[Ligatures=TeX]Amiri

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Seddik Ben Yahia – Jijel
Faculté de Sciences et technologie (FST)
Département d'enseignement fondamental en sciences et technologie (DEFST)

Notes de cours

Par :
Dr Baouche Nabil

Spécialité : Physique Théorique

Cours de Physique 1 : Mécanique Du Point Matériel

Année universitaire 2024/2025

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Préface

Ce polycopié est une synthèse de divers ouvrages liés au cours des étudiants en premier cycle universitaire LMD, en sciences et technologie (ST) et science de la matière (SM) ainsi qu'aux étudiants des classes préparatoires, au premier semestre de l'année universitaire. L'objectif principal de ce support est de donner aux étudiants et aux enseignants les fondements de la Mécanique du point matériel d'une façon tres simple et pédagogique.

Ce manuscrit contient quatre chapitres qui sont conforme avec le programme officiel de la matière "Mécanique du point matériel ; physique 1" enseigné en première année, sciences et technologies et science de la matière.

Ce manuscrit présente un rappel de cours détaillé pour chaque chapitre (des définitions, rappels et notions fondamentales) accompagné d'un ensemble des apallication résolus pour aider les étudiants à comprendre les phénomènes physiques.

Contenu de l'enseignement par semaine :

Cours : 3h

TD : 1.5 h

TP : 2 h

Chapitre 1

RAPPELS MATHÉMATIQUES

1.1 Produit vectoriel

1.1.1 Les grandeurs physiques

En physique, on distingue deux types de grandeurs, premièrement des grandeurs qui sont définies par une valeur numérique et une unité, mais pas de direction. Ces quantités sont appelées des grandeurs scalaires, par exemple la masse $m = 2\ (kg)$ d'une balle, l'énergie cinétique d'un système $E_c = 25\ (j)$, la surface d'un triangle $S = 16\ \left(m^2\right)$. Deuxièmement, des grandeurs qui sont caractérisées par un module, une unité, un sens et une direction, par exemple la vitesse $\overrightarrow{v}$ et l'accélérateur $\overrightarrow{a}$ d'une voiture, le champ électrique $\overrightarrow{E}$ et magnétique $\overrightarrow{B}$. Ces grandeurs sont appelées des grandeurs vectorielles. Géométriquement, on peut les représenter par un vecteur qui a la même direction, le même sens et un module mesuré avec un choix d'échelle.

1.1.2 Vecteurs et algèbre vectorielle

Les définitions

* Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un segment orienté qui a les caractéristiques suivantes :

1) L'origine A.

2) L'intensité ou le module $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$: qui est la longueur de segment.

3) La direction : celle pourtée par la droite (AB).

4) Le sens : de A vers B.

Soit A et B deux points dans le repère cartésien $\overrightarrow{R}(O; x, y, z)$, où $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est sa base, ces coordonnées sont $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ respectifs, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ définie comme suit :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\,\overrightarrow{j} + (z_B - z_A)\,\overrightarrow{k}. \tag{1.1}$$

et sont module $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ est :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}. \tag{1.2}$$

* Deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont égaux s'ils ont le même module, la même direction et le même sens, et on écrit $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{V}$.

* Un vecteur ayant le même module, la même direction que le vecteur $\overrightarrow{U}$, mais le sens opposé est noté $-\overrightarrow{U}$.

* Le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ est un vecteur où son module est égal à l'unité, c'est-à-dire $\|\overrightarrow{u}\| = 1$.

* Le vecteur unitaire associé au vecteur $\overrightarrow{AB}$ noté $\overrightarrow{u}_{\overrightarrow{AB}}$ est défini par :

$$\overrightarrow{u}_{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}. \tag{1.3}$$

* L'ensemble $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base orthonormée si les trois vecteurs unitaires $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ forment un trièdre direct [1] et perpendiculaire deux à deux.

1.1.3 Opérations sur les vecteurs

La somme vectorielle

La somme de deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ est un vecteur $\overrightarrow{W}$ défini par cette relation :

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}, \qquad W = \sqrt{U^2 + V^2 + 2.U.V.cos\theta}, \tag{1.4}$$

1. les tois veteurs linéairement indépendants ayant le même origine et obéissant à la règle de la main droite

où θ est l'angle enter les deux vecteur $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$.

Dans le reférentiel orthonormal $\overrightarrow{R}(O; x, y, z)$, où $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est sa base, les deux vecteurs définis comme suit :

$$\overrightarrow{U} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}, \tag{1.5}$$

$$\overrightarrow{V} = x'\,\overrightarrow{i} + y'\,\overrightarrow{j} + z'\,\overrightarrow{k}. \tag{1.6}$$

La somme de deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ est :

$$\overrightarrow{W} = (x + x')\,\overrightarrow{i} + (y + y')\,\overrightarrow{j} + (z + z')\,\overrightarrow{k}. \tag{1.7}$$

La soustraction vectorielle

La différence de deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ est un vecteur $\overrightarrow{W}$ défini comme suit :

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} - \overrightarrow{V} = \overrightarrow{U} + \left(-\overrightarrow{V}\right), \qquad W = \sqrt{U^2 + V^2 - 2UV cos\theta}. \tag{1.8}$$

Dans le reférentiel orthonormal $\overrightarrow{R}(O; x, y, z)$, où $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est sa base, et les vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont défini par l'équation (1.5) et (1.6), donc la différence de deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ est :

$$\overrightarrow{W} = (x - x')\,\overrightarrow{i} + (y - y')\,\overrightarrow{j} + (z - z')\,\overrightarrow{k}. \tag{1.9}$$

La multiplication d'un vecteur par un scalaire

La multiplication d'un vecteur $\overrightarrow{U}$ par un scalaire α est un vecteur $\overrightarrow{U}'$ qui a la définition suivante :

$$\overrightarrow{U}' = \alpha\overrightarrow{U}. \tag{1.10}$$

Si on utiliser la définition de vecteur $\overrightarrow{U}$ c'est-à-dire l'équation (1.5), La multiplication d'un vecteur $\overrightarrow{U}$ par un scalaire α est définie comme suit :

$$\overrightarrow{U}' = \alpha\, x\,\overrightarrow{i} + \alpha\, y\,\overrightarrow{j} + \alpha\, z\,\overrightarrow{k}. \tag{1.11}$$

Si α un scalaire positif, donc le vecteur $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{U}'$ ont le même sens, si non ils ont deux sens opposés, mais tous deux ont le même module et le même suppourt.

Le vecteur nul

Le vecteur nul noté $\overrightarrow{0}$ est un vecteur dont le module est égal à zéro et sa direction est non définie.

1.1.4 Propriétés

On considère trois vecteurs $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$ et deux scalaires (réels) α et β :

1) La commutativité pour l'addition : $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{U}$.

2) L'associativité pour l'addition : $\left(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}\right) + \overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} + \left(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}\right)$.

3) L'associativité pour la multiplication : $\alpha\left(\beta\overrightarrow{U}\right) = (\alpha\beta)\,\overrightarrow{U} = \beta\left(\alpha\overrightarrow{U}\right)$.

4) La distributivité : $\alpha\left(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}\right) = \alpha\overrightarrow{U} + \alpha\overrightarrow{V}$. et $(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{U} = \alpha\overrightarrow{U} + \beta\overrightarrow{U}$.

1.1.5 Produit scalaire

Définition

Le produit scalaire entre deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ est défini par :

$$\overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{V} = \left\|\overrightarrow{U}\right\| . \left\|\overrightarrow{V}\right\| cos\theta = UV cos\theta \tag{1.12}$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$.

Définition

Dans le referentiel orthonormal $\overrightarrow{R}(O; x, y, z)$, où $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est sa base, les deux vecteurs défini comme suit :

$$\overrightarrow{U} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}. \tag{1.13}$$

$$\overrightarrow{V} = x'\,\overrightarrow{i} + y'\,\overrightarrow{j} + z'\,\overrightarrow{k}. \tag{1.14}$$

donc, le produit scalair entre les vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ est définie par cette relation :

$$\overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{V} = \left(x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}\right) * \left(x'\,\overrightarrow{i} + y'\,\overrightarrow{j} + z'\,\overrightarrow{k}\right) = xx' + yy' + zz'. \tag{1.15}$$

puisque : $\overrightarrow{i} \bullet \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \bullet \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \bullet \overrightarrow{k} = 1$ et $\overrightarrow{i} \bullet \overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} \bullet \overrightarrow{k} = \overrightarrow{j} \bullet \overrightarrow{k} = 0$.

On appelle l'équation (1.15) l'expression analytique du produit scalaire.

Propriétés

1) La commutativité : $\overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V} \bullet \overrightarrow{U}$.

2) La distributivité par rapport à l'addition : $\left(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}\right) \bullet \overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{W} + \overrightarrow{V} \bullet \overrightarrow{W}$.

3) $\alpha.\left(\overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{V}\right) = \overrightarrow{U} \bullet \left(\alpha.\overrightarrow{V}\right) = \left(\alpha.\overrightarrow{U}\right) \bullet \overrightarrow{V}$. où α est un scalaire.

4) L'orthogonalité : si $\overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{V} = xx' + yy' + zz' = 0$. donc $\overrightarrow{U} \perp \overrightarrow{V}$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, l'orsque $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ ne sont pas nul.

5) $\overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{U} = \overrightarrow{U}^2 = \left\|\overrightarrow{U}\right\|^2 = U^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

1.1.6 Produit vectoriel

Définition

Le produit vectoriel entre deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ est défini par :

$$\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = \left\|\overrightarrow{U}\right\| . \left\|\overrightarrow{V}\right\| .sin\theta \, \overrightarrow{u}_n = U.V.sin\theta.\overrightarrow{u}_n \tag{1.16}$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs et $\overrightarrow{u}_n$ est le vecteur unitaire perpendiculaire au plan formé par $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$.

