

T-D N° 3

Etude de fonctions

Exercice N° 1

Calculer les limites suivantes

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}), & \mathbf{2)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}), \\ \mathbf{3)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x + 3) - \ln(x^2 + 1), & \mathbf{4)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{x+3}. \end{array}$$

Exercice N° 2

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2; \\ a - \frac{b}{x} & \text{si } 2 < x \leq 4; \\ 1 & \text{si } 4 < x. \end{cases}$$

Déterminer les valeurs des réels a et b pour que la fonction f soit continue sur \mathbb{R} .

Exercice N° 3

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{x - \pi/2}{\cos x}$.

Peut-on définir une fonction f continue sur $[0, \pi]$, telle que $f(x) = \frac{x - \pi/2}{\cos x}$.

2. Calculer les limites

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cos\left(\frac{1}{x}\right) - x \right).$$

Exercice N° 4

1. Résoudre dans \mathbb{R}

$$\cos(3x) = 0 \quad \text{et} \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

2. Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation

$$\cos^2 x + 3 \sin^2 x - 5 \cos x = 0.$$

Exercice N° 5

Calculer les dérivées des fonctions

$$\mathbf{1)} f(x) = (x+2) \cos x, \quad \mathbf{2)} g(x) = \sin(x^2 + 3x), \quad \mathbf{3)} h(x) = \frac{3 + \cos x}{3 + \sin x}.$$

Exercice N° 6 (Rattrapage 2023-2024)

1. Calculer les dérivées

$$\mathbf{1)} \quad f(x) = \frac{\ln(x^3 + 4)}{2x} \quad \text{et} \quad \mathbf{2)} \quad g(x) = e^{\sqrt{x} + \sin x}.$$

2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} -xe^x & \text{si } x \leq 0; \\ x \ln x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

Exercice N° 7 (Examen TD 2023-2024)

1. Calculer les limites

$$\mathbf{1)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x}}{x^2 - 2x + 1} \quad \text{et} \quad \mathbf{2)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x}.$$

2. Calculer les dérivées

$$\mathbf{1)} \quad f(x) = \arcsin(3 + x^2) \quad \text{et} \quad \mathbf{2)} \quad g(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

3. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0; \\ x + \frac{x \ln x}{1 - x} & \text{si } 0 < x \leq 1; \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $[0, 1]$.

Exercice N° 8 Calculer le développement de Taylor des fonctions suivantes à l'ordre 3

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1.} \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}, & \mathbf{2.} \quad g(x) = \frac{1}{x(1 - x)}, \\ \mathbf{3.} \quad h(x) = e^{1-x}, & \mathbf{4.} \quad k(x) = \sin(x) \end{array}$$

Exercice N° 9 Soit f la fonction réelle définie pour $x \in]-1, +\infty[$ par $f(x) = x^3 \ln(1 + x)$.

1. Ecrire le développement de Taylor de la fonction f à l'ordre 6 en 0.
2. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} .
3. Calculer $f^{(k)}(0)$ pour $k = 2, 3, 4, 5$.

Sabrina Izza