Les systèmes à plusieurs degrés de liberté sont de systèmes dont les mouvements sont décrits par plusieurs coordonnées généralisées.

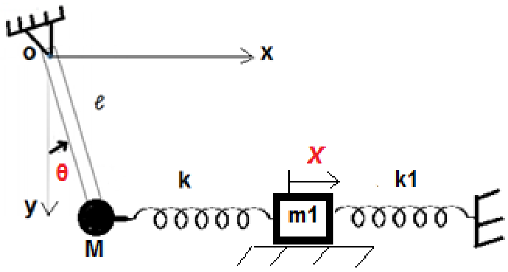
Ce type de systèmes est un assemblage ou couplage de plusieurs sous-systèmes à un degré de liberté, dont les mouvements des uns influent sur les mouvements des autres.

1. Différents types de couplage

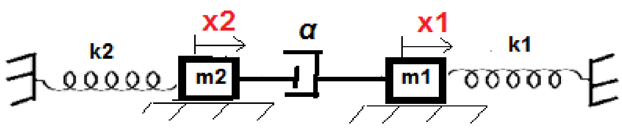
Le couplage entre les sous-systèmes constituants un système à plusieurs degrés de liberté se traduit par la présence de termes dits *étrangers* dans les équations différentielles régissant leurs mouvements. Si l'équation concerne le *ddl i*, on remarque la présence dans cette équation de termes relatifs aux autres *ddl j*, *k*, …etc.

En se limitant à ceux dits symétriques, on pourra distinguer les types de couplages suivants :

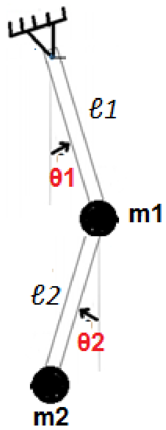
- Couplage élastique ou capacitif : termes proportionnels à la coordonnée généralisée (x, θ, q).



- Couplage visqueux ou résistif : termes proportionnels à la vitesse généralisée $(\dot{x}, \dot{\theta}, \dot{q} = I)$.



- Couplage inertiel ou inductif : termes proportionnels à l'accélération généralisée $(\ddot{x}, \ddot{\theta}, \ddot{q} = \dot{I})$.



2. Systèmes à deux degrés de liberté

Le mouvement oscillatoire d'un système à deux degrés de liberté est régi par un système de deux équations différentielles de la forme :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\lambda_1\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = a_1 x_2 + b_1\dot{x}_2 + c_1\ddot{x}_2 + f_1(t) \\ \ddot{x}_2 + 2\lambda_2\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = a_2 x_1 + b_2\dot{x}_1 + c_2\ddot{x}_1 + f_2(t) \end{cases}$$

x_1, x_2 : coordonnées généralisées

λ_1, λ_2 : constantes d'amortissement

ω_1, ω_2 : pulsations propres

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$: coefficients de couplage

$f_1(t), f_2(t)$: forces (ou moments) généralisées agissant sur le système (excitations externes).

- Si $b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0$: couplage élastique ou capacitif
- Si $a_1 = a_2 = c_1 = c_2 = 0$: couplage visqueux ou résistif
- Si $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$: couplage inertiel ou inductif
-

2.1. Systèmes libres non amortis à deux degrés de liberté avec couplage élastique

Le système d'équations différentielles s'écrit :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = a_1 x_2 \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = a_2 x_1 \end{cases}$$

Les solutions de ce système s'écrivent sous la forme : $x_1 = A_1\cos(\Omega t + \varphi_1)$ et $x_2 = A_2\cos(\Omega t + \varphi_2)$.

$\Omega = f(\omega_1, \omega_2)$ est la pulsation propre du système couplé.

$A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$: constantes à calculer sachant que x_1 et x_2 vérifient le système d'équations différentielles.

