

# SYSTÈMES LINÉAIRES.

## I Définitions

Etant donné deux entiers naturels  $n$  et  $p$ , non nuls.

On appelle système linéaire de  $n$  équations à  $p$  inconnues.

(S) tout système (S) de la forme.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{np}x_p = b_n. \end{cases}$$

où  $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  sont des coefficients réels.

et  $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ .

(1) La matrice  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  s'appelle matrice du système.

(2) Le  $n$ -uplet  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  est appelé second membre du système.

(3) Lorsque  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$  on dit que le système est homogène ou que le système est sans second membre.

(4) On appelle solution du système tout  $p$ -uplet  $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$  vérifiant les  $n$  équations de (S).

(5) Le système (S) est dit compatible s'il admet au moins une solution.

Tout système homogène est compatible puisqu'il admet au moins une solution  $(0, 0, \dots, 0)$ .

(6) Le système (S<sub>0</sub>) obtenu en remplaçant tout les  $b_i$  par 0 est appelé système homogène associé à (S).

Exemple :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 & \text{--- (1)} \\ x_2 - x_3 = 1 & \text{--- (2)} \\ x_3 - x_1 = 1 & \text{--- (3)} \end{cases}$$

Le système n'est pas compatible car si on fait (1)+(2)+(3), on obtient  $0 = 3 \Rightarrow$  Le système n'a pas de solutions.

Le système homogène associé admet pour solution tout les triplet  $(\lambda, \lambda, \lambda)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Le système peut être écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X = B$$

A                      X                      B

Si A est inversible on a  $X = A^{-1} \cdot B$ .

Méthodes de résolutions d'un système linéaire

① Règle de Cramer (n équations et n inconnues).  
Soit A une matrice carrée de dimension n

B un vecteur colonne de dimension (n,1).

Si  $\det(A) \neq 0$ , le système d'équations linéaires  $A \cdot X = B$  possède une solution unique  $X = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n)$  donnée par

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

avec  $A_i$  la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la  $i^{\text{e}}$  colonne par B.

Exemple: 
$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ x - y + z = 5 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 9.$$

$$x = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{20}{9}$$

$$z = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{22}{9}$$

$$y = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

$$X = {}^t\left(\frac{20}{9}, -\frac{1}{3}, \frac{22}{9}\right).$$

ou bien 
$$X = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 20 \\ -3 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Remarque: Si  $\det(A) = 0$  on ne peut pas résoudre le système en utilisant la règle de Cramer.

### 2°) Methodes de substitution

Le principe est de choisir une equation, de calculer dans cette equation l'une des inconnues en fonction des autres, puis de la remplacer par cette expression dans toutes les autres equations, puis de recommencer.

Remarque: L'interversion (permutation) des lignes ne change pas l'ensemble des solutions

Exemple

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 4x + 3y - 3z = 7 \\ 3x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} z = 7 - 2x - y \\ 4x + 3y - 3(7 - 2x - y) = 7 \\ 3x + y - 2(7 - 2x - y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 7 - 2x - y \\ 10x + 6y = 28 \\ 7x + 3y = 16 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} z = 7 - 2x - y \\ 5x + 3y = 14 \\ 7x + 3y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 7 - 2x - y \\ y = \frac{14}{3} - \frac{5}{3}x \\ 7x + 3\left(\frac{14}{3} - \frac{5}{3}x\right) = 16 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} z = 7 - 2x - y \\ y = \frac{14}{3} - \frac{5}{3}x \\ 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3}(14 - 5) = 3 \\ z = 7 - 2 - 3 = 2 \end{cases}$$

Alors;  $S = \{(1, 3, 2)\}$ . Le systeme admet une solution unique.

Remarque: On peut résoudre le systeme (S) par la méthode de Cramer ( $\det(A) \neq 0$ ).

### 3°) Methode du pivot de Gauss.

Plus le systeme a des coefficients nuls plus il est facile à résoudre

On détermine donc des opérations élémentaires sur les lignes qui transforment le systeme en un systeme équivalent facile à résoudre.

- On obtient un système équivalent
- En permutant deux lignes.  $L_i$  et  $L_j$  ( $L_i \leftrightarrow L_j$ )
  - En multipliant une ligne  $L_i$  par un réel  $k$  non nul.  
( $L_i \leftarrow k L_i$ )
  - En ajoutant une ligne  $L_j$  à une ligne  $L_i$   
( $L_i \leftarrow L_i + L_j$ ).

Exemple ①

$$(S) \begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 4x + 3y - 3z = 7 \\ 3x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 0 + y - 5z = -7 \\ 0 - y - 7z = -17 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ y - 5z = -7 \\ 0 - 12z = -24 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

on peut s'arrêter ici et on a.

$$\begin{cases} z = -\frac{24}{-12} = 2 \\ y = -7 + 5z = 3 \\ x = \frac{1}{2}(7 - y - z) = 1. \end{cases}$$

Donc  $S = \{(1, 3, 2)\}$ .

Exemple ②

$$(S') \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 3y + 8z = 1 \\ 3x + 2y + 17z = 1 \end{cases}$$

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 0 - y + 2z = -5 \\ 0 - 4y + 8z = -8 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ y + 2z = 5 \\ 4y - 8z = 8 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ y - 2z = 5 \\ 0 + 0 = -12 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$$

En fin  $(S') \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ y - 2z = 5 \\ 0 = 12 \end{cases} \quad (\text{impossible})$

Donc  $S = \emptyset$

Remarque: que le déterminant de la matrice associée au système  $(S')$  est nul.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 17 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 0.$$

Exemple ③

$$(S'') \begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{cases}$$

$$(S'') \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ 0 - 5y + 10z = -10 \\ 0 - 5y + 10z = -10 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$(S'') \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ -5y + 10z = -10 \\ 0 + 0 = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

(La troisième équation est toujours vérifiée) et on a

$$(S'') \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ y - 2z = 2 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow -\frac{L_2}{5}$$

$$(S'') \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 + 2z \\ x = 6 + 3z - 2y = 2 - z \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}$$

Ainsi  $S = \{ (2 - z, 2 + 2z, z), z \in \mathbb{R} \}.$

Le système admet une infinité de solutions

Remarque: ici aussi le déterminant de la matrice associée au système  $(S'')$  est nul

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 0.$$

Écriture matricielle de la méthode.  
 Dans l'exemple (1) on a.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & -3 & 7 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \quad \text{matrice complétée du système.}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & -7 & 17 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_2 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -12 & -24 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2.$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow -\frac{L_3}{12}.$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 5L_3 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow \frac{L_1}{2}.$$

Donc  $x=1$ ,  $y=3$  et  $z=2$   
 c'est à dire  $S = \{(1, 3, 2)\}$

Remarque : La méthode du pivot de Gauss est aussi utilisée pour retrouver l'inverse d'une matrice. On utilise l'écriture matricielle en augmentant la matrice à inverser par la matrice unité, et on procède de la même manière (voir TD).