

Matrices

I - Définitions

Définition ① Une matrice M est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{R}$

Elle est dite de taille (ou de dimension ou d'ordre) (m, n) si le tableau possède m lignes et n colonnes

Une matrice est représentée par

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

où i est le numéro de la ligne

et j est le numéro de la colonne.

Le nombre a_{ij} , $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$ est appelé Coefficient de la matrice M , et on a $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i, j$

On note aussi $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ ou $M(m, n) = (a_{ij})$.

Exemple

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

M est une matrice de taille (2×3) elle a 2 lignes et 3 colonnes

II Opérations sur les matrices.

Soient A et B deux matrices avec

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{et} \quad B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$$

① Somme de deux matrices. Il faut que A et B soient de la même taille, c'est à dire $m = p$ et $n = q$.

$$\text{on a } A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$\text{Exemple } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 9 \\ 1 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Propriétés

Soient A, B et C trois matrices de la même taille
on a

- ① $A + B = B + A$ La somme est commutative
- ② $(A + B) + C = A + (B + C)$ La somme est associative.
- ③ La matrice nulle O (tous les coefficients sont nuls) est l'élément neutre pour l'addition.
La matrice $-A = (-a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ est l'élément opposé pour l'addition : $A + (-A) = O$

2°/ Multiplication par un scalaire
Soit $k \in \mathbb{R}$,

la matrice $k \cdot A = (ka_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Propriétés : Soient λ et μ deux réels. alors.

- 1) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- 2) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- 3) $(\lambda \mu)A = \lambda(\mu A)$

3°/ Multiplication par un scalaire
Soit $A(m, n)$ et $B(n, p)$.

Pour faire la multiplication de deux matrices A et B
il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B et on a.

$$A \times B = C \text{ avec } C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$$

$$\text{et } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$\text{Exemple } c_{11} = \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{k1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

②

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2-10 & 3+5 & 2-8-25 \\ 0-3-14 & 7 & 12-35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 & -31 \\ -17 & 7 & -23 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} -7 & 8 & -31 \\ -17 & 7 & -23 \end{pmatrix}.$$

Propriétés soient A, B et C trois matrices.

on a $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$

$$A(B+C) = AB + AC.$$

et $(A+B)C = AC + BC$

$$k(A \cdot B) = (kA)B = A \cdot (kB)$$

$AB \neq BA$. Le produit de deux matrices n'est pas commutatives.

Si $m=p=1$. $A \cdot B$ est un scalaire
(A a une ligne et B a une colonne)

Si $n=1$. : $A \cdot B$ est une matrice de taille (imp).
(A a une colonne et B a une ligne).

IV Matrices particulières.

1° Matrice carrée.

On dit qu'une matrice $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une matrice carrée si le nombre de lignes est égale au nombre de colonnes, c'est à dire $m=n$.

On dit que la matrice M est de taille (ou ordre) n .

on note $M(n) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

Matrice carrée diagonale.

Une matrice carrée est diagonale si les coefficients qui sont en dehors de la diagonale sont tous nuls. c'est à dire,

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

Pour simplifier on note $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

$$\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice carrée triangulaire supérieure

Une matrice carrée est triangulaire supérieure si les éléments qui sont en dessous de la diagonale sont nuls

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si } i < j$$

Matrice carrée triangulaire inférieure

Une matrice carrée est triangulaire inférieure si les éléments qui sont en dessus de la diagonale sont tous nuls.

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si } i > j$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrice triangulaire
supérieure

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrice triangulaire
inférieure

Transposée d'une matrice.

On appelle transposée d'une matrice A la matrice, notée tA et est obtenue par lueh de A en changeant les lignes et les colonnes. Ainsi si la matrice A a n lignes et m colonnes, alors tA a m lignes et n colonnes.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$${}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Propriétés .

On a les propriétés suivantes .

$$\textcircled{1} \quad {}^t(A+B) = {}^t A + {}^t B$$

$$\textcircled{2} \quad {}^t({}^t A) = A$$

$$\textcircled{3} \quad {}^t(kA) = k \cdot {}^t A$$

$$\textcircled{4} \quad {}^t(AB) = {}^t B \cdot {}^t A$$

Matrices inversibles .

Définition - matrice unité -

On appelle matrice unité d'ordre n , la matrice diagonale telle que $a_{ii} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$. et on note I_n

$$I_n = \text{diag}(1, \dots, 1)$$

Si A est une matrice carrée d'ordre n , alors .

$$I_n \cdot A = A \cdot I_n = A.$$

Définition - matrice inversible -

Soit A une matrice carrée d'ordre n .

