Un mouvement oscillatoire est un mouvement qui s'effectue alternativement au cours du temps de part et d'autre d'une position d'équilibre. Si ce mouvement est rapide, on parle de mouvement vibratoire.

Le mouvement oscillatoire d'un système libre à un degré de liberté est régi par une équation différentielle générale de la forme :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

x : coordonnée généralisée ; $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$: vitesse généralisée ; $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\dot{x}}{dt}$: accélération généralisée ; λ : constante ou facteur d'amortissement ; ω_0 : pulsation propre du système.

1. Systèmes libres non amortis à un degré de liberté ($\lambda = 0$)

1.1. Equation différentielle du mouvement

C'est le cas des systèmes non soumis aux forces de frottement et aux excitations externes. L'équation différentielle du mouvement se réduit à :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

La solution de cette équation est de la forme : $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

A: amplitude ; φ : phase initiale.

1.2. Equation de Lagrange

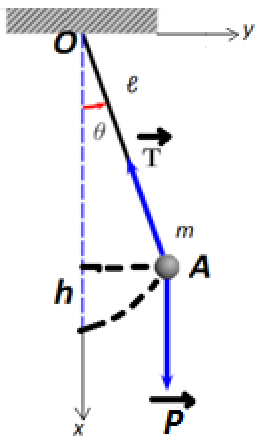
Pour ce type de systèmes, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

1.3. Exemples

1.3. 1. Pendule simple

- **Méthode de Newton (équation fondamentale de la dynamique)**



Soit un pendule de masse *m* et de longueur ℓ. On choisit un repère *Oxyz* de vecteurs unitaires $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$. Pendant le mouvement, la masse m est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la tension du fil $\vec{T}$ (figure ci − contre).

Ecrivons l'équation du mouvement de rotation autour de l'axe Oz à un instant où la masse se dirige vers le haut suivant le sens positif du repère *Oxyz* choisi :

$\overrightarrow{M_{/Oz}} = \sum_i \overrightarrow{M_{i/Oz}} = +J\vec{\ddot{\theta}} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{T} = J\ddot{\theta}\vec{k}$

Avec : $J = m\ell^2$ et $\overrightarrow{OA} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ ($\vec{T}$ passe par *Oz*)

$\begin{pmatrix} \ell\, cos\theta \\ \ell\, sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m\ell^2\ddot{\theta}\vec{k} \Rightarrow -\ell\, sin\theta\, mg = m\ell^2\ddot{\theta}$

Pour les petites oscillations (ϑ très petit), on peut écrire les approximations suivantes : $\begin{cases} \sin\theta \approx \theta \\ cos\theta \approx 1 \end{cases}$ (développement limité des fonctions *sin x* et *cos x* pour $x \to 0$).

On aura : $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$; la pulsation propre du système est donc : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

- **Méthode de Lagrange**

$$\begin{cases} Energie\ cinétique\ de\ rotation\ de\ m :\ E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \\ Energie\ potentelle\ de\ m :\ E_p = mgh = mg\ell(1 - cos\theta) \end{cases}$$

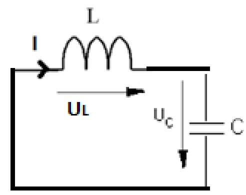
Le Lagrangien est égal à $L = E_c - E_p = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mg\ell(1 - cos\theta)$

Equation de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$; $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = J\dot{\theta} \to \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = J\ddot{\theta}$; $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\ell\, sin\theta \approx -mg\ell\theta$

On aura : $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$

1.3. 1. Circuit LC

Soit un circuit LC parcouru par un courant I.



- **Loi de Kirchhoff**

$$\sum_i U_i = 0 \ \to\ U_L + U_c = 0$$

Tension aux bornes de la bobine : $U_L = L\frac{dI}{dt}$

Tension aux bornes du condensateur : $U_c = \frac{1}{C}\int I\, dt$

Sachant que le courant est relié à la charge électrique *q* par : $I = \dot{q} = \frac{dq}{dt}$,

On aura : $L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0 \ \to\ \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$, la pulsation propre du circuit est donc : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

- **Conservation de l'énergie**

$$W_m + W_e = constante \ \to\ \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}CU_c^2 = constante$$

En dérivant, on aura : $LI\frac{dI}{dt} + CU_C\frac{dU_C}{dt} = 0$

Sachant que : $q = CU_C$, $I = \dot{q} = \frac{dq}{dt}$ et $U_c = \frac{1}{C}\int I\, dt$, on obtient l'équation finale :

$$L\dot{q}\ddot{q} + C\frac{q}{C}\frac{1}{C}\dot{q} = 0 \to \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

2. Systèmes libres amortis à un degré de liberté

2.1. Equation différentielle du mouvement

Pour le cas du frottement visqueux, l'équation différentielle régissant le mouvement des oscillations libres amorties est donnée par :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

La solution de cette équation dépend du signe du discriminant $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$ de l'équation caractéristique : $P^2 + 2\lambda P + \omega_0^2 = 0$.

a) Si $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0 \rightarrow \lambda < \omega_0$, on a un régime pseudo-périodique et la solution prend la forme :

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ est la pseudo-pulsation, la pseudo-période est donc $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$

Ce régime est obtenu pour un faible amortissement.