Représentation complexe :

$$\overline{x_1(t)} = A_1\, e^{j(\Omega t + \varphi_1)} = A_1^* e^{j\Omega t} \rightarrow \overline{\ddot{x_1}(t)} = -\Omega^2 A_1^*\, e^{j\Omega t}$$

$$\overline{x_2(t)} = A_2\, e^{j(\Omega t + \varphi_2)} = A_2^* e^{j\Omega t} \rightarrow \overline{\ddot{x_2}(t)} = -\Omega^2 A_2^*\, e^{j\Omega t}$$

En remplaçant dans le système d'équations, on aura :

$$\begin{cases} (\omega_1^2 - \Omega^2)A_1^* - a_1 A_2^* = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots.(1) \\ -a_2 A_1^* + (\omega_2^2 - \Omega^2)A_2^* = 0 \ldots\ldots\ldots.(2) \end{cases}$$

La solution de ce système dépend de la valeur du déterminant $det = \begin{vmatrix} \omega_1^2 - \Omega^2 & -a_1 \\ -a_2 & \omega_2^2 - \Omega^2 \end{vmatrix}$. On a deux cas :

- Si $det \neq 0$: $\rightarrow \begin{cases} A_1^* = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -a_1 \\ 0 & \omega_2^2 - \Omega^2 \end{vmatrix}}{det} = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ A_2^* = \dfrac{\begin{vmatrix} \omega_1^2 - \Omega^2 & 0 \\ -a_2 & 0 \end{vmatrix}}{det} = 0 \rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$ Dans ce cas, le système est à l'équilibre.
- Si $det = 0$: $\rightarrow \begin{cases} A_1^* = \frac{0}{0} \\ A_2^* = \frac{0}{0} \end{cases}$ Formes indéterminées. Il faut résoudre l'équation $det = 0$ pour lever l'indétermination et pouvoir calculer x_1 et x_2.

$$det = 0 \rightarrow (\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2) - a_1 a_2 = 0$$

$$\Omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\Omega^2 + \omega_1^2\omega_2^2 - a_1 a_2 = 0 \quad \text{Equation aux pulsations propres.}$$

$$\Delta = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4(\omega_1^2\omega_2^2 - a_1 a_2) = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4a_1 a_2$$

$$\Omega_1^2 = \frac{1}{2}\left[(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \sqrt{\Delta}\right]$$

$$\Omega_2^2 = \frac{1}{2}\left[(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \sqrt{\Delta}\right]$$

Ω_1 et Ω_2 sont appelées pulsations propres des modes normaux de vibration.

En supposant que $\omega_1 \leq \omega_2$, on peut montrer que : $\Omega_1 < \omega_1 \leq \omega_2 < \Omega_2$

- Si $\Omega = \Omega_1$, $(1) \rightarrow \frac{A_1^*}{A_2^*} = \frac{a_1}{\omega_1^2 - \Omega^2} > 0$
  $\frac{a_1}{\omega_1^2 - \Omega^2}$ étant un nombre réel positif, on peut écrire : $\varphi_1 = \varphi_2$

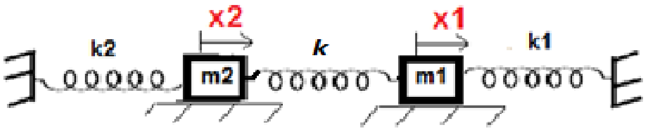
  Dans ce cas, les deux sous-systèmes oscillent en phase, c'est le premier mode de vibration.

- Si $\Omega = \Omega_2$, $(1) \rightarrow \frac{A_1^*}{A_2^*} = \frac{a_1}{\omega_1^2 - \Omega^2} < 0$
  $\frac{a_1}{\omega_1^2 - \Omega^2}$ étant un nombre réel négatif, on peut écrire : $\varphi_1 = \varphi_2 \mp \pi$

  Dans ce cas, les deux sous-systèmes oscillent en opposition de phase, c'est le deuxième mode de vibration.