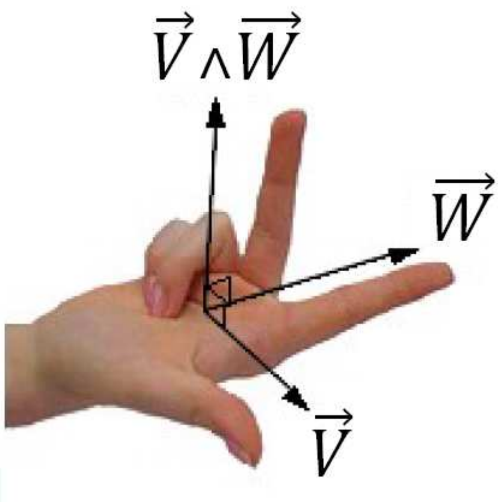

FIGURE 1.1 – La règle des trois doigts

Définition

Dans le reférentiel orthonormal $\overrightarrow{R}(O; x, y, z)$, où $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est sa base, les deux vecteurs défini comme suit :

$$\overrightarrow{U} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}. \tag{1.17}$$

$$\overrightarrow{V} = x'\,\overrightarrow{i} + y'\,\overrightarrow{j} + z'\,\overrightarrow{k}. \tag{1.18}$$

Donc, le produit vectotrielle entre les vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$, noté $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$ est défini par cette relation :

$$\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = \left(x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}\right) \wedge \left(x'\,\overrightarrow{i} + y'\,\overrightarrow{j} + z'\,\overrightarrow{k}\right) \tag{1.19}$$

$$\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = (yz' - y'z)\,\overrightarrow{i} + (x'z - xz')\,\overrightarrow{j} + (xy' - x'y)\,\overrightarrow{k} \tag{1.20}$$

puisque : $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{k} = 0$ et $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$.

On peut calculer le produit vectotrielle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ par cette relation :

$$\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \overrightarrow{k} \tag{1.21}$$

$$\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = (yz' - y'z)\,\overrightarrow{i} + (x'z - xz')\,\overrightarrow{j} + (xy' - x'y)\,\overrightarrow{k} \tag{1.22}$$

On appelle l'équation (1.19) et l'équation (1.21) l'expression analytique du produit vectoriel.

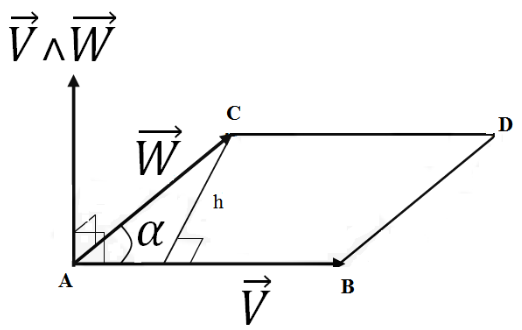

Figure 1.2 – Le produit vectoriel de deux vecteurs

Propriétés

1) La non commmutativité : $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = -\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{U}$.

2) La distributivité par rapport à l'adition : $\left(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}\right) \wedge \overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{W} + \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}$.

3) $\alpha.\left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right) = \overrightarrow{U} \wedge \left(\alpha.\overrightarrow{V}\right) = \left(\alpha.\overrightarrow{U}\right) \wedge \overrightarrow{V}$, où α est un scalaire.

4) L'orthogonalité : si $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = 0$, donc $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont parallèles.

5) La surface du parallélogramme de coté $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ est égale à : $\left|\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right|$.

1.1.7 Le produit mixte

Définition

Le produit mixte entre trois vecteurs (où l'ordre des vecteurs est important) est un scalaire s défini par :

$$s = \overrightarrow{U} \bullet \left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}\right) = \overrightarrow{U} \bullet \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x' & y' & z' \\ x" & y" & z" \end{vmatrix} = x\left(y'z" - y"z'\right) + y\left(x"z' - x'z"\right) + z\left(x'y" - x"y'\right). \tag{1.23}$$

On appelle l'équation (1.23) l'expression analytique du produit vectoriel.

Propriétés

* Si on fait une rotation entre les vecteurs, le produit mixte reste le même :

$$\overrightarrow{U} \bullet \left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}\right) = \overrightarrow{W} \bullet \left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right) = \overrightarrow{V} \bullet \left(\overrightarrow{W} \wedge \overrightarrow{U}\right). \tag{1.24}$$

* La valeur absolue du produit mixte mesure le volume du parallélépipède formé par $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$:

$$V = \left|\overrightarrow{U} \bullet \left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}\right)\right|. \tag{1.25}$$

1.1.8 Produit vectoriel double

Définition

Le produit vectoriel double des vecteurs $\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$ est un vecteur défini par :

$$\overrightarrow{U} \wedge \left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}\right) = \overrightarrow{V} \bullet \left(\overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{W}\right) - \overrightarrow{W} \bullet \left(\overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{W}\right). \tag{1.26}$$

Remarque

Le produit vectoriel double n'est pas associatif :

$$\overrightarrow{U} \wedge \left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}\right) \neq \left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right) \wedge \overrightarrow{W}. \tag{1.27}$$

1.1.9 La dérivée totale d'un vecteur

On définit deux fonctions vectorielles $\overrightarrow{U}(x,y,z)$ et $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ dépendant de la variable t, de la façon suivante :

$$\overrightarrow{U}(x,y,z) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}. \tag{1.28}$$

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = x'(t)\overrightarrow{i} + y'(t)\overrightarrow{j} + z'(t)\overrightarrow{k}. \tag{1.29}$$

Donc, la dérivée totale de la fonction vectorielle est définie par cette relation :

$$\frac{d\overrightarrow{U}(x,y,z)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{dy(t)}{dt}\overrightarrow{j} + \frac{dz(t)}{dt}\overrightarrow{k}. \tag{1.30}$$

Propriétés

1) $\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{U}(x,y,z) + \overrightarrow{V}(x,y,z)\right) = \frac{d\overrightarrow{U}(x,y,z)}{dt} + \frac{d\overrightarrow{V}(x,y,z)}{dt}$.

2) Soit α une fonction scalaire dépendant de la variable t :

$\frac{d}{dt}\left(\alpha.\overrightarrow{U}(x,y,z)\right) = \frac{d\alpha(x,y,z)}{dt}\overrightarrow{U}(x,y,z) + \alpha(x,y,z)\frac{d\overrightarrow{U}(x,y,z)}{dt}$.

3) $\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{U}(x,y,z) \bullet \overrightarrow{V}(x,y,z)\right) = \frac{d\overrightarrow{U}(x,y,z)}{dt} \bullet \overrightarrow{V}(x,y,z) + \overrightarrow{U}(x,y,z) \bullet \frac{d\overrightarrow{V}(x,y,z)}{dt}$.

4) $\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{U}(x,y,z) \wedge \overrightarrow{V}(x,y,z)\right) = \frac{d\overrightarrow{U}(x,y,z)}{dt} \wedge \overrightarrow{V}(x,y,z) + \overrightarrow{U}(x,y,z) \wedge \frac{d\overrightarrow{V}(x,y,z)}{dt}$.

1.1.10 Le gradient, La divergence et le rotationnel d'une fonction

Définition

Si la fonction $f(x,y,z)$ est une scalaire, on dit que la fonction $f(x,y,z)$ est un champ scalaire.

Si la fonction $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ est vectorielle, on dit que la fonction $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ est un champ vectoriel.

L'opérateur différentiel vectoriel $\overrightarrow{\nabla}$ dit *nabla* est défini dans les coordonnées cartétiennes par :

$$\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{k}. \tag{1.31}$$

où $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ sont les dérivées partielles par rapport à x,y et z respectivement et $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont les vecteurs unitaires.

Le gradient

Le gradient d'une fonction scalaire $f(x,y,z)$ est un vecteur défini par :

$$\overrightarrow{grad}f(x,y,z) = \overrightarrow{\nabla}.f(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\overrightarrow{k}. \tag{1.32}$$

Exemple :

Calculer le gradient de la fonction scalaire suivante : $f(x,y,z) = 4x^2y^2z^2$.

$$\overrightarrow{grad}f(x,y,z) = \overrightarrow{\nabla}.f(x,y,z) = \frac{\partial\left(4x^2y^2z^2\right)}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f\left(4x^2y^2z^2\right)}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial f\left(4x^2y^2z^2\right)}{\partial z}\overrightarrow{k}.$$

On trouve :

$$\overrightarrow{grad}f(x,y,z) = \overrightarrow{\nabla}.f(x,y,z) = 8xy^2z^2\overrightarrow{i} + 8x^2yz^2\overrightarrow{j} + 8x^2y^2z\overrightarrow{k}.$$

La divergence

La divergence d'une fonction vectorielle $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ est un scalaire défini par :

$$div\overrightarrow{V}(x,y,z) = \overrightarrow{\nabla}\bullet\overrightarrow{V}(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{k}\right)\bullet\left(V_x\overrightarrow{i} + V_y\overrightarrow{j} + V_z\overrightarrow{k}\right). \tag{1.33}$$

$$div\overrightarrow{V}(x,y,z) = \overrightarrow{\nabla}\bullet\overrightarrow{V}(x,y,z) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}. \tag{1.34}$$

Exemple :

Calculer la divergence de la fonction vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = V_x\overrightarrow{i} + V_y\overrightarrow{j} + V_z\overrightarrow{k} = \left(4xy^2z^2\right)\overrightarrow{i} + \left(xy^3z^2\right)\overrightarrow{j} + \left(-2x^2y^2z\right)\overrightarrow{k}.$$

$$div\,\overrightarrow{V}(x,y,z) = \overrightarrow{\nabla} \bullet \overrightarrow{V}(x,y,z) = \frac{\partial\left(4xy^2z^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial f\left(xy^3z^2\right)}{\partial y} + \frac{\partial f\left(-2x^2y^2z\right)}{\partial z}.$$

On trouve :

$$div\,\overrightarrow{V}(x,y,z) = \overrightarrow{\nabla} \bullet \overrightarrow{V}(x,y,z) = 4y^2z^2 + 3xy^2z^2 - 2x^2y^2.$$

Le rotationnel

Le rotationnel d'une fonction vectorielle $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ est un vecteur défini par :

$$\overrightarrow{rot\,\overrightarrow{V}} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_y & V_z \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_z \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ V_x & V_y \end{vmatrix}\overrightarrow{k}.$$

$$\overrightarrow{rot\left(\overrightarrow{V}(x,y,z)\right)} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}. \quad (1.35)$$

Exemple :

