

الفصل الرابع: المتغيرات العشوائية المشتركة الثنائية:

في علم الاحتمالات والإحصاء، ندرس أحياناً أكثر من متغير عشوائي واحد ونرغب بفهم كيف تتفاعل هذه المتغيرات معاً. عندما يكون لدينا متغيران عشوائيان ثنائيان، يصبح التوزيع المشترك الثنائي أداة مهمة لوصف العلاقة بينهما.

التوزيع المشترك لمتغيرين عشوائيين X و Y يعطي احتمالات جميع الأزواج الممكنة من القيم: ونكتب:

$$P(X = x, Y = y) \text{ أو } P_{XY} \text{ إذا كان المتغير العشوائي منفصلاً}$$

$$f(x, y) \text{ إذا كان المتغير العشوائي مستمر}$$

أولاً: المتغيرات العشوائية المشتركة الثنائية المنفصلة:

1- التوزيع الاحتمالي المشترك: ليكن (X, Y) متغير عشوائي ثنائي منفصل، يعطى جدول التوزيع الاحتمالي المنفصل كما يلي:

$Y \backslash X$	y_1	y_2	..	y_m	Σ
x_1	$P(X = x_1, Y = y_1)$	$P(X = x_1, Y = y_2)$	..	$P(X = x_1, Y = y_m)$	$P(X = x_1)$
x_2	$P(X = x_2, Y = y_1)$	$P(X = x_2, Y = y_2)$	..	$P(X = x_2, Y = y_m)$	$P(X = x_2)$
...			..		...
x_n	$P(X = x_n, Y = y_1)$	$P(X = x_n, Y = y_2)$	..	$P(X = x_n, Y = y_m)$	$P(X = x_n)$
Σ	$P(Y = y_1)$	$P(Y = y_2)$	..	$P(Y = y_m)$	1

التوزيع الهامشي لـ: Y

التوزيع الهامشي لـ: X

نلاحظ ما يلي:

$$\begin{cases} \sum P(X = x) = 1 \\ \sum P(Y = y) = 1 \\ \sum P(X = x, Y = y) = 1 \end{cases}$$

التوزيع الهامشي -الحدى-

التوزيع الهامشي لمتغير عشوائي هو التوزيع الاحتمالي لذلك المتغير بشكل مستقل عن المتغيرات الأخرى في التوزيع المشترك. بمعنى آخر، يعطي التوزيع الهامشي احتمالات كل قيمة للمتغير الواحد دون الحاجة لمعرفة قيم المتغيرات الأخرى.

إذا كان لدينا متغيران عشوائيان X و Y مع التوزيع المشترك $P(X=x, Y=y)$,

فإن التوزيع الهامشي لـ X يُحسب بجمع احتمالات كل قيم Y :

$$P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y)$$

وبالمثل، التوزيع الهامشي لـ Y يحسب بجمع احتمالات كل قيم X

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

مثال: رمي قطعة نقود وقطعة نرد

المتغيرات العشوائية: Y ، X

X نتيجة رمي قطعة النقود :

• (1) إذا كانت النقود وجه F

• (0) إذا كانت النقود ظهر P

Y نتيجة رمي قطعة النرد:

• الوجه الذي يظهر على النرد

الفضاء العيني كل تجربة يمكن تمثيلها بالزوج المرتب

$$Y=\{1,2,3,4,5,6\}$$

$$X=\{0,1\},$$

إذن، الفضاء العيني يحتوي على 12 نقطة ممكنة:

$$\{(0,1),(0,2),\dots,(0,6),(1,1),(1,2),\dots,(1,6)\}$$

التوزيع المشترك $P(X,Y)$

• X نتيجة النقود: 0 = ظهر ، 1 = وجه

• Y نتيجة النرد: 1,2,3,4,5,6

• الاحتمال لكل زوج $(X,Y)=1/12$

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6	Σ
0	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	6/12
1	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	6/12
Σ	2/12	2/12	2/12	2/12	2/12	2/12	1

التوزيع الهامشي لـ: Y

Y	1	2	3	4	5	6	Σ
$P(Y = y)$	2/12	2/12	2/12	2/12	2/12	2/12	1

التوزيع الهامشي لـ: X

X	0	1	Σ
$P(Y = y)$	6/12	6/12	1

ثانياً: المتغيرات العشوائية المشتركة المتصلة:

نقول إن المتغيرين العشوائيين X و Y متصلان (Continuous) إذا كانا معرفين على فضاء احتمالي ويأخذان قيمًا في مجموعات متصلة من الأعداد الحقيقية، ولا يمكن تحديد احتمال قيمة مفردة لكل منهما.

يتم وصف سلوكهما معًا بواسطة دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة: $f(x, y)$ التي تتميز بالخصائص التالية:

$$\begin{cases} f(x, y) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1 \end{cases}$$

مثال: لتكن لدينا الدالة التالية:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{9}(x + y) & 0 \leq x \leq 3, \quad 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

أثبت أن الدالة دالة كثافة احتمالية:

الإجابة

$$\text{الشرط الأول: } 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2 \implies x + y \geq 0 \implies \frac{1}{9}(x + y) \geq 0 \quad \text{محقق}$$

الشرط الثاني:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$$

Comme $f(x, y) = 0$ ailleurs, on calcule :

$$\int_0^3 \int_1^2 \frac{1}{9}(x+y) dy dx$$

Intégrale intérieure

$$\int_1^2 \frac{1}{9}(x+y) dy = \frac{1}{9} \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{9} \left(x + \frac{3}{2} \right)$$

Intégrale extérieure

$$\int_0^3 \frac{1}{9} \left(x + \frac{3}{2} \right) dx = \frac{1}{9} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} \right]_0^3 = \frac{1}{9}(9) = 1$$

ومنه نقول أن الدالة دالة كثافة احتمالية

التوزيع الهامشي -الحدّي-

إذا كان لدينا متغيران عشوائيان X و Y مع دالة الكثافة المشتركة $f(x, y)$ فإن التوزيع الهامشي لـ X يُحسب بتكامل الدالة بالنسبة لـ Y

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

وبالمثل، فإن التوزيع الهامشي لـ Y يُحسب بتكامل الدالة بالنسبة لـ X

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

مثال بالعودة إلى المثال السابق:

• دالة الكثافة الاحتمالية لـ X :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_1^2 \frac{1}{9}(x+y) dy = \frac{1}{9} \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{9} \left(x + \frac{3}{2} \right)$$

• دالة الكثافة الاحتمالية لـ Y :

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^3 \frac{1}{9}(x+y) dx = \frac{1}{9} \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_0^3 = \frac{1}{9} \left(3y + \frac{9}{2} \right)$$