I. BOUTANA-HAFSAOUI

Chapitre N°5
Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté

V.1. Introduction

Ce chapitre concerne l´étude des systèmes oscillatoires à deux degrés de liberté, dont leurs oscillations étudiées, caractérisées par deux coordonnées généralisées indépendantes sont forcées c´est à dire il existe des forces d´excitation.

V.2. Equations de Lagrange

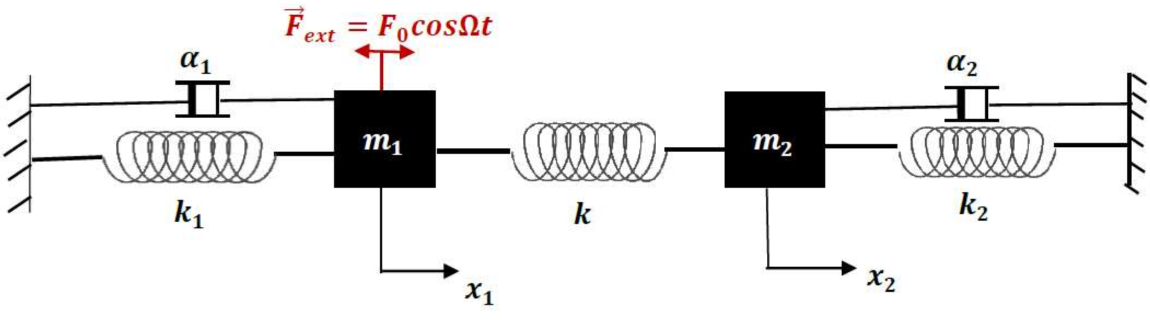
Les équations différentielles des oscillatoires forcées des systèmes à deux degrés de liberté $q_1(t)$ et $q_2(t)$ sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} + \beta \dot{q}_1 = F_{q_1}(t) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} + \beta \dot{q}_2 = F_{q_2}(t) \end{cases} \quad (1)$$

F_{q_1} et F_{q_2} sont respectivement les forces généralisées conjuguées des coordonnées généralisées $q_1(t)$ et $q_2(t)$.

V.3. Système masses-ressorts-amortisseurs

Etudions les oscillations d´un système à deux degrés de liberté, formé par deux masses, des ressorts et des amortisseurs, soumis à une force, appliquée à une masse suivant :



hafsaoui@univ-jijel.dz

V.3.1 Equations différentielles

Les équations différentielles des oscillations du système précédent à deux degrés de liberté s´écrivent sous la forme:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \alpha_1\dot{x}_1 + (k_1 + K)x_1 - kx_2 = F = F_0 \cos \Omega t \\ m\ddot{x}_2 + \alpha_2\dot{x}_2 + (k_2 + K)x_2 - kx_1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

V.3.2 Etude des oscillations

- Solution permanente :

La solution générale du système d´équations (2) est la somme de la solution du système homogène et de la solution particulière. Cependant, la solution du système homogène tend vers zéro avec le temps, à cause de l´amortissement. Ainsi, au régime permanent, la solution devient égale à la solution particulière (solution permanente) qui s´écrit sous la forme :

$$x_1(t) = X_1 \cos(\Omega t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = X_2 \cos(\Omega t + \varphi_2)$$

X_1, X_2 , φ_1 et φ_2 sont les amplitudes et les phases initiales, qui peuvent être calculées en utilisant la méthode des nombres complexes :

$$x_1(t) = Re\left(\underline{X_1}\, e^{i\Omega t}\right) \qquad x_2(t) = Re\left(\underline{X_2}\, e^{i\Omega t}\right) \qquad F(t) = Re\left(\underline{F}\, e^{i\Omega t}\right)$$

Alors :

$$\underline{X_1} = X_1\, e^{i\varphi_1} \qquad \underline{X_2} = X_2\, e^{i\varphi_2} \qquad \underline{F} = F_0\, e^{i0}$$

En remplaçant dans le système d´équations (2), nous obtenons :

$$\begin{cases} (k_1 + K - m\Omega^2 + i\alpha_1\Omega)\underline{X_1} - K\underline{X_2} = \underline{F} \\ (k_2 + K - m\Omega^2 + i\alpha_2\Omega)\underline{X_2} - K\underline{X_1} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

- Amortissement négligeable :

