \varepsilon_3(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + x^3 \varepsilon_3(x) \quad \varepsilon_3(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$U^3 = U^2 \cdot U = \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right)\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) = x^3 - \frac{x^4}{3!} + \varepsilon_4(x) x^4 \quad \varepsilon_4(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$U^4 = U^3 \cdot U = \left(x^3 - \frac{x^4}{3!}\right)\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) = x^4 + x^4 \varepsilon_5(x) \quad \varepsilon_5(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

donc $f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{3 \cdot 2!} + \frac{x^4}{6!} - \frac{x^4}{3!3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon(x)$
 $= 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{8} + x^4 \varepsilon(x) \quad \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

Quotient:

Soient M et L deux fonctions dont le DL à l'ordre n au voisinage de 0 sont

données par $M(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x)$
 $L(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x)$ (P, Q sont les parties polynômiales des DL de M et L)

donc $\frac{M(x)}{L(x)}$ possède un DL à l'ordre n au voisinage de 0 défini par

$$\frac{M(x)}{L(x)} = R(x) + x^n \varepsilon(x) \quad (R(x) \text{ le polynôme obtenu en effectuant la division de P sur Q suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre n})$$

Exemple 5.7

Le D.L de $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ à l'ordre 5 au voisinage de 0

$$\begin{array}{r} 1x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \\ x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \\ \hline \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} \\ x^3 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6} \\ \hline \frac{2x^5}{15} \\ -2x^5 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5 \varepsilon(x)$$

Intégration

Soit F une primitive d'une fonction f .

La fonction F admet un DL d'ordre $n+1$ au point a qui s'écrit

$$F(x) = F(a) + c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \frac{c_2}{3}(x-a)^3 + \dots + \frac{c_n}{(n+1)}(x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1})$$

où $\lim_{x \rightarrow a} \frac{c_n}{(n+1)} = 0$. Cela signifie que l'on intègre la partie

polynomiale terme à terme pour obtenir le D.L de $F(x)$ à la constante $F(a)$ près.

Exemple 5.9

Le D.L de $f(x) = \arctan x$ au voisinage de 0

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ alors } f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\text{et } f(0) = 0, \text{ d'où } f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Remarque

Toutes les propriétés que nous avons vu dans cette partie se peuvent appliquer pour un DL au voisinage d'un point a quelconque, il suffit de faire le changement de variable $y = x - a$.

5.4 Application du DL:

5.4.1 Calcul des limites au voisinage d'un point

Le DL au voisinage d'un point est très efficace pour le calcul d'une limite dans ce point, dans le cas où nous avons une forme indéterminée. En fait si f admet un DL au voisinage de a donné par

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c_0$$

Exemple 5.9

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \cos x - x} = \frac{0}{0} = \text{I.D.}$$

(on fait un DL d'ordre 3 au voisinage de 0)

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_1(x) \text{ avec } \varepsilon_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$x \cos x - x = -\frac{x^3}{2!} + x^3 \varepsilon_2(x) \text{ avec } \varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_1(x)}{-x^2 + x^3 \varepsilon_2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} + \varepsilon_1(x)}{\frac{1}{2} + \varepsilon_2(x)} = \frac{1}{3}$$

54.2 Calcul des limites au voisinage de l'infini

DL au voisinage de l'infini

Soit f une fct de classe C^n définie sur un intervalle de la forme $I =]x_0, +\infty[$

On dit que f possède un DL à l'ordre n en $+\infty$ dans le cas où il existe des réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ pour lesquels

$$f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{1}{x^n} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

On faisant un changement de variable $y = \frac{1}{x}$, alors lorsque $x \rightarrow +\infty$ on aura $y \rightarrow 0$