Soit la fonction vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = V_x\overrightarrow{i} + V_y\overrightarrow{j} + V_z\overrightarrow{k} = \left(x^2yz^2\right)\overrightarrow{i} + \left(xyz^2\right)\overrightarrow{j} + \left(x^2y^2z\right)\overrightarrow{k}.$$

Calculer le rotationnel de cette fonction vectorielle :

$$\overrightarrow{rot\,\overrightarrow{V}} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}.$$

On trouve :

$$\overrightarrow{rot\left(\overrightarrow{V}(x,y,z)\right)} = \left(2x^2yz - 2xyz\right)\overrightarrow{i} - \left(2xy^2z - 2x^2yz\right)\overrightarrow{j} + \left(yz^2 - x^2z^2\right)\overrightarrow{k}.$$

Propriétés

soit $f(x, y, z)$ une fonction scalaire et $\overrightarrow{U}(x, y, z)$ une fonction vectorielle, on a les deux propriétés suivantes :

1) $div\left(\overrightarrow{rot\overrightarrow{U}(x, y, z)}\right) = \overrightarrow{\nabla} \bullet \left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{U}(x, y, z)\right) = 0.$

2) $rot\left(\overrightarrow{grad}.f(x, y, z)\right) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \left(\overrightarrow{\nabla}.f(x, y, z)\right) = 0.$

Le Laplacien

Le Laplacien d'une fonction scalaire est la divergence de son gradient dont le résultat est un scalaire :

$$\overrightarrow{\nabla} \bullet \overrightarrow{\nabla} f(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{k}\right) . \left(\frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{k}\right).$$

$$\overrightarrow{\nabla} \bullet \overrightarrow{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2}. \tag{1.36}$$

Le laplacien d'une fonction vectorielle donne un vecteur :

$$\overrightarrow{\nabla} \bullet \overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{V}(x, y, z)\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\overrightarrow{V}(x, y, z)\right) - \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V}(x, y, z)\right). \tag{1.37}$$

La diférentielle d'une foction

La différentielle d'une fonction scalaire est définie par :

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}dz. \tag{1.38}$$

1.2 Analyse dimensionnelle

1.2.1 Les unités fondamentales et dérivées

En physique, chaque grandeur G est caractérisée par sa dimension. Elle nous informe sur sa nature physique. La valeur de cette grandeur s'exprime en fonction d'unités. Nous pouvons noter la dimension de la grandeur par le sombole $[G]$, il existe sept unités fondamentales dans le système international d'unités (SI), comme l'expose le tableau (1.1) :

Grandeurs	Analyse dimensionnelle	Nom de l'unité	Symbole
La masse	$[M]$	kilogramme	kg
La longueur	$[L]$	mètre	m
Le temps	$[T]$	seconde	s
l'intensité du courant électrique	$[I]$	ampère	A
la température	$[\theta]$	Kelvin	K
l'intensité lumineuse	$[J]$	Candela	Cd
la quantité de matière	$[N]$	mol	mol

TABLE 1.1 – Les sept unités fondamentales dans le système international des unités.

Toutes les autres unités des grandeurs physiques qui ne sont pas citées dans le tableau (1.1), sont des unités dérivées, et aussi des combinaisons des unités fondamentales. Par exemple, l'unité d'énergie E est le Joule (j), l'unité de la force F est le Newton (N) .

1.2.2 Les équations aux dimensions

Définition

Dans le domaine limité de la mécanique, on appelle équation aux dimensions de la grandeur G le monome de cette grandeur écrit sous la forme :

$$[G] = M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma}, \tag{1.39}$$

où M, L, T sont les symboles de l'unité de la masse, la longueur et le temps respectivment et α, β et γ sont des nombres réel. Les équations aux dimensions servent à vérifier l'homogénéité des lois physiques.

Exemple :

L'énergie potentielle de poids est définie par :

$$E_{pp} = mgh, \tag{1.40}$$

où m est la masse, g est l'accélération de la pesanteur à la surface de la terre et h est la hauteur. E_{pp} est l'énergie potentielle de poids et est homogène à une énergie, donc :

$$[E_{pp}] = ML^2T^{-2}. \tag{1.41}$$

Il faut que le deuxième terme de l'équation (1.40) soit homogène à une énergie :

$$[mgh] = [m][g][h] = M.L.T^{-2}.L = ML^2T^{-2}. \tag{1.42}$$

On dit que l'équation (1.40), est dimensionnellement homogène.

Propriétés :

soit A, B et C des grandeurs physiques et α un nombre réel, on a les propriétés :
1) $A = B \implies [A] = [B]$,
2) $A + B = C + D \implies [A] = [B] = [C] = [D]$,
3) $C = A.B \implies [C] = [A].[B]$,
4) $C = \frac{A}{B} \implies [C] = \frac{[A]}{[B]}$,
5) $C = A^\alpha \implies [C] = [A^\alpha] = [A]^\alpha$.

Exemple :

Déterminer l'équation aux dimensions et l'unité de la vitesse v, l'accélérateur a, la force F et le travail w.
1) On sait que $v = \frac{x}{t}$, donc $[v] = \frac{[x]}{[t]} = \frac{L}{T} = LT^{-1}$ et l'unité est $\left(m\, s^{-1}\right)$.
2) On sait aussi $a = \frac{v}{t}$, donc $[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$ et l'unité est $\left(m\, s^{-2}\right)$.
3) On a $F = m\, a$ alors, $[F] = [m]\ [a] = MLT^{-2}$ et l'unité est $\left(kg\, m\, s^{-2}\right)$.
4) On a aussi $w = F\bullet$ alors, $[w] = [F]\,.\,[x] = ML^2T^{-2}$ et l'unité est $\left(kg\, m^2\, s^{-2}\right)$.

Remarque :

1) Dans le cas général (n'est pas limité) l'équation (1.39) prend la forme suivent :

$$[G] = M^\alpha L^\beta T^\gamma I^\delta N^\epsilon J^\varepsilon \theta^\lambda. \tag{1.43}$$

2) La dimension des constantes et toùt les foctions et toùt qui se trouve a l'interieur de ces fonction sera un. Par exemple :

$[sin\alpha] = [cos\alpha] = [lnx] = [e^x] = [x] = [\alpha] = 1.$

3) Les unités des grandeurs physiques doivent être reconnues mondialement soit dans le système MKSA ou le Système CGS :

CGS : c'est le système le plus ancien de l'abréviation :

C : Centimètre, G : Gramme et S : Seconde

MKSA : c'est le système international, actuellement le plus utilisé et le plus standard dans les revues et les ouvrages scientifiques de l'abréviation :

M : Mètre, K : Kilogramme, S : Seconde et A : Ampère.

Chapitre 2

CINÉMATIQUE DU POINT MATÉRIEL

2.1 Introduction

La cinématique est la partie de la mécanique qui consiste à décrire et étudier la manière dont le corps se déplace dans l'espace en fonction du temps sans s'attacher aux causes qui produisent ce mouvement (généralement les forces). En revanche, la dynamique s'intéresse à ces causes responsables de ces mouvements.

Si les dimensions du corps matériel sont théoriquement nulles et pratiquement négligeables par rapport aux distances qu'il parcourt et ne roule pas sur lui-même pendant son mouvement, on peut dans ce cas le considérer comme un point matériel et le noter M.

Le mouvement d'un point matériel M est bien défini si l'on connaît sa position qui est définie par trois coordonnées à chaque instant "t" dans un référentiel R parfaitement choisi, et sa trajectoire, qui est représentée par l'ensemble des points des positions successives décrits par le point matériel.

Le but de la cinématique est d'étudier le mouvement d'un point dans le temps, quelle que soit la cause du mouvement. L'objectif est de déterminer des grandeurs cinématiques comme l'accélération, la vitesse, le vecteur position et les équations temporaires de la trajectoire du point par rapport à un référentiel choisi par l'observateur.

2.2 Systèmes de coordonnées

On doit associer à un référentiel galiléen R, un système de coordonnées de l'espace permettant de repérer les événements du point matériel sous forme d'un quadruplet de nombres, c'est-à-dire trois coordonnées d'espace et une coordonnée de temps.

Un repère est un système de coordonnées qui est constitué d'une origine O du repère et des axes de référence qui permettent d'identifier les positions, les vitesses et les accélérateurs, ainsi que de représenter une trajectoire par une courbe mathématique.

2.2.1 Les coordonnées cartésiennes

Si le point matériel M est en mouvement dans l'espace, l'étude de ce mouvement nécessite trois axes orthogonaux $\left(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}\right)$, rattachés à la même origine O. À chacun de ces axes, on associe un vecteur unitaire $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$, respectivement. Ces vecteurs unitaires forment une base orthonormée directe.

On appelle coordonnées cartésiennes du point matériel M, les trois valeurs algébriques $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ permettant de localiser ce point dans le repère cartésien de base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

Dans cette base, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\overrightarrow{i} + y(t)\,\overrightarrow{j} + z(t)\,\overrightarrow{k}. \quad (2.1)$$

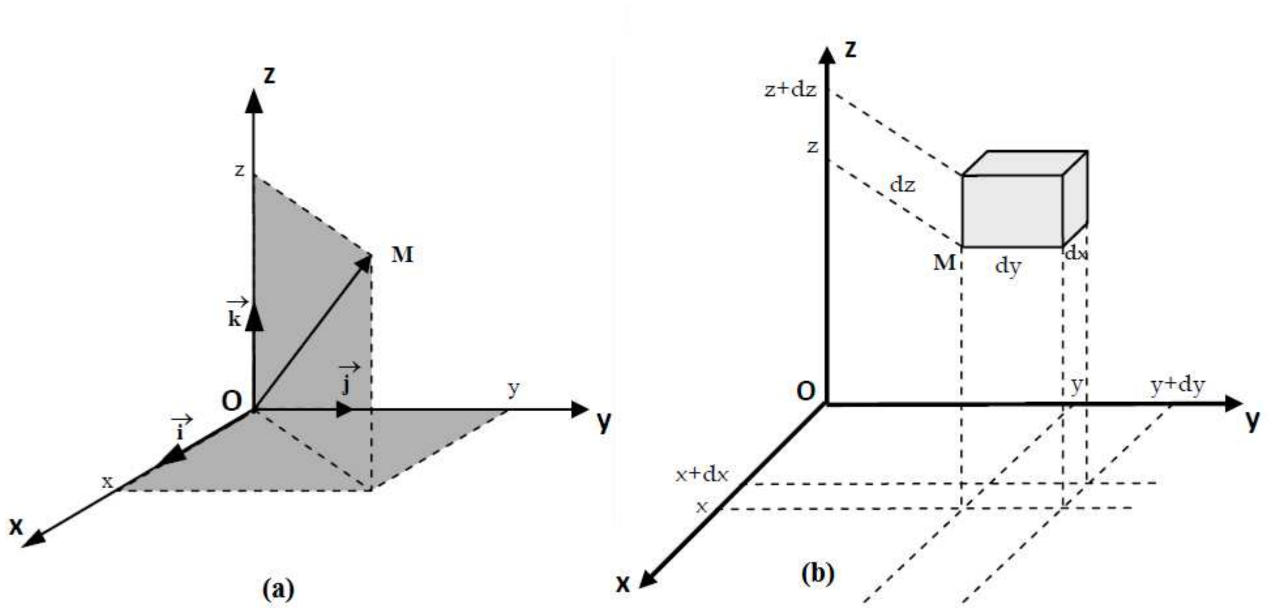

FIGURE 2.1 – Représentation d'un point M en coordonnées cartésiennes (a) et les éléments du déplacement (b).