En considérant que l´amortissement est suffisamment faible, le système précédent devient :

$$\begin{cases}(\boldsymbol{k_1}+\boldsymbol{K}-\boldsymbol{m\Omega^2})\underline{\boldsymbol{X_1}}-\boldsymbol{K}\underline{\boldsymbol{X_2}}=\underline{\boldsymbol{F}}\\(\boldsymbol{k_2}+\boldsymbol{K}-\boldsymbol{m\Omega^2})\underline{\boldsymbol{X_2}}-\boldsymbol{K}\underline{\boldsymbol{X_1}}=\boldsymbol{0}\end{cases} \quad \textbf{(4)}$$

Si $\boldsymbol{k_1=k_2=k}$

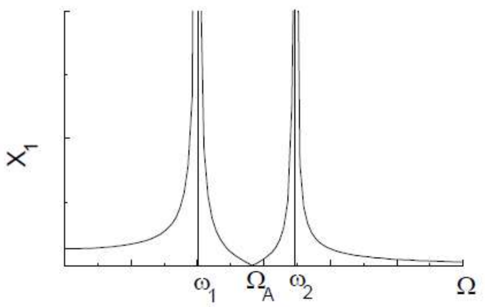
Les solutions de ce système sont :

$$\begin{cases}\underline{\boldsymbol{X_1}}=\dfrac{\underline{\boldsymbol{F}}}{\boldsymbol{m}}\dfrac{(\Omega_A^2-\Omega^2)}{(\omega_1^2-\Omega^2)(\omega_2^2-\Omega^2)}\\\underline{\boldsymbol{X_2}}=\dfrac{\boldsymbol{K}\underline{\boldsymbol{F}}}{\boldsymbol{m^2}}\dfrac{1}{(\omega_1^2-\Omega^2)(\omega_2^2-\Omega^2)}\end{cases} \quad \textbf{(5)}$$

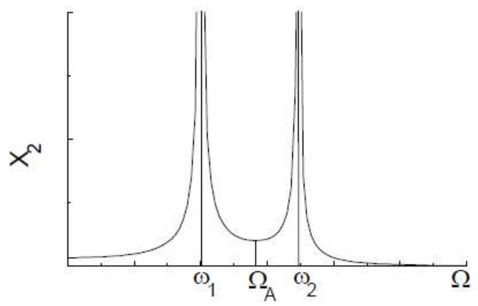
Les pulsations $\boldsymbol{\omega_1}=\sqrt{\frac{K}{m}}$ et $\boldsymbol{\omega_2}=\sqrt{\frac{K+2K}{m}}$ sont les pulsations propres et $\boldsymbol{\Omega_A}=\sqrt{\frac{K+K}{m}}$

Les amplitudes des oscillations sont alors données par les relations suivantes :

$$\begin{cases}\boldsymbol{X_1}=\dfrac{\boldsymbol{F_0}}{\boldsymbol{m}}\dfrac{|\Omega_A^2-\Omega^2|}{|\omega_1^2-\Omega^2||\omega_2^2-\Omega^2|}\\\boldsymbol{X_2}=\dfrac{\boldsymbol{KF_0}}{\boldsymbol{m^2}}\dfrac{1}{|\omega_1^2-\Omega^2||\omega_2^2-\Omega^2|}\end{cases} \quad \textbf{(6)}$$



Variation de X_1 en fonction de Ω



Variation de X_2 en fonction de Ω

hafsaoui@univ-jijel.dz

Si $\boldsymbol{k_1 = k_2 = K = k}$

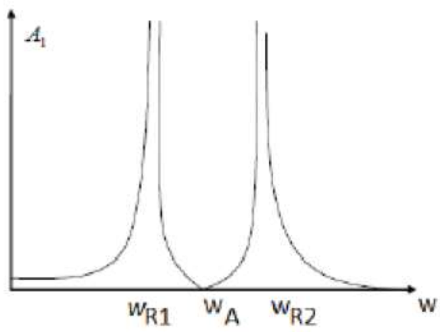
La solution de ce système est :