Exemple

Soit le système de la figure ci-dessous où les masses peuvent glisser sans frottement suer le plan horizontal. Le ressort de constante de raideur k assure un couplage élastique entre les sous-systèmes de coordonnées x_1 et x_2.



Equations de Lagrange : $\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_2}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$

$$E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \; ; \; E_p = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$$

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2x_2^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}} = m_1\dot{x}_1 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}\right) = m_1\ddot{x}_1 \; ; \; \frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_1x_1 - k(x_1 - x_2)$
  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow \ddot{x}_1 + \left(\frac{k_1 + k}{m_1}\right)x_1 = \frac{k}{m_1}x_2$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x_2}} = m_2\dot{x}_2 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_2}}\right) = m_2\ddot{x}_2 \; ; \; \frac{\partial L}{\partial x_2} = -k_2x_2 + k(x_1 - x_2)$
  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_2}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow \ddot{x}_2 + \left(\frac{k_2 + k}{m_2}\right)x_2 = \frac{k}{m_2}x_1$

Les équations différentielles régissant le mouvement du système sont alors :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \left(\frac{k_1 + k}{m_1}\right)x_1 = \frac{k}{m_1}x_2 \\ \ddot{x}_2 + \left(\frac{k_2 + k}{m_2}\right)x_2 = \frac{k}{m_2}x_1 \end{cases}$$

Et on peut déduire que : $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1+k}{m_1}}$; $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2+k}{m_2}}$; $a_1 = \frac{k}{m_1}$ et $a_2 = \frac{k}{m_2}$

2.2. Systèmes forcés non amortis à deux degrés de liberté avec couplage élastique

En considérant que l'un des sous-systèmes est soumis à une excitation sinusoïdale $f_1(t) = F_0 \cos \omega_e t$, le système d'équations différentielles s'écrit :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = a_1x_2 + F_0 \cos \omega_e t \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = a_2x_1 \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont la superposition de solutions homogènes et de solutions particulières :

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{1h} + x_{1p} \\ x_2(t) = x_{2h} + x_{2p} \end{cases}$$

Les solutions homogènes, obtenues pour $f_1(t) = 0$, ont été calculées dans le paragraphe précédent et correspondent à deux modes de vibrations, en phase ou en opposition de phase :

$$\begin{cases} x_{1h}(t) = A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1) \\ x_{2h}(t) = A_2 \cos(\Omega t + \varphi_2) \end{cases} \text{avec } \Omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[(\omega_1^2 + \omega_2^2) \mp \sqrt{\Delta}\right]$$

Les solutions particulières s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} x_{1p} = B_1 \cos(\omega_e t + \phi_1) \\ x_{2p} = B_2 \cos(\omega_e t + \phi_2) \end{cases}$$

Les constantes B_1, B_2, ϕ_1 et ϕ_2 sont calculées en sachant que x_{1p} et x_{2p} vérifient e système d'équations différentielles.

Représentation complexe :

$$\overline{x_{1p}(t)} = B_1\, e^{j(\omega_e t+\phi_1)} = B_1^* e^{j\omega_e t} \rightarrow \overline{\ddot{x}_{1p}(t)} = -\omega_e^2 B_1^*\, e^{j\omega_e t}$$

$$\overline{x_{2p}(t)} = B_2\, e^{j(\omega_e t+\phi_2)} = B_2^* e^{j\omega_e t} \rightarrow \overline{\ddot{x}_{2p}(t)} = -\omega_e^2 B_2^*\, e^{j\omega_e t}$$

$$\overline{f_1(t)} = F_0\, e^{j\omega_e t}$$

En remplaçant dans le système d'équations, on aura :

$$\begin{cases} (\omega_1^2 - \omega_e^2)B_1^* - a_1 B_2^* = F_0 \ldots\ldots\ldots\ldots.(1) \\ -a_2 B_1^* + (\omega_2^2 - \omega_e^2)B_2^* = 0 \ldots\ldots\ldots...(2) \end{cases}$$

