Le mouvement oscillatoire d'un système forcé à un degré de liberté est régi par une équation différentielle générale de la forme :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

$f(t)$: force (ou moment) généralisée agissant sur le système (excitation externe).

1. Systèmes forcés non amortis à un degré de liberté ($\lambda = 0$)

1.1. Equation différentielle du mouvement

L'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

La solution de Cette équation est la superposition d'une solution homogène (x_h) et d'une solution particulière (x_p) :

$$x = x_h + x_p$$

1.1.1. Cas d'une excitation sinusoïdale

Prenons le cas d'une excitation sinusoïdale de pulsation excitatriceω_e. L'équation différentielle est alors de la forme :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = a \cos\ \omega_e t$$

- Solution homogène : c'est la solution de l'équation différentielle $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ en absence de l'excitation externe. Elle s'écrit sous la forme d'une fonction sinusoïdale :

$$x_h(t) = A \cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$

- Solution particulière : on a deux cas

  - **Si $\boldsymbol{\omega_e \neq \omega_0}$**, x_p prend la forme $x_p = A_p \cos\left(\omega_e t + \varphi_p\right)$

    A_p et φ_p sont calculés sachant que x_p doit être une solution de l'équation différentielle $\ddot{x}_p + \omega_0^2 x_p = a \cos\ \omega_e t$. En dérivant et en remplaçant, on aura :

$$-A_p\omega_e^2 \cos\left(\omega_e t + \varphi_p\right) + A_p\omega_0^2 \cos\left(\omega_e t + \varphi_p\right) = a \cos\ \omega_e t$$

En utilisant l'identité $\cos(a + b) = cosa\ cosb - sina\ sinb$, l'équation peut s'écrire :

$$A_p(\omega_0^2 - \omega_e^2)\left[\cos\omega_e t\ cos\varphi_p\ - sin\omega_e t\ sin\varphi_p)\right] = a \cos\ \omega_e t$$

En identifiant terme à terme, on aura le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} A_p(\omega_0^2 - \omega_e^2)cos\varphi_p \ = a \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1) \\ A_p(\omega_0^2 - \omega_e^2)\ sin\varphi_p \ = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2) \end{cases}$$

$(2) \rightarrow \varphi_p = 0$ ou π et donc $(1) \rightarrow A_p = \frac{a}{\omega_0^2-\omega_e^2}$ ou $\frac{-a}{\omega_0^2-\omega_e^2}$

La solution particulière s'écrit alors :

$$x_p = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega_e^2} cos\omega_e t$$

La solution de l'équation différentielle est donc de la forme :

$$x = x_h + x_p = \ A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega_e^2} cos\omega_e t$$

Les constantes A et φ sont déterminées par les conditions initiales du système.

- **Si $\boldsymbol{\omega_e = \omega_0}$**, x_p prend la forme $x_p = A_p\ t\cos(\omega_e t + \varphi_p)$

En dérivant et en remplaçant dans l'équation différentielle, on aura :

$$-2A_p\omega_e\sin(\omega_e t + \varphi_p) - A_p\omega_e^2 t\cos(\omega_e t + \varphi_p) + A_p\omega_0^2 t\cos(\omega_e t + \varphi_p) = a\cos\ \omega_e t$$

Le deuxième et le troisième terme se neutralisent car $\omega_e = \omega_0$, et en utilisant l'identité $\sin(a + b) = sina\ cosb + cosa\ sinb$, on aura :

$$-2A_p\omega_e[\sin\omega_e t\ cos\varphi_p + cos\omega_e t\ sin\varphi_p] = a\cos\ \omega_e t$$

D'où le système :

$$\begin{cases} -2A_p\omega_e cos\varphi_p = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(3) \\ -2A_p\omega_e\ sin\varphi_p = a \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(4) \end{cases}$$

$(3) \rightarrow \varphi_p = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{-\pi}{2}$ et donc $(4) \rightarrow\ A_p = \frac{-a}{2\omega_e}$ ou $\frac{a}{2\omega_e}$

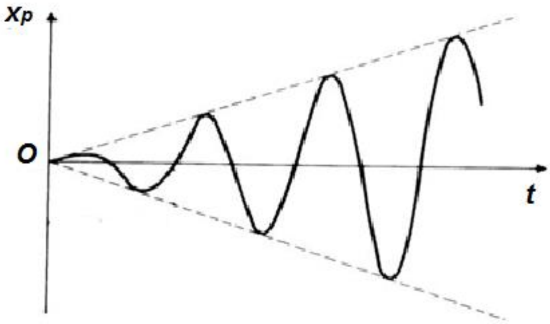
La solution particulière s'écrit alors :

$$x_p = \frac{a}{2\omega_e} t\ cos(\omega_e t - \frac{\pi}{2})$$

La solution de l'équation différentielle est donc de la forme :

$$x = x_h + x_p = \ A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{a}{2\omega_e} t\ cos(\omega_e t - \frac{\pi}{2})$$

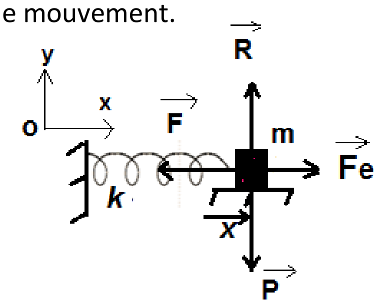
En analysant l'expression de la solution, on remarque que l'amplitude de x_h est limitée à $\pm A$, alors que celle de x_p, égale à $A_p = \frac{a}{2\omega_e} t$, prend des valeurs infinies avec le temps (figure ci-dessous). Ce phénomène, appelé phénomène de résonance, peut causer la destruction du système.