On dit que A est inversible s'il existe une matrice carrée C d'ordre n , vérifiant

$$AC = CA = I_n$$

La matrice C est unique et est appelée l'inverse de A .

on la note A^{-1}

Propriétés

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

$$({}^t A)^{-1} = {}^t (A^{-1})$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Cas d'une matrice diagonale .

Une matrice diagonale $D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ est inversible si et seulement si tout les coefficients diagonaux sont non nuls et alors

$$D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_{11}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}}\right).$$

IV Déterminants

Déterminant d'ordre 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Exemple $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 2 \times 1 - (4) \times (-3) = 14.$

Déterminant d'ordre n ($n \geq 2$)

Définition:

On appelle déterminant d'une matrice carrée de dimension (d'ordre) n , $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ le nombre noté $\det(A)$ ou

$|A|$ et obtenue par recurrence sur l'ordre n de la manière suivante:

si $n=1$, $A = (a)$ $\det(A) = a.$

si $n \geq 2$, on pose

$$\det(A) = a_{11}\Delta_{11} + \dots + (-1)^{1+j} a_{1j}\Delta_{1j} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n}\Delta_{1n} \dots (*)$$

où Δ_{ij} est le déterminant de la matrice carrée d'ordre $(n-1)$ obtenue à partir de A en supprimant la 1^{ère} ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne

(*) est appelée développement par rapport à la 1^{ère} ligne.

Notation: $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix}$

Exemple $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2(1 + 2 \times 3) - 3(4 - (-1) \times (-3)) + 5(8 - (-1) \times 1) \\ &= 14 - 3 + 45 = 56. \end{aligned}$$

$$\boxed{\det(A) = 56}.$$

Propriétés

① on a $\det(A) = \det({}^tA)$.

Donc les propriétés concernant les colonnes de A s'appliquent aussi aux lignes.

② si A possède une ligne (ou colonne) de 0 alors $\det(A) = 0$

③ si A possède deux lignes (ou colonnes) identiques alors $\det(A) = 0$

④ si A est une matrice triangulaire alors $\det(A)$ est le produit des éléments diagonaux.

$$\det(A) = a_{11} \times a_{22} \times \dots \times a_{nn}.$$

⑤ si B est obtenue à partir de A en multipliant une seule de ses lignes (ou colonne) par un scalaire k , alors $\det(B) = k \det(A)$

⑥ si B est obtenue à partir de A en permutant deux lignes (colonnes) de A , alors $\det(B) = -\det(A)$.

⑦ si B est obtenue à partir de A en additionnant le multiple d'une ligne (colonne) à une autre alors $\det(B) = \det(A)$.

⑧ si A et B sont deux matrices carrées de même dimension alors $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

⑨ A est inversible si $\det(A) \neq 0$. on dit que A est non singulière.

V Matrice adjointe

Soit A une matrice carrée d'ordre n .

Définition :

① on appelle mineur de A le déterminant de la matrice A_{ij} obtenue de A en éliminant la i^{e} ligne et la j^{e} colonne.

② On appelle cofacteur de l'élément a_{ij} le nombre c_{ij} tel que
$$c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

(3) On appelle comatrice de A la matrice des cofacteurs, et on note $\text{com}(A)$: $\text{com}(A) = (c_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$

(4) On appelle matrice adjointe de A la matrice transposée de la comatrice.
 $\text{Adj}(A) = {}^t(\text{com}(A))$

Exemple: soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

On a $c_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$ $c_{22} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$ $c_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$
 $c_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$ $c_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$ $c_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$
 $c_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ $c_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ $c_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$

D'où $\text{com}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ $\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Calcul de la matrice inverse.

Proposition: Si A est une matrice carrée telle que $\det(A) \neq 0$ alors A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A).$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 - 2 \times 2 + 3 \times 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\det(A) = 1 \neq 0.$$

Donc A est inversible. et on a.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Autre méthode de Calcul.

Si A est d'ordre 2.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Si $ad - bc \neq 0$ alors A est inversible. et on a.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Si A est d'ordre supérieur à 2 ($n > 2$).

méthode du pivot de Gauss.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On augmente A de la matrice I_3 .
puis on fait des opérations successives.
sur les lignes de $A \dots$

$$A I \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 4 & 7 \end{array} \right)$$

$$L_3 \leftarrow 7L_3 + 4L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 10 & -4 & -7 \\ 0 & -7 & 0 & -49 & 21 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 4 & 7 \end{array} \right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + 5L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 10 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 4 & 7 \end{array} \right)$$

$$L_2 \leftarrow -\frac{1}{7} L_2$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 4 & 7 \end{array} \right)$$

$$\text{Donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 7 & -3 & -5 \\ -9 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$