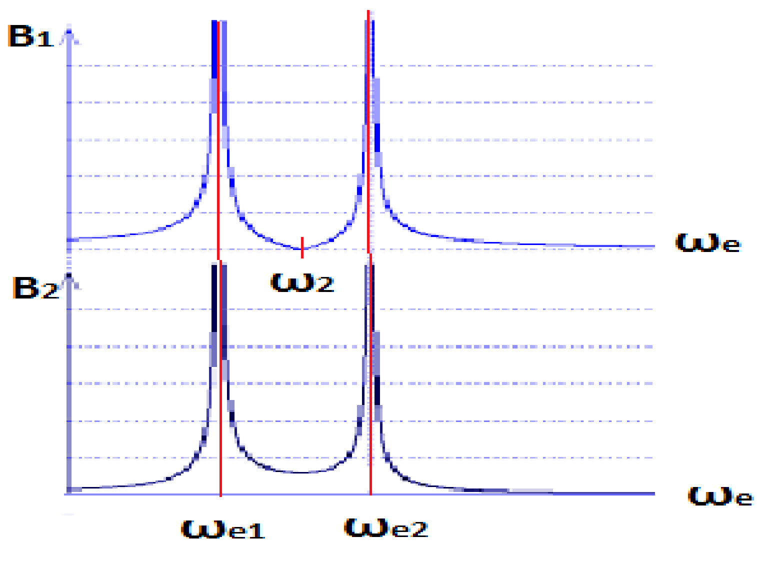
$$det = \begin{vmatrix} \omega_1^2 - \omega_e^2 & -a_1 \\ -a_2 & \omega_2^2 - \omega_e^2 \end{vmatrix} = (\omega_1^2 - \omega_e^2)(\omega_2^2 - \omega_e^2) - a_1 a_2$$

Ce déterminant s'annule pour deux valeurs ω_{e1} et ω_{e2} de ω_e. En raisonnant de la même manière que dans le paragraphe précèdent et en supposant que $\omega_1 \leq \omega_2, \omega_{e1} < \omega_1 \leq \omega_2 < \omega_{e2}$.

Selon la valeur de déterminant ; on deux cas possibles :

- Si $det = 0 \rightarrow \begin{cases} B_1^* = \dfrac{\begin{vmatrix} F_0 & -a_1 \\ 0 & \omega_2^2-\omega_e^2 \end{vmatrix}}{det} = \dfrac{F_0(\omega_2^2-\omega_e^2)}{0} = \infty \\ B_2^* = \dfrac{\begin{vmatrix} \omega_1^2-\omega_e^2 & F_0 \\ -a_2 & 0 \end{vmatrix}}{det} = \dfrac{a_2 F_0}{0} = \infty \end{cases}$

  Les solutions particulières prennent des valeurs infinies pour ω_{e1} et $\omega_{e2} \rightarrow$ phénomène de résonance.



- Si $det \neq 0 \rightarrow \begin{cases} B_1^* = \dfrac{\begin{vmatrix} F_0 & -a_1 \\ 0 & \omega_2^2-\omega_e^2 \end{vmatrix}}{det} = \dfrac{F_0(\omega_2^2-\omega_e^2)}{det} = B_1 e^{j\phi_1} \rightarrow x_{1p} = \dfrac{F_0(\omega_2^2-\omega_e^2)}{det} cos\omega_e t \\ B_2^* = \dfrac{\begin{vmatrix} \omega_1^2-\omega_e^2 & F_0 \\ -a_2 & 0 \end{vmatrix}}{det} = \dfrac{a_2 F_0}{det} = B_2 e^{j\phi_2} \rightarrow x_{2p} = \dfrac{a_2 F_0}{det} cos\omega_e t \end{cases}$

Remarque : si $\omega_e = \omega_2 \rightarrow x_1 = 0$, ce cas est appelé anti-résonance.