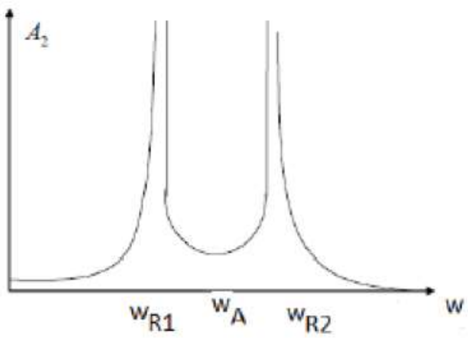
$$\begin{cases} \boldsymbol{X_1} = \frac{\boldsymbol{F_0}}{\boldsymbol{m}} \frac{[2\omega_0^2 - \Omega^2]}{\left|(2\omega_0^2 - \Omega^2)^2 - \omega_0^4\right|} \\ \boldsymbol{X_2} = \frac{\boldsymbol{F_0}}{\boldsymbol{m}} \frac{[\omega_0^2]}{\left|(2\omega_0^2 - \Omega^2)^2 - \omega_0^4\right|} \end{cases} \quad \textbf{(7)}$$

Avec $\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{m}}}$

Ainsi:

- $\boldsymbol{X_1 = X_2 = \infty}$ **si** $\boldsymbol{\Omega = \omega_0 = \omega_{R_1}}$ **(première pulsation de résonnance)**
- $\boldsymbol{\Omega = \sqrt{3\omega_0} = \omega_{R_2}}$ **(deuxième pulsation de résonnance).**
- $\boldsymbol{X_1 = 0}$ $\boldsymbol{\Omega = \sqrt{2}\omega_0 = \omega_A}$ **(pulsation d´antirésonance).**



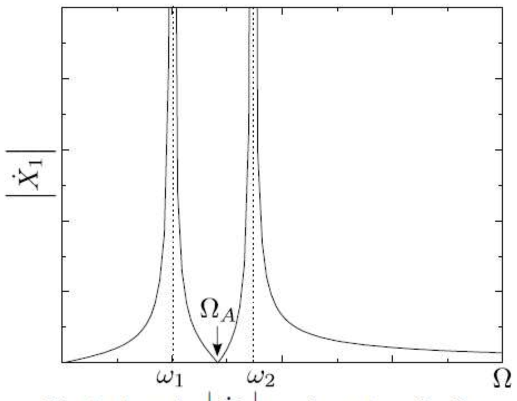


V.4. Impédance

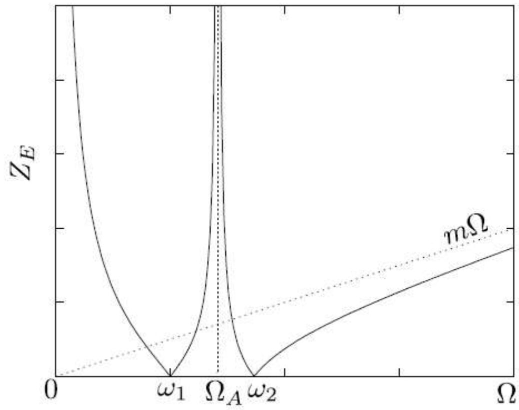
$$\underline{\dot{X_1}} = -\boldsymbol{i} \frac{\Omega}{\boldsymbol{m}} \frac{(\Omega^2 - \Omega_A^2)}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} \underline{\boldsymbol{F}} \quad \textbf{(8)}$$

L´impédance d´entrée s´écrit alors comme suit :

$$\underline{\boldsymbol{Z_E}} = \frac{\underline{\boldsymbol{F}}}{\underline{\dot{X_1}}} = \boldsymbol{i} \frac{\boldsymbol{m}}{\Omega} \frac{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)}{(\Omega^2 - \Omega_A^2)} \quad \textbf{(9)}$$