Pour un déplacement infinitézimal ou élémentaire du point matériel M, on peut définir :

Le vecteur de déplacement élémentaire : $\overrightarrow{dl} = dx\,\overrightarrow{i} + dy\,\overrightarrow{j} + dz\,\overrightarrow{k}$.

La surface élémentaire : $dS = dx.dy$ ou $dS = dy.dz$ ou $dS = dx.dz$

Le volume élémentaire : $dV = dx.dy.dz$

2.2.2 Les coordonnées polaires

À l'aide d'une distance $\rho(t) = OM$ et d'un angle $\theta(t) = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right)$, on peut repérer la localisation d'un point matériel M qui se déplace dans le plan xoy. Les coordonnées polaires sont le couple (ρ, θ), ou on associe à ces coordonnées deux vecteurs unitaires formant une base orthonomée. $\overrightarrow{u}_\rho$ est le vecteur radial et $\overrightarrow{u}_\theta$ est le vecteur angulaire ou transversal.

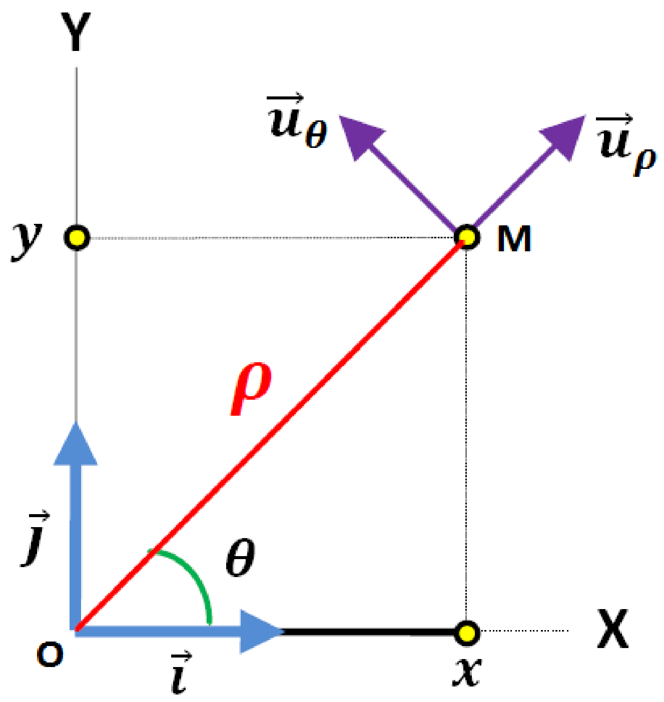

FIGURE 2.2 – Représentation d'un point M en coordonnées polaires.

Donc, le vecteur position est le vecteur qui relie l'origine du repère O au point M étudié. Il s'écrit dans la base polaire comme suit :

$$\overrightarrow{OM} = \rho(t)\,\overrightarrow{u}_\rho. \tag{2.2}$$

où $\rho(t)$ est le rayon polaire.
d'apres la figure (2.2), on Remarque :

$$\begin{cases} \overrightarrow{i} = cos\theta\,\overrightarrow{u}_\rho - sin\theta\,\overrightarrow{u}_\theta. \\ \overrightarrow{j} = sin\theta\,\overrightarrow{u}_\rho + cos\theta\,\overrightarrow{u}_\theta. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u}_\rho = cos\theta\,\overrightarrow{i} + sin\theta\,\overrightarrow{j}. \\ \overrightarrow{u}_\theta = -sin\theta\,\overrightarrow{i} + cos\theta\,\overrightarrow{j}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Si on remplace l'équation (2.3), dans l'équation (2.2), on trouve :

$$\overrightarrow{OM} = \rho(t)\left(cos\theta\,\overrightarrow{i} + sin\theta\,\overrightarrow{j}\right) = \rho(t)\,cos\theta\,\overrightarrow{i} + \rho(t)\,sin\theta\,\overrightarrow{j}. \tag{2.4}$$

Par comparaison avec l'équation (2.1), on peut extraire la relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires et vis-versa :

$$\begin{cases} x(t) &= \rho(t)\, cos\theta. \\ y(t) &= \rho(t)\, sin\theta. \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \rho(t) &= \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}. \\ \theta &= Arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right). \end{matrix}$$

Pour un déplacement infinitézimal ou élémentaire du point matériel M, on peut définir le vecteur de déplacement élémentaire comme suit :

$$\overrightarrow{dl} = d\rho\, \overrightarrow{u}_\rho + \rho\, d\theta\, \overrightarrow{u}_\theta. \tag{2.5}$$

2.2.3 Les coordonnées cylindriques

Lorsqu'un mouvement a une symétrie cylindrique, il est plus commode d'utiliser le système de coordonnées cylindriques. On appelle ces dernières le triplet (ρ, θ, z) permettant de localiser le point matériel M ou $\left(\overrightarrow{u}_\rho, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{k}\right)$ est la base orthonormée directe associée à ces coordonnées.

Les coordonnées cylindriques ne sont qu'une extension des coordonnées polaires de base tournante $(\overrightarrow{u}_\rho, \overrightarrow{u}_\theta)$ auxquelles on ajoute une coordonnée z, dite axiale, suivant un axe perpendiculaire au plan xoy, où $\overrightarrow{k}$ est le vecteur unitaire fixé dans le référentiel d'étude.

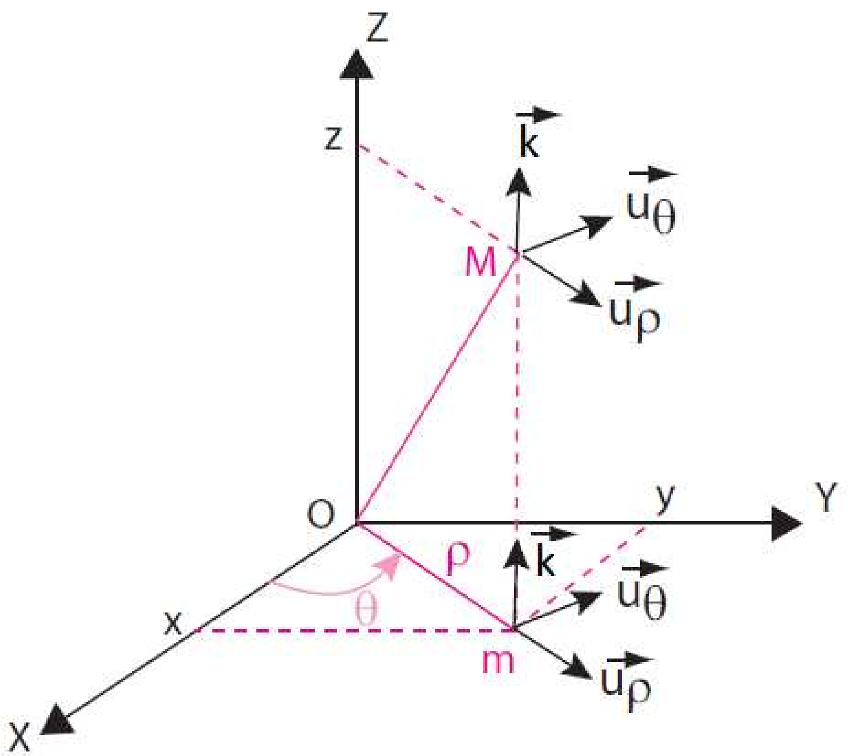

FIGURE 2.3 – Représentation d'un point M en coordonnées cylindriques.

La position du point matériel M dans les coordonnées cylindriques est donnée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho(t)\ \overrightarrow{u}_{\rho} + z(t)\ \overrightarrow{k}. \tag{2.6}$$

D'après la Figure (2.4) le point m est la projection orthogonale du point matériel M sur le plan xoy, qui est repéré par les coordonnées polaires.