b) Si $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = 0 \rightarrow \lambda = \omega_0$, on a un régime apériodique-critique et la solution prend la forme :

$$x(t) = (A + Bt)\, e^{-\lambda t}$$

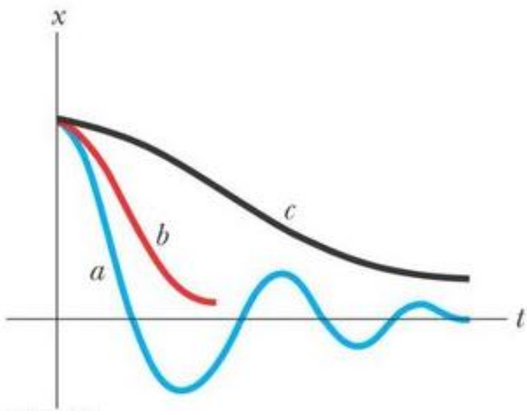
Ce régime est obtenu pour un amortissement critique.

c) Si $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 > 0 \rightarrow \lambda > \omega_0$, on a un régime apériodique et la solution prend la forme :

$$x(t) = Ae^{P_1 t} + B^{P_2 t} \text{ avec } P_1 = -\lambda - \sqrt{\Delta'} \text{ et } P_2 = -\lambda + \sqrt{\Delta'}$$

Ce régime est obtenu pour un fort amortissement.

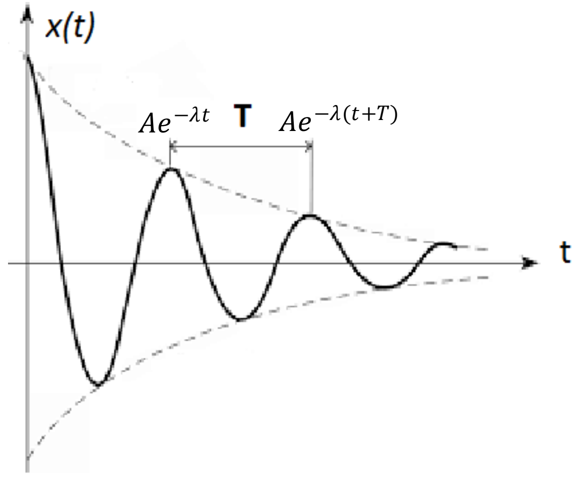
La figure ci-dessous montre la variation de la coordonnée *x* en fonction du temps pour les trois cas (*a*, *b* et *c*). Dans tous les cas, le système revient à sa position d'équilibre avec le temps.



2.2. Décrément logarithmique (régime pseudo-périodique)

C'est le logarithme du rapport de deux amplitudes successives, séparées d'une durée égale à la pseudo-période *T*:

$$\delta = Ln\left[\frac{Ae^{-\lambda t}}{Ae^{-\lambda(t+T)}}\right] = Ln\left[e^{\lambda T}\right] = \lambda T$$



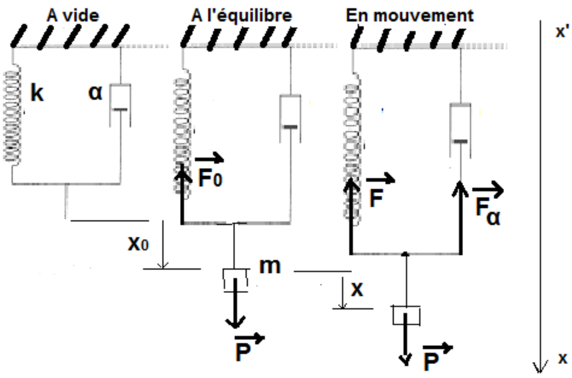
2.3. Equation de Lagrange

Pour ce type de système, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}$$

2.4. Exemples

2.4.1. Système masse-ressort-amortisseur



- A l'équilibre : $\sum \vec{F_i} = \vec{0} \rightarrow \vec{P} + \vec{F_0} = \vec{0}$

  Projection sur l'axe *x'x* : $mg - kx_0 = 0$

- En mouvement : $\sum \vec{F_i} = m\vec{\ddot{x}} \rightarrow \vec{P} + \vec{F} + \vec{F_\alpha} = m\vec{\ddot{x}}$

  Projection sur l'axe *x'x* : $mg - k(x_0 + x) - \alpha\dot{x} = m\ddot{x}$

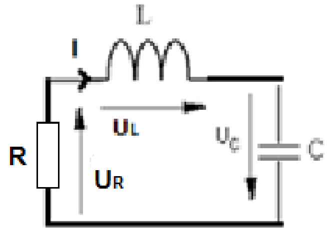
  En tenant compte de la condition d'équilibre, on aura :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

La constante d'amortissement et la pulsation propre du système sont alors :

$$\lambda = \frac{\alpha}{2m} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2.4.2. Circuit RLC



Soit un circuit RLC traversé par un courant I.

Loi de Kirchhoff :

$$\sum_i U_i = 0 \rightarrow U_L + U_c + U_R = 0$$

Tension aux bornes de la bobine : $U_L = L\frac{dI}{dt}$

Tension aux bornes du condensateur : $U_c = \frac{1}{C}\int I\,dt$

Tension aux bornes de la résistance : $U_R = RI$

Sachant que le courant est relié à la charge électrique q par : $I = \dot{q} = \frac{dq}{dt}$,

On aura : $L\ddot{q} + \frac{q}{C} + R\dot{q} = 0 \rightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$, la constante d'amortissement et la pulsation propre du circuit sont donc : $\lambda = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$