Variation de $|\underline{\dot{X}}_1|$ en fonction de Ω

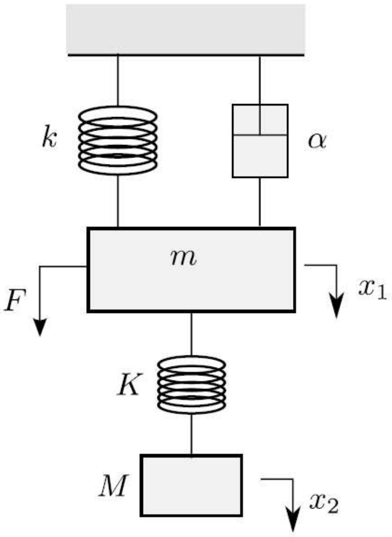


Variation de $Z_E = |\underline{Z}_E|$ en fonction de Ω

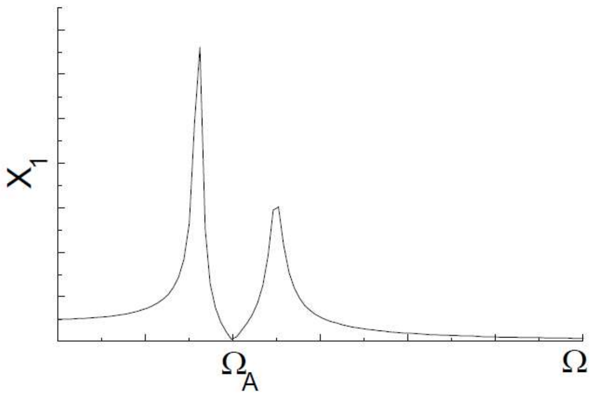
V.5. Applications

Le phénomène d´antirésonance possède un avantage et peut être utilisé pour supprimer une vibration résultant d´une résonnance dans un système mécanique.

Considérons le système oscillatoire de la figure suivante, forme par deux masses m et M, deux ressorts k et K et un amortisseur α, la masse m étant soumise à une force F :



Etouffeur de vibrations .



Variation de X_1 en fonction de Ω.

Les équations différentielles des oscillations du système précédent s´écrivent :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + (k+K)x_1 - Kx_2 = F \\ m\ddot{x}_2 + Kx_2 - Kx_1 = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

En régime permanent sinusoïdal, on obtient :

$$\begin{cases} \underline{X_1} = \frac{F_0}{m} \frac{\Omega^2 - \frac{K}{M}}{\left[-\Omega^4 + \Omega^2\left(\frac{k+K}{m} + \frac{K}{M}\right) - \frac{kK}{mM}\right] + i\frac{\alpha}{m}\Omega\left(\Omega^2 - \frac{K}{M}\right)} \\ \underline{X_2} = \frac{KF_0}{Mm} \frac{1}{\left[-\Omega^4 + \Omega^2\left(\frac{k+K}{m} + \frac{K}{M}\right) - \frac{kK}{mM}\right] + i\frac{\alpha}{m}\Omega\left(\Omega^2 - \frac{K}{M}\right)} \end{cases} \qquad (11)$$

- Si la pulsation de la force F est $\boldsymbol{\Omega_A = \sqrt{\frac{K}{M}}}$, la masse **m** est immobile : $\boldsymbol{X_1 = 0}$ **.**
- Si $\boldsymbol{\omega_0 = \Omega_A}$ (C´est à dire que $\boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{M}$ sont choisies telles que $\boldsymbol{\frac{K}{M} = \frac{k}{m}}$), la masse **m** est immobile pour $\boldsymbol{\Omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ **.** Dans ces conditions ce système constitue un **étouffeur de vibrations**.

V.6. Généralisation aux systèmes à n degrés de liberté

Un système à n degrés de liberté possède n variables $\boldsymbol{x_1(t)}$ **,** $\boldsymbol{x_2(t)}$ **..........** $\boldsymbol{x_n(t)}$ **.**

V.6.1 Energie cinétique généralisée

L'énergie cinétique d´un système à n degrés de liberté s´écrit sous la forme :

$$E_C = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2{}^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \frac{1}{2}m_n\dot{x}_n{}^2 \qquad (12)$$

Si $\boldsymbol{m_1 = m_2 = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = m_n = m}$ **,** l'énergie cinétique s´écrit sous la forme :

$$E_C = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{n}\dot{x}_i$$

Sous la forme matricielle :

$$E_C = \frac{1}{2}[\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \cdots\cdots\cdots \quad \dot{x}_n] \begin{bmatrix} m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$$

V.6.2 Energie potentielle généralisée

L'énergie potentielle du système à n degrés de liberté s´écrit sous la forme :

$$E_P = \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_2 x_2^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \frac{1}{2}m_n x_n^2 \qquad (12)$$

Si $k_1 = k_2 = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = k_n = k$, l'énergie potentielle s´écrit :

$$E_P = \frac{1}{2}k\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Sous la forme matricielle :

$$E_P = \frac{1}{2}[x_1 \quad x_2 \cdots\cdots\cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

V.6.3 Equation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} = F_i(t) \qquad i = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots n$$