Si on remplace l'équation (2.3), dans l'équation (2.6), on trouve :

$$\overrightarrow{OM} = \rho(t)\ \left[cos\theta\ \overrightarrow{i} + sin\theta\ \overrightarrow{j}\right] + z(t)\ \overrightarrow{k} = \rho(t)\, cos\theta\ \overrightarrow{i} + \rho(t)\, sin\theta\ \overrightarrow{j} + z(t)\ \overrightarrow{k}. \tag{2.7}$$

Par comparaison avec l'équation (2.1), on peut extraire la relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques et vis-versa :

$$\left\{\begin{array}{ll} x(t) & = \rho(t)\, cos\theta. \\ y(t) & = \rho(t)\, sin\theta. \\ z(t) & = \quad z(t). \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{ll} \rho(t) & = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}. \\ \theta & = Arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right). \\ r(t) & = \sqrt{\rho^2(t) + z^2(t)}. \end{array} \tag{2.8}$$

Pour un déplacement infinitézimal ou élémentaire du point matériel M, on peut définir :

Le vecteur de déplacement élémentaire :

$$\overrightarrow{dl} = d\rho\, \overrightarrow{u}_{\rho} + \rho\, d\theta\, \overrightarrow{u}_{\theta} + dz\, \overrightarrow{k}. \tag{2.9}$$

La surface élémentaire : $dS = \rho\, d\rho\, d\theta$ ou $dS = \rho\, d\theta\, dz$ ou $dS = d\rho\, dz$

Le volume élémentaire : $dV = \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$

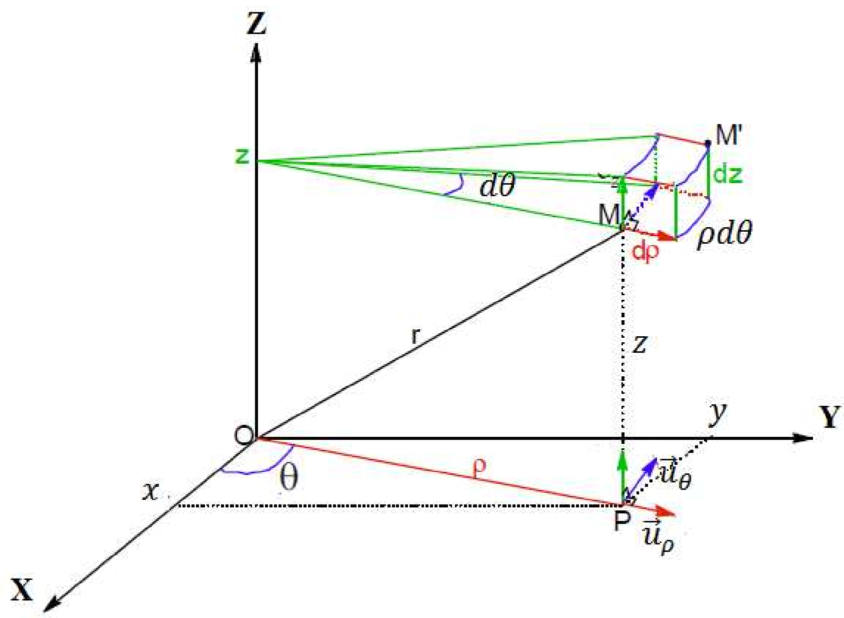

FIGURE 2.4 – Représentation des déplacements élémentaires en coordonnées cylindriques.

2.2.4 Les coordonnées sphériques

Lorsqu'un mouvement d'un point matériel M a une symétrie sphérique, il est plus commode d'utiliser le système de coordonnées sphériques, parce que les coordonnées cartésiennes ne sont pas très pratiques pour caractériser un point sur une sphère.

On appelle coordonnées sphérique le triplet (ρ, θ, φ) permettant de localiser le point matériel M, où $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_\varphi)$ est la base orthonormée directe associée aux coordonnées sphériques.

On définit les coordonnées sphériques de la façon suivante :

* $r = OM$ est le rayon.

* $\theta = \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OZ}\right)$ est l'angle colatitude, $\theta \in [0, \pi]$.

* $\varphi = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om}\right)$ est l'angle azimutal, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

La position du point matériel M dans les coordonnées cartésiennes est donnée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u}_r \tag{2.10}$$

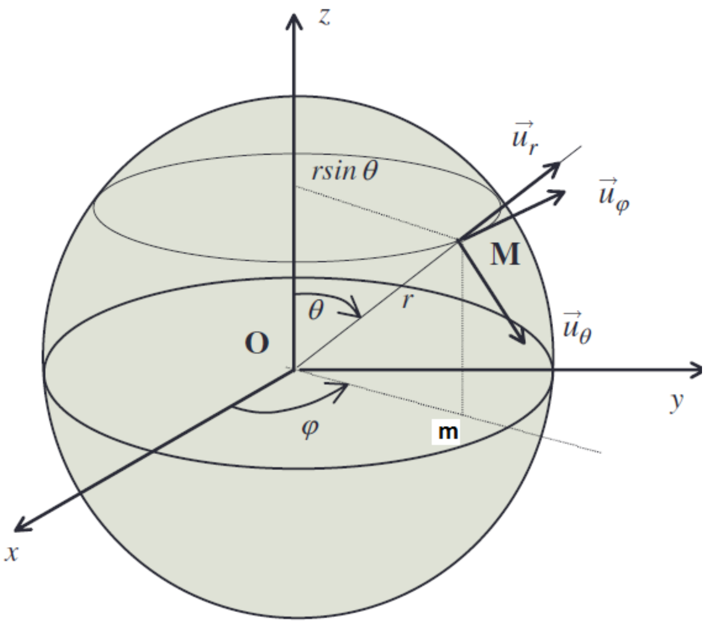

Figure 2.5 – Représentation d'un point M en coordonnées sphériques.

D'après la Figure (2.5), le point m est la projection orthogonale du point M sur le plan xoy, et on peut écrire les vecteurs unitaires de la base sphérique $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_\varphi)$ en fonction des vecteurs unitaires de la base cartésienne $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u}_r & = sin\theta\, cos\varphi\, \overrightarrow{i} + sin\theta\, sin\varphi\, \overrightarrow{j} + cos\theta\, \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{u}_\theta & = cos\theta\, cos\varphi\, \overrightarrow{i} + cos\theta\, sin\varphi\, \overrightarrow{j} - sin\theta\, \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{u}_\varphi & = -sin\varphi\, \overrightarrow{i} + cos\varphi\, \overrightarrow{j} \end{cases} \tag{2.11}$$

l'équation (2.11), permetter de trouver les relations entre les coordonnées cartésiennes

(x, y, z) et les coordonnées sphériques (r, θ, φ) et vis-versa :

$$\begin{cases} x\,(t) & = r\,(t)\,sin\theta\,cos\varphi. \\ y\,(t) & = r\,(t)\,sin\theta\,sin\phi. \\ z\,(t) & = r\,(t)\,cos\theta. \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} r\,(t) & = \sqrt{x^2\,(t) + y^2\,(t) + z^2\,(t)}. \\ \varphi & = Arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right). \\ \theta & = Arctan\left(\frac{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}{z(t)}\right). \end{array} \tag{2.12}$$

Pour un déplacement infinitézimal ou élémentaire du point matériel M, on peut définir :

Le vecteur de déplacement élémentaire par :

$$\overrightarrow{dl} = dr\,\overrightarrow{u}_r + r\,d\theta\,\overrightarrow{u}_\theta + r\,sin\theta\,d\phi\,\overrightarrow{u}_\phi. \tag{2.13}$$

La surface élémentaire : $dS = r\,dr d\theta$ ou $dS = r\,dr sin\theta\,d\phi$ ou $dS = r^2\,sin\theta\,d\theta\,d\phi$

Le volume élémentaire : $dV = r^2\,dr sin\theta\,d\theta\,d\phi$

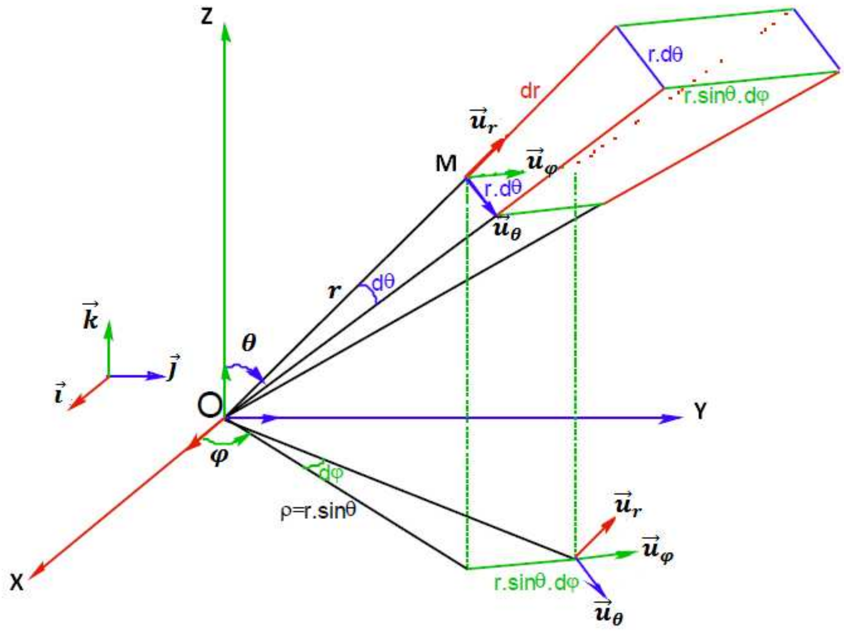

Figure 2.6 – Représentation des déplacements élémentaires en coordonnées sphériques.

2.3 Les vecteurs vitesse et accélération d'un point matériel :

2.3.1 Le vecteur vitesse

Le vecteur vitesse moyenne

Soit un mobile M, assimilé à un point matériel qui se déplace sur une trajectoire quelconque dans un référentiel R d'origine O, A l'instant t_1, il est dans la position M_1 et son vecteur de position est $\overrightarrow{r}_1 = \overrightarrow{OM}_1(t_1)$, A l'instant $t_2 = t_1 + \Delta t$, il est dans la position M_2 et son vecteur de position est $\overrightarrow{r}_2 = \overrightarrow{OM}_2(t_2)$.