1.1.2. Exemples

On prend le cas du système masse-amortisseur horizontal

- Force excitatrice $\vec{F_e} = F_0 cos\omega_e t \, \vec{\imath}$ agissant sur la masse pendant le mouvement.

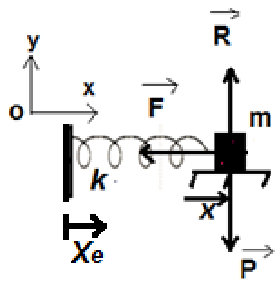


$$\sum \vec{F} = m\,\vec{\ddot{x}} \rightarrow \vec{F} + \vec{P} + \vec{R} + \vec{F_e} = m\,\vec{\ddot{x}}$$

Projection sur l'axe Oy : $P = R$
Projection sur l'axe Ox : $-kx + F_e = m\ddot{x}$

L'équation différentielle s'écrit alors : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}cos\omega_e t$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $a = \frac{F_0}{m}$

- Déplacement excitateur $X_e = X_0 cos\omega_e t$ agissant sur le ressort pendant le mouvement :



$$\sum \vec{F} = m\,\vec{\ddot{x}} \rightarrow \vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{\ddot{x}}$$

Projection sur l'axe Oy : $P = R$
Projection sur l'axe Ox : $-k(x - X_e) = m\ddot{x}$

L'équation différentielle s'écrit alors : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{kX_0}{m}cos\omega_e t$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $a = \frac{kX_0}{m}$

1.1.3. Equation de Lagrange

L'équation de Lagrange régissant le mouvement des systèmes oscillatoire forcés non amortis à un degré de liberté de coordonnée généralisée q s'écrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = f(t)$$

$f(t)$ est la force (ou moment) généralisée excitatrice qui agit sur le système.

2. Systèmes forcés amortis à un degré de liberté

2.1. Equation différentielle du mouvement

Le mouvement oscillatoire d'un système forcé amorti à un degré de liberté est régi par une équation différentielle générale de la forme :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

De même que pour les systèmes forcés non amortis, la solution de cette équation est la superposition d'une solution homogène (x_h) et d'une solution particulière (x_p) :

$$x = x_h + x_p$$

2.1.1. Cas d'une excitation sinusoïdale

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = a\cos\,\omega_e t$$

- Solution homogène : elle correspond à la solution de l'équation $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (voir chapitre 2) :

$$\begin{cases} Si\ \lambda < \omega_0 : x_h(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)\,, \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \\ \qquad Si\ \lambda = \omega_0 : \qquad x_h(t) = (A+Bt)\,e^{-\lambda t} \\ Si\ \lambda > \omega_0 : x_h(t) = Ae^{P_1 t} + B^{P_2 t}\,, P_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

- Solution particulière : elle prend la même forme que l'excitation. Elle s'écrit sous la forme :

$$x_p = A_p\cos\left(\omega_e t + \varphi_p\right)\ \forall\omega_e$$

Sachant que x_p vérifie l'équation différentielle et en utilisant la représentation complexe, on aura :

$$\overline{x_p(t)} = A_p\,e^{j(\omega_e t + \varphi_p)};\ \overline{\dot{x}_p(t)} = j\omega_e A_p\,e^{j(\omega_e t + \varphi_p)};\ \overline{\ddot{x}_p(t)} = -\omega_e^2 A_p\,e^{j(\omega_e t + \varphi_p)}$$

$$-\omega_e^2 A_p\,e^{j(\omega_e t + \varphi_p)} + 2\lambda j\omega_e A_p\,e^{j(\omega_e t + \varphi_p)} + \omega_0^2 A_p\,e^{j(\omega_e t + \varphi_p)} = ae^{j(\omega_e t)}$$

$$A_p\{(\omega_0^2 - \omega_e^2) + 2\lambda j\omega_e\}e^{j\varphi_p} = a \rightarrow A_p^* = A_p e^{j\varphi_p} = \frac{a}{(\omega_0^2 - \omega_e^2) + 2\lambda j\omega_e}$$

$$\text{On aura:} \begin{cases} A_p = \dfrac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4\lambda^2\omega_0^2}} \\ \varphi_p = -arctg\left(\dfrac{2\lambda\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}\right) \end{cases}$$

La solution de l'équation différentielle est donc de la forme :