Donc la fonction $f(x) = g(y)$ est de classe C^n au voisinage de 0 et g un DL à l'ordre n au voisinage de 0

$$g(y) = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \dots + c_n y^n + \varepsilon(y) y^n$$

$$\varepsilon(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$$

Exemple 5.9

DL d'ordre n à l'infini de $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

posons $y = \frac{1}{x}$ donc

$$\ln(1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \dots = \frac{y^4}{4} + y^4 \varepsilon(y) \quad \varepsilon(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$$

$$\text{D'où } \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} - \dots = \frac{1}{4x^4} + \frac{1}{4x^4} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \quad \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Dans l'exemple suivant nous utilisons le DL à l'infini pour calculer une limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot x} = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$y = \frac{1}{x} \quad x \rightarrow +\infty \quad y \rightarrow 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} e^{\frac{1}{y} \ln(1+y)}$$

$$\text{on a } \ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - y^3 \varepsilon_1(y)$$

$$\text{donc } \frac{\ln(1+y)}{y} = 1 - \frac{y}{2} + \frac{y^2}{3} + y^2 \varepsilon_1(y)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+y)}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} e^{1 - \frac{y}{2} + \frac{y^2}{3} + y^2 \varepsilon_1(y)} = e$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

4.3 Position d'une courbe par rapport à sa tangente :

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède un DL au point a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^k \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, $f^{(k)}(a) \neq 0$ tel que $k \in \{2, 3, \dots\}$ est le premier entier naturel à partir de 2 pour lequel $f^{(k)}(a) \neq 0$. L'équation de la droite tangente de f au point a s'écrit

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

c'est à dire la position de f par rapport à sa tangente en a est obtenue par.

$$f(x) - y = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^k \varepsilon(x)$$

le signe de $f(x) - y$ découle du signe de $f^{(k)}(a)(x-a)^k$.

• Lorsque $f(x) - y > 0$, alors le graphe de f est au dessus de la tangente

• Lorsque $f(x) - y < 0$, le graphe de f est au dessous de la tangente

• Si $(x-a)^k$ change de signe lorsque $x < a$ à $x > a$, on dit que a est un point d'inflexion

Exemple 5.10

Soit la fonction $f(x) = \frac{x(1+\cos x) - 3 \tan x}{2x - \sin x - 2 \tan x}$

Déterminons la position de f par rapport à sa tangente en 1 on a

$$\begin{aligned} \frac{x(1+\cos x) - 3 \tan x}{2x - \sin x - 2 \tan x} &= \frac{x(1+1 - \frac{x^2}{2!} + x^2 \varepsilon_1(x)) - 3(x + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_2(x))}{2x - (x - \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_3(x)) - 2(x + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_4(x))} \\ &= \frac{-x - \frac{3}{2}x^3 + x^3 \varepsilon_5(x)}{-x - \frac{2}{3}x^3 + x^3 \varepsilon_6(x)} = \frac{1 + \frac{3}{2}x^2 + x^2 \varepsilon_5(x)}{1 + \frac{2}{3}x^2 + x^2 \varepsilon_6(x)} \end{aligned}$$

donc

$$f(x) - y = x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

c'est à dire le grapho de f est au dessus de la tangente

4.4 Position du grapho d'une fonction par rapport à une asymptote

Definition 4.4.1

considérons une fonction f définie sur un intervalle de la forme $]x_0, +\infty[$ ou $]-\infty, x_0[$. On dit qu'une droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique de f lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$

En outre, si $y = ax + b$ est une asymptote oblique de f , alors on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$$

La méthode de déterminer la position de f par rapport à son asymptote oblique est basée sur le DL de $\frac{f(x)}{x}$ au voisinage de ∞ . En fait

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_{l-1}}{x^{l-1}} + \frac{1}{x^l} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

pour $l \geq 2$ tel que $a_l \neq 0$. Dans ce cas $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a_0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - a_0 x) = a_1$

dans l'asymptote oblique est d'équation $y = a_0 x + a_1$ et la position de f par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $\frac{a_l}{x^l}$

Exemple 5.11 Soit la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x^2 - 1}$
on a $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x^2 - 1}}{x} = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$

$$y = \frac{1}{x} \quad \begin{matrix} x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 0^+ \end{matrix} \quad \text{donc} \quad e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = e^y \sqrt{1 - y^2} = (1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} \varepsilon(y)) \left(1 - \frac{y^2}{2} + y^2 \varepsilon(y)\right)$$

$$= 1 + y - \frac{y^3}{3} + y^3 \varepsilon(y) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x^3} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

donc $a_0 = 1$ et $a_1 = 1$ c'est à dire l'asymptote oblique est $y = x + 1$ et la position du grapho de f par rapport à cette asymptote est obtenue par le signe de $-\frac{1}{3x^3}$ qui est négatif au voisinage de $+\infty$. On conclut que le grapho de f est au dessous de $y = x + 1$ à $+\infty$