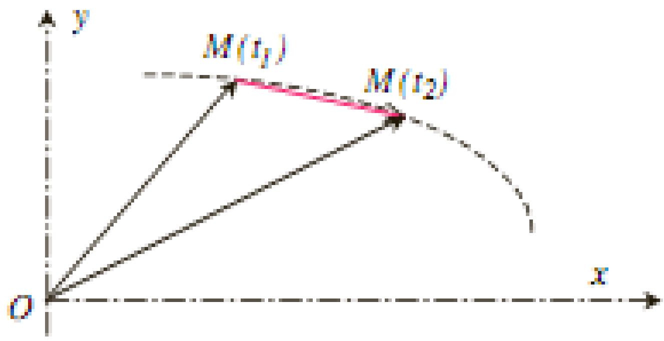

FIGURE 2.7 – Le vecteur déplacement

On définit le vecteur déplacement $\overrightarrow{\Delta r}$ comme suit :

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{OM}_2(t_2) - \overrightarrow{OM}_1(t_1) = \overrightarrow{OM}_1(t_1) + \overrightarrow{M_1M}_2 - \overrightarrow{OM}_1(t_1) = \overrightarrow{M_1M}_2. \qquad (2.14)$$

Donc, le vecteur vitesse moyenne noté $\overrightarrow{v}_m$ pour un intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$ est défini par la relation suivante :

$$\overrightarrow{v}_m = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}. \qquad (2.15)$$

On définit la vitesse moyenne v_m comme suit :

$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{M_1M_2}{\Delta t}. \qquad (2.16)$$

La vitesse moyenne v_m est la distance parcourue par unité de temps pour un mobile en mouvement.

Remarque

1) Dans le système international (SI), l'unité de la vitesse moyenne est le mètre par seconde $\left(\frac{m}{s}\right)$.

2) Nous voyons que la vitesse moyenne ne dépend que des deux points M_1 et M_2 et non pas de l'évolution de la vitesse entre ces deux points.

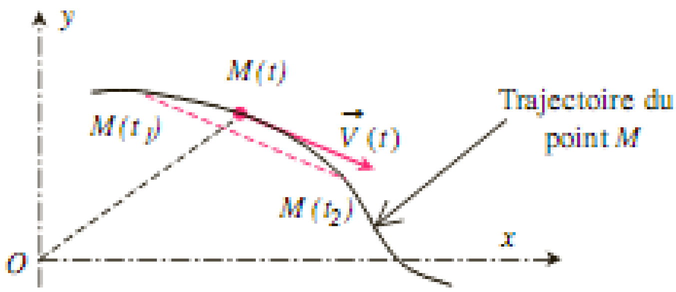

FIGURE 2.8 – La position d'un point M à deux instants différents t_1 et t_2

3) Graphiquement, la vitesse moyenne est la pente de la droite qui couper le diagramme position en fonction du temps aux points M_1 et M_2.

Le vecteur vitesse instantanée

La notion de la vitesse moyenne l'orsque l'intervalle de temps Δt est large ne convient pas pour décrire en détail le mouvement du mobile. En introduisant une nouvelle notion notée $\overrightarrow{v}$, qui est le vecteur vitesse instantanée, défini par le rapport $\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$ lorsque $t_2 \to t_1$, c'est-à-dire lorsque l'intervalle de temps Δt tend vers zéro, on aura :

$$\overrightarrow{v}\,(t) = lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overrightarrow{\Delta r}\,(t)}{\Delta t}\right) = \frac{d\overrightarrow{OM}\,(t)}{dt}, \tag{2.17}$$

Le vecteur vitesse instantanée est la variation du vecteur position par rapport au temps. On le définit comme suit :

$$v\,(t) = \frac{dOM\,(t)}{dt}. \tag{2.18}$$

Donc, la vitesse instantanée est la mesure de la vitesse d'un mobile à un instant bien déterminé.

Remarque

1) Dans le système international (SI), l'unité de la vitesse instantanée est le mètre par seconde $\left(\frac{m}{s}\right)$.

2) D'après l'équation (2.17), le vecteur vitesse instantanée est simplement une dérivée du vecteur position par rapport au temps, cette notation de la dérivée donée

par l'équation (2.18), a été établie par le mathématicien allemand $Gottfried\, Leibniz$.

3) Graphiquement, le vecteur vitesse instantanée $\overrightarrow{v}$ à l'instant t est un vecteur tangent à la trajectoire au point M considéré.

4) Le vecteur vitesse instantanée est orienté dans le sens du mouvement, c'est-à-dire sur une trajectoire orientée. Si le point matériel se déplace dans le sens positif ($négatif$), le vecteur vitesse est dirigé dans le sens positif ($négatif$).

5) Le graphe de la vitesse en fonction du temps est appelé diagramme de la vitesse.

2.3.2 Le vecteur d'accélération

Le vecteur d'accélération moyenne

Généralement en physique, la vitesse peut varier avec le temps. On caractérise ce changement en introduisant une nouvelle notion qui est le vecteur d'accélération $\overrightarrow{a}$ qui représente le taux de variation du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ en fonction du temps.

Soit un mobile M, assimilé à un point matériel, qui se déplace sur une trajectoire quelconque dans un référentiel R d'origine O. A l'instant t_1, il est dans la position M_1 et sa vecteur de vitesse est $\overrightarrow{v}_1(t_1)$. A l'instant $t_2 = t_1 + \Delta t$, il est dans la position M_2 et sa vecteur de vitesse est $\overrightarrow{v}_2(t_2)$.

On peut définir l'accélération moyenne $\overrightarrow{a}_m$ d'un mobile entre deux instants t_1 et t_2 par la relation suivante :

$$\overrightarrow{a}_m = \frac{\overrightarrow{v}_2(t_2) - \overrightarrow{v}_1(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}. \tag{2.19}$$

Remarque

1) Dans le système international (SI), l'unité de l'accélération moyenne est le mètre par seconde au carré $\left(\frac{m}{s^2}\right)$.

2) Nous voyons que l'accélération moyenne ne dépend que des deux points M_1 et M_2 et non pas de l'évolution de l'accélération entre ces deux points.

3) Graphiquement, l'accélération moyenne est la pente de la droite qui coupe le diagramme de vitesse en fonction du temps aux points M_1 et M_2.

Le vecteur accélération instantanée

Par analogie avec l'équation (2.17), on définit le vecteur accélération instantanée par la relation suivante :

$$\overrightarrow{a}(t) = lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\overrightarrow{\Delta v}(t)}{\Delta t} \right) = \frac{d\overrightarrow{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2}. \tag{2.20}$$

On définit l'accélération instantanée comme suit :

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2OM(t)}{dt^2},$$

L'accélération instantanée illustre le taux d'augmentation ou de diminution de la vitesse et son changement de direction. Nous voyons que l'accélération instantanée est la dérivée première par rapport au temps de vitesse ou bien la dérivée seconde de la position.

Remarque

1) Dans le système international (SI), l'unité de l'accélération instantanée est le mètre par seconde au carré $\left(\frac{m}{s^2}\right)$.

2) Graphiquement, le vecteur l'accélération instantanée $\overrightarrow{a}$ a l'instant t est un vecteur tangent à la trajectoire au point M considéré.

3) Le graphe de l'accélération en fonction des temps est appelé diagramme de l'accélération.

2.3.3 Expression des vecteurs vitesse et accélération en systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes

Le vecteur position pour un point matériel M qui se déplaçant dans un référentiel $R\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est donné par la relation suivante :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\overrightarrow{i} + y(t)\,\overrightarrow{j} + z(t)\,\overrightarrow{k}, \tag{2.21}$$

où $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ sont les veteurs unitaires qui sont fixés au cours du temps, c'est-à-dire ne varier pas avec le temps :

$$\frac{d\overrightarrow{i}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{j}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{k}}{dt} = \overrightarrow{0}. \tag{2.22}$$

Pour obtenir le vecteur vitesse instantanée, on dérive le vecteur de position par rapport au temps, on trouve :

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\overrightarrow{i} + x(t)\frac{d\overrightarrow{i}}{dt} + \frac{dy(t)}{dt}\overrightarrow{j} + y(t)\frac{d\overrightarrow{j}}{dt} + \frac{dz(t)}{dt}\overrightarrow{k} + z(t)\frac{d\overrightarrow{k}}{dt}. \tag{2.23}$$

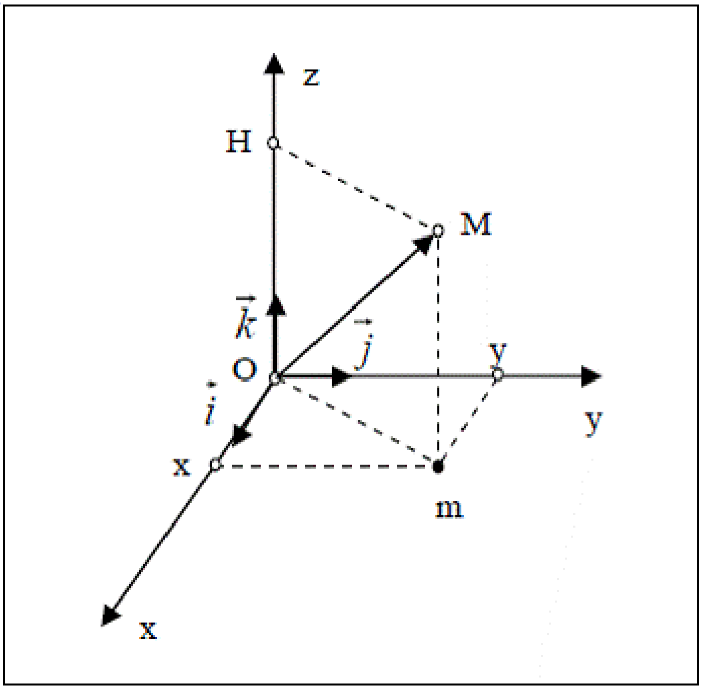

FIGURE 2.9 – Représentation d'un point M en coordonnées cartésiennes

En utilisant de l'équation (2.22), l'expression de vecteur vitesse instantanée devient :

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{dy(t)}{dt}\overrightarrow{j} + \frac{dz(t)}{dt}\overrightarrow{k}. \tag{2.24}$$

$$\overrightarrow{v}(t) = \dot{x}(t)\overrightarrow{i} + \dot{y}(t)\overrightarrow{j} + \dot{z}(t)\overrightarrow{k}. \tag{2.25}$$

$$\overrightarrow{v}(t) = v_x(t)\overrightarrow{i} + v_y(t)\overrightarrow{j} + v_z(t)\overrightarrow{k}. \tag{2.26}$$

Son module est donné par :

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}. \tag{2.27}$$

En suivant la même procédure, on dérive le vecteur vitesse et on obtient l'expression de l'accélération instantanée :

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{d\overrightarrow{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\overrightarrow{j} + \frac{dv_y(t)}{dt}\overrightarrow{k}. \tag{2.28}$$

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)\overrightarrow{i} + \ddot{y}(t)\overrightarrow{j} + \ddot{z}(t)\overrightarrow{k}. \tag{2.29}$$

$$\overrightarrow{a}(t) = a_x(t)\overrightarrow{i} + a_y(t)\overrightarrow{j} + a_z(t)\overrightarrow{k}. \tag{2.30}$$

Son module est donné par :

$$a(t) = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t) + a_z^2(t)}. \tag{2.31}$$

Coordonnées polaires :

Le vecteur position pour un point matériel M se déplaçant dans un référentiel $R(O, \overrightarrow{u}_\rho, \overrightarrow{u}_\theta)$ est donnée par la relation suivante :

$$\overrightarrow{OM}(t) \ = \ \rho(t)\overrightarrow{u}_\rho, \tag{2.32}$$

où $(\overrightarrow{u}_\rho, \overrightarrow{u}_\theta)$ est une base variable au cours du temps, c'est-à-dire : $\frac{d\overrightarrow{u}_\rho}{dt} \neq 0$ et $\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{dt} \neq 0$ ($(\overrightarrow{u}_\rho, \overrightarrow{u}_\theta)$ une base locale).