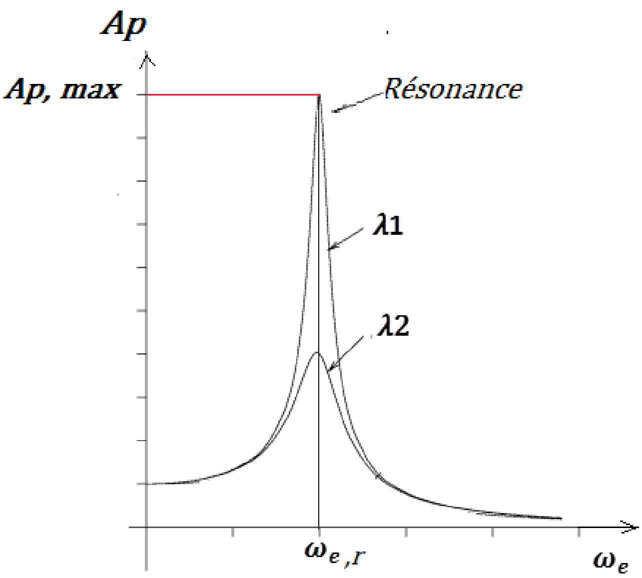
$$x = x_h + x_p = x_h + A_p\cos\left(\omega_e t + \varphi_p\right)$$

2.1.2. Etude de la solution particulière

Pour un temps suffisamment grand, la solution homogène x_h de l'équation différentielle s'atténue (tend vers zéro) quel que soit le régime (pseudo-périodique, apériodique-critique ou apériodique). Cette solution correspond à un **régime transitoire**. Le système continue à osciller suivant la solution particulière x_p qui correspond alors au **régime permanent** :

$$\lim_{t\to\infty} x = \lim_{t\to\infty}\left[\underbrace{x_h}_{régime\ transitoire} + \underbrace{x_p}_{régime\ permanent}\right] = \underbrace{x_p}_{régime\ permanent} = A_p\cos\left(\omega_e t+\varphi_p\right)$$

L'étude de la variation de l'amplitude $A_p = \frac{a}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_e^2\right)^2+4\lambda^2\omega_0^2}}$ en fonction de la pulsation excitatrice $\omega_e$pour $\omega_0 > \sqrt{2}\lambda$ permet de conclure qu'un phénomène de résonance peut se produire pour les faibles amortissements (λ très faible) à une pulsation $\omega_{e,r} = \sqrt{\omega_0^2-2\lambda^2}$. Comme le montre la figure ci-dessous ($\lambda1 < \lambda2$), l'intensité $A_{p,max} = \frac{a}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}$ du pic correspondant au maximum de A_p est d'autant plus importante que λ est faible.



2.1.3. Equation de Lagrange

L'équation de Lagrange régissant le mouvement des systèmes oscillatoire forcés amortis à un degré de liberté de coordonnée généralisée q s'écrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}+f(t)$$

$f(t)$ est la force (ou moment) généralisée excitatrice qui agit sur le système.

3. Cas d'une excitation périodique quelconque

Si le système est soumis à une excitation périodique de pulsation excitatrice $\boldsymbol{\omega_e}$définie par une fonction développable en séries de Fourier, le problème revient à résoudre une équation différentielle ayant un second membre constitué de la superposition de fonctions sinusoïdales :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(n\omega_e t + \varphi_n\right)$$

La solution particulière x_p de cette équation est à la superposition de solutions particulières x_{pi} correspondant aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 + 2\lambda\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = \dfrac{a_0}{2} - - - - - - - - - - - - - - \rightarrow x_{p0} \\ \ddot{x}_1 + 2\lambda\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = C_1\cos\left(\omega_e t + \varphi_1\right) - - - - - - - - \rightarrow x_{p1} \\ \ddot{x}_2 + 2\lambda\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = C_2\cos\left(2\omega_e t + \varphi_2\right) - - - - - - - - \rightarrow x_{p2} \\ \vdots \\ \ddot{x}_i + 2\lambda\dot{x}_i + \omega_0^2 x_i = C_i\cos\left(i\omega_e t + \varphi_i\right) - - - - - - - - \rightarrow x_{pi} \end{cases}$$

La résolution de chaque équation de ce système se fera de la même manière que pour le cas d'une excitation sinusoïdale vu aux paragraphes précédents pour les systèmes non amortis ($\lambda = 0$) ou amortis ($\lambda \neq 0$). La solution particulière de l'équation différentielle s'écrira sous la forme :

$$x_p = \sum_{i=0}^{\infty} x_{pi}$$

4. Analogie électromécanique

Le tableau ci-dessous résume les analogies électromécaniques selon la convention $\boldsymbol{masse \leftrightarrow inductance}$.

Translation	Rotation	Electricité
Déplacement : *x*	Angle : θ	Charge électrique : *q*
Vitesse linéaire : $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$	Vitesse angulaire : $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$	Courant électrique : $\dot{q} = \frac{dq}{dt} = I$
Force : $\vec{F}$	Moment : $\vec{M}$	Tension : *U*
Masse : *M*	Moment d'inertie : *J*	Inductance : *L*
Coefficient de frottement : *α*	Coefficient de frottement : *α*	Résistance : *R*
Raideur : *k*	Constante de torsion : *C*	Inverse de la capacité : $1/C$