Avant de passer au calcul du vecteur vitesse, en calcule d'abord la dérivée de la base par rapport au temps :

$$\frac{d\overrightarrow{u}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{d\theta}\frac{d\overrightarrow{u}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\overrightarrow{u}_\rho}{d\theta} = \dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{u}_\rho}{d\theta}. \tag{2.33}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\theta}\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{d\theta} = \dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{d\theta}. \tag{2.34}$$

D'autre part, on peut exprimer les vecteurs de cette base locale dans la base des coordonnées cartésiennes : Il suffit de faire une projection des vecteurs de cette base locale $\overrightarrow{u}_{\rho}$ et $\overrightarrow{u}_{\theta}$ sur les axes (Ox) et (Oy) :

$$\overrightarrow{u}_{\rho} = cos\theta\,\overrightarrow{i} + sin\theta\,\overrightarrow{j} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{u}_{\rho}}{d\theta} = \frac{d\left(cos\theta\,\overrightarrow{i} + sin\theta\,\overrightarrow{j}\right)}{d\theta} = -sin\theta\,\overrightarrow{i} + cos\theta\,\overrightarrow{j} = \overrightarrow{u}_{\theta}. \tag{2.35}$$

$$\overrightarrow{u}_{\theta} = -sin\theta\,\overrightarrow{i} + cos\theta\,\overrightarrow{j} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{u}_{\theta}}{d\theta} = \frac{d\left(-sin\theta\,\overrightarrow{i} + cos\theta\,\overrightarrow{j}\right)}{d\theta} = -cos\theta\,\overrightarrow{i} - sin\theta\,\overrightarrow{j} = -\overrightarrow{u}_{\rho}. \tag{2.36}$$

Finalement, on trouve :

$$\frac{d\overrightarrow{u}_{\rho}}{dt} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u}_{\theta}. \tag{2.37}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u}_{\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{u}_{\rho}. \tag{2.38}$$

L'expression du vecteur vitesse instantanée en coordonnées polaires est donc :

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho(t)\,\overrightarrow{u}_{\rho}\right) = \frac{d\rho(t)}{dt}\overrightarrow{u}_{\rho} + \frac{d\overrightarrow{u}_{\rho}}{dt}\rho(t),$$

En utilisant de l'équation (2.37), l'expression du vecteur vitesse instantanée devient :

$$\overrightarrow{v}(t) = \dot{\rho}(t)\,\overrightarrow{u}_{\rho} + \dot{\theta}\,\rho(t)\,\overrightarrow{u}_{\theta} = v_{\rho}\overrightarrow{u}_{\rho} + v_{\theta}\overrightarrow{u}_{\theta}, \tag{2.39}$$

où $v_r(t) = v_{\rho}(t) = \dot{\rho}(t)$ est la vitesse radiale et $v_{\theta}(t) = \dot{\theta}\,\rho(t)$ est la vitesse transversale ou orthoradiale.

Donc, le module du vecteur vitesse instantanée est :

$$v(t) = \sqrt{v_{\rho}^2 + v_{\theta}^2} = \sqrt{(\dot{\rho}(t))^2 + \left(\dot{\theta}\,\rho(t)\right)^2}. \tag{2.40}$$

Le vecteur d'accélération instantanée dans les coordonnées polaires est défini comme suit :

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{d\overrightarrow{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\overrightarrow{u}_{\rho} + \dot{\theta}\rho\overrightarrow{u}_{\theta}\right) = \frac{d\dot{\rho}}{dt}\overrightarrow{u}_{\rho} + \dot{\rho}\frac{d\overrightarrow{u}_{\rho}}{dt} + \frac{d\dot{\theta}}{dt}\rho\overrightarrow{u}_{\theta} + \frac{d\rho}{dt}\dot{\theta}\overrightarrow{u}_{\theta} + \dot{\theta}\rho\frac{d\overrightarrow{u}_{\theta}}{dt},$$

$$\overrightarrow{a}(t) = \ddot{\rho}\overrightarrow{u}_{\rho} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{u}_{\theta} + \ddot{\theta}\rho\overrightarrow{u}_{\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{u}_{\theta} - \dot{\theta}^2\rho\overrightarrow{u}_{\rho},$$

$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{\rho} - \dot{\theta}^2\rho\right)\vec{u}_\rho + \left(\ddot{\theta}\rho + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{u}_\theta = a_\rho\vec{u}_\rho + a_\theta\vec{u}_\theta. \tag{2.41}$$

où $a_\rho(t) = \left(\ddot{\rho} - \dot{\theta}^2\rho\right)$ est l'accélération radial et $a_\theta(t) = \left(\ddot{\theta}\rho + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)$ est l'accélération transversale.

Le module du vecteur l'accélération instantanée est donc :

$$a(t) = \sqrt{a_\rho^2(t) + a_\theta^2(t)} = \sqrt{\left(\ddot{\rho} - \dot{\theta}^2\rho\right)^2 + \left(\ddot{\theta}\rho + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)^2}. \tag{2.42}$$

Coordonnées cylindriques

Le vecteur position pour un point matériel M se déplaçant dans un référentiel $R\left(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k}\right)$ est donné par la relation suivante :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \rho(t)\vec{u}_\rho + z(t)\vec{k}, \tag{2.43}$$

Où le couple $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ est une base locale qui varie avec le temps, c'est-à-dire : $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} \neq \vec{0}$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \neq \vec{0}$, mais le vecteur unitaire $\vec{k}$ non, c'est-à-dire $\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$.

L'expression de la vitesse instantanée en coordonnées cylindriques est la dérivée du vecteur de position :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho(t)\vec{u}_\rho + z(t)\vec{k}\right) = \frac{d\rho(t)}{dt}\vec{u}_\rho + \frac{d\vec{u}_\rho}{dt}\rho(t) + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k},$$

Donc, a l'utilisation de l'équation (2.37), l'expression du vecteur vitesse instantanée devient :

$$\vec{v}(t) = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \dot{\theta}\,\rho(t)\vec{u}_\theta + \dot{z}(t)\vec{k} = v_\rho(t)\vec{u}_\rho + v_\theta(t)\vec{u}_\theta + v_z(t)\vec{k}, \tag{2.44}$$

où $v_r(t) = v_\rho(t) = \dot{\rho}(t)$ est la vitesse radiale, $v_\theta(t) = \dot{\theta}\,\rho(t)$ est la vitesse transversale et $v_z(t) = \dot{z}(t)$ est la vitesse spaciale (axiale).

Donc, le module du vecteur vitesse instantanée est :

$$v(t) = \sqrt{v_r^2(t) + v_\theta^2(t) + v_z^2(t)} = \sqrt{(\dot{\rho}(t))^2 + \left(\dot{\theta}\,\rho(t)\right)^2 + \dot{z}^2(t)}. \tag{2.45}$$

Le vecteur d'accélération instantanée dans des coordonnées cylindriques est défini comme suit :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\theta}\rho\vec{u}_\theta + \dot{z}(t)\vec{k}\right),$$

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{d\dot{\rho}}{dt}\overrightarrow{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\overrightarrow{u}_\rho}{dt} + \frac{d\dot{\theta}}{dt}\rho\overrightarrow{u}_\theta + \frac{d\rho}{dt}\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \dot{\theta}\rho\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{dt} + \ddot{z}(t)\overrightarrow{k},$$

En utilisant l'équation (2.37) et l'équation (2.38) , l'expression du vecteur d'accélération instantanée devient :

$$\overrightarrow{a}(t) = \ddot{\rho}\overrightarrow{u}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \ddot{\theta}\rho\overrightarrow{u}_\theta + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta - \dot{\theta}^2\rho\overrightarrow{u}_\rho + \ddot{z}(t)\overrightarrow{k},$$

$$\overrightarrow{a}(t) = \left(\ddot{\rho} - \dot{\theta}^2\rho\right)\overrightarrow{u}_\rho + \left(\ddot{\theta}\rho + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \ddot{z}(t)\overrightarrow{k} = a_\rho(t)\overrightarrow{u}_\rho + a_\theta(t)\overrightarrow{u}_\theta + a_z(t)\overrightarrow{k}. \tag{2.46}$$

où $a_r(t) = a_\rho(t) = \left(\ddot{\rho} - \dot{\theta}^2\rho\right)$ est l'accélération radial et $v_\theta(t) = \left(\ddot{\theta}\rho + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)$ est l'accélération transversal et $a_z(t) = \ddot{z}(t)$ est l'accélération spaciale.

Le module du vecteur l'accélération instantanée est donc :

$$a(t) = \sqrt{a_r^2(t) + a_\theta^2(t) + a_z^2(t)} = \sqrt{\left(\ddot{\rho} - \dot{\theta}^2\rho\right)^2 + \left(\ddot{\theta}\rho + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)^2 + \ddot{z}^2(t)}. \tag{2.47}$$

Coordonnées sphériques

Le vecteur position pour un point matériel M se déplacant dans un référentiel $R(O, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_\varphi)$ est donné par la relation suivante :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\overrightarrow{u}_r, \tag{2.48}$$

où $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_\varphi)$ est une base qui varier avec le temps, c'est-à-dire : $\frac{d\overrightarrow{u}_r}{dt}, \frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{dt}, \frac{d\overrightarrow{u}_\varphi}{dt} \neq \overrightarrow{0}$.

En calculant d'abord les dérivés des bases par rapport au temps :

$$\frac{d\overrightarrow{u}_r(\theta,\varphi)}{dt} = \frac{d\theta}{d\theta}\frac{d\overrightarrow{u}_r}{dt} + \frac{d\varphi}{d\varphi}\frac{d\overrightarrow{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{u}_r}{d\theta}\right)_\varphi + \frac{d\varphi}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{u}_r}{d\varphi}\right)_\theta = \dot{\theta}\left(\frac{d\overrightarrow{u}_r}{d\theta}\right)_\varphi + \dot{\varphi}\left(\frac{d\overrightarrow{u}_r}{d\varphi}\right)_\theta. \tag{2.49}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u}_\theta(\theta,\varphi)}{dt} = \frac{d\theta}{d\theta}\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{dt} + \frac{d\varphi}{d\varphi}\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{d\theta}\right)_\varphi + \frac{d\varphi}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{d\varphi}\right)_\theta = \dot{\theta}\left(\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{d\theta}\right)_\varphi + \dot{\varphi}\left(\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{d\varphi}\right)_\theta. \tag{2.50}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u}_\varphi(\varphi)}{dt} = \frac{d\varphi}{d\varphi}\frac{d\overrightarrow{u}_\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{u}_\varphi}{d\varphi}\right)_\theta = \dot{\varphi}\left(\frac{d\overrightarrow{u}_\varphi}{d\varphi}\right)_\theta. \tag{2.51}$$

D'autre part, on peut calculer les cinq dérivés partiels à l'aide de l'équation (2.11) :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{u}_r}{d\theta}\right)_\varphi = cos\theta\, cos\varphi\, \overrightarrow{i} + cos\theta\, sin\varphi\, \overrightarrow{j} - sin\theta\, \overrightarrow{k} = \overrightarrow{u}_\theta. \tag{2.52}$$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{u}_r}{d\varphi}\right)_\theta = sin\theta\, \left(-\, sin\varphi\, \overrightarrow{i} + cos\varphi\, \overrightarrow{j}\right) = sin\theta\, \overrightarrow{u}_\varphi \tag{2.53}$$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{d\theta}\right)_\varphi = -\left(sin\theta\, cos\varphi\, \overrightarrow{i} + sin\theta\, sin\varphi\, \overrightarrow{j} + cos\theta\, \overrightarrow{k}\right) = -\overrightarrow{u}_r. \tag{2.54}$$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{d\varphi}\right)_\theta = cos\theta\, \left(-\, sin\varphi\, \overrightarrow{i} + cos\varphi\, \overrightarrow{j}\right) = cos\theta\, \overrightarrow{u}_\varphi \tag{2.55}$$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{u}_\varphi}{d\varphi}\right)_\theta = -\left(cos\varphi\, \overrightarrow{i} + sin\varphi\, \overrightarrow{j}\right) = -sin\theta\, \overrightarrow{u}_r - cos\theta\, \overrightarrow{u}_\varphi \tag{2.56}$$

Donc finalement, on trouve :

$$\frac{d\overrightarrow{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\, \overrightarrow{u}_\theta + \dot{\varphi}\, sin\theta\, \overrightarrow{u}_\varphi, \tag{2.57}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u}_r + \dot{\varphi}\, cos\theta\, \overrightarrow{u}_\varphi, \tag{2.58}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\left(sin\theta\overrightarrow{u}_r + cos\theta\overrightarrow{u}_\theta\right). \tag{2.59}$$

Pour obtenir l'expression de vecteur vitesse instantanée du point M, il suffit de dériver l'expression de vecteur position par rapport au temps :

$$\overrightarrow{v}\,(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}\,(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\,(t)\,\overrightarrow{u}_r\right) = \frac{dr\,(t)}{dt}\overrightarrow{u}_r + \frac{d\overrightarrow{u}_r}{dt}r\,(t)\,,$$

où on a utilisé les équations (2.57), (2.58), (2.59).

L'expression de vecteur vitesse instantanée en coordonnées sphérique est donnée par :

$$\overrightarrow{v}\,(t) = \dot{r}\,(t)\,\overrightarrow{u}_r + r\,(t)\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u}_\theta + r\,(t)\,\dot{\varphi}\, sin\theta\,\overrightarrow{u}_\varphi = v_r\overrightarrow{u}_r + v_\theta\overrightarrow{u}_\theta + v_\varphi\overrightarrow{u}_\varphi, \tag{2.60}$$

où $v_r\,(t) = \dot{r}\,(t)$ est la vitesse radiale, $v_\theta\,(t) = \dot{\theta}\,\rho\,(t)$ est la vitesse transversale et $v_\varphi = r\,(t)\,\dot{\varphi}\, sin\theta$.

Le module du vecteur vitesse instantanée est donc :

$$v\,(t) = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\left(\dot{r}\,(t)\right)^2 + \left(\dot{\theta}\, r\,(t)\right)^2 + \left(r\,(t)\,\dot{\varphi}\, sin\theta\right)^2}. \tag{2.61}$$

Le vecteur accélération instantanée dans les coordonnées sphériques est définie comme suit :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\vec{u}_r + r(t)\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r(t)\,\dot{\varphi}\,sin\theta\,\vec{u}_\varphi\right)$$

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) \;=\; & \tfrac{d\dot{r}}{dt}\vec{u}_r + \dot{r}\tfrac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\tfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \dot{r}\,\dot{\varphi}\,sin\theta\,\vec{u}_\varphi \\ & + r\,\ddot{\varphi}\,sin\theta\,\vec{u}_\varphi + r\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\,cos\theta\,\vec{u}_\varphi + r\,\dot{\varphi}\,sin\theta\,\tfrac{d\vec{u}_\varphi}{dt},\end{aligned}$$

Pour obtenir l'expression du vecteur de l'accélération instantanée, on doit utiliser les équations (2.57), (2.58), (2.59) :

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) \;=\; & \ddot{r}\,\vec{u}_r + \dot{r}\left(\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\,sin\theta\,\vec{u}_\varphi\right) + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\,\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\,\vec{u}_r + \dot{\varphi}\,cos\theta\,\vec{u}_\varphi\right) + \\ & + \dot{r}\,\dot{\varphi}\,sin\theta\,\vec{u}_\varphi + r\,\ddot{\varphi}\,sin\theta\,\vec{u}_\varphi + r\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\,cos\theta\,\vec{u}_\varphi - r\,(\dot{\varphi})^2\,sin\theta\,(sin\theta\,\vec{u}_r + cos\theta\,\vec{u}_\theta),\end{aligned}$$

Finalement, on trouve l'expression du vecteur accélération instantanée :

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) \;=\; & \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\,\dot{\varphi}sin\theta\,cos\theta\right)\vec{u}_\theta + \\ & + \left(r\ddot{\varphi}sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\theta\right)\vec{u}_\varphi.\end{aligned}$$

Pour une écriture simple, on peut écrire le vecteur d'accélération sous la forme suivante :

$$\vec{a}(t) = a_r\vec{u}_\rho + a_\theta\vec{u}_\theta + a_\varphi\vec{u}_\varphi. \tag{2.62}$$

où $a_r(t) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\,\dot{\varphi}^2\,sin^2\theta\right)$ est l'accélération radial et

$a_\theta(t) = \left(r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\,\dot{\varphi}^2\,sin\theta\,cos\theta\right)$ est l'accélération transversale.

$a_\varphi(t) = \left(r\ddot{\varphi}sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\theta\right)$.

Le module du vecteur d'accélération instantanée est donc :

$$a(t) = \sqrt{(a_r(t))^2 + (a_\theta(t))^2 + (a_\varphi(t))^2}. \tag{2.63}$$

Base de Frénet

On peut déterminer la vitesse et l'accélération d'un point matériel qui se mouve dans un repère fixe R où la trajectoire est une courbe plane dans une nouvelle base locale mobile qui se déplace avec le point matériel appelée base du $Frénet$.

Cette base locale fait intervenir le cercle osculateur à la trajectoire du point matériel, c'est-à-dire le cercle qui est tangent localement à la trajectoire du point matériel.

Elle est constituée de deux vecteurs unitaires orthogonaux $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_n$, le premier, dit vecteur tangent, est tangent à la trajectoire au point considéré et dirigé dans le sens

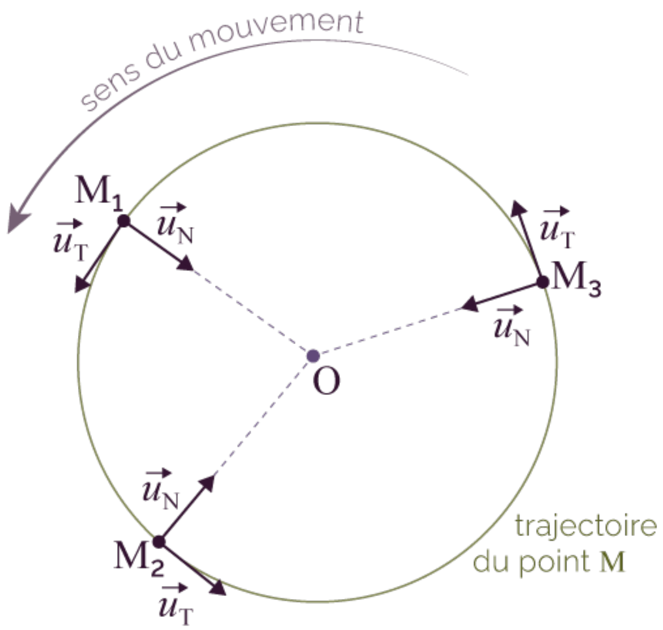

FIGURE 2.10 – Abscisse curviligne et base de Frenet

positif du mouvement, par contre, le deuxième est orienté vers le côté concave de la trajectoire et dit vecteur normal.

On considère l'abscisse curviligne $s\,(t)$ du point matériel au point M à l'instant t et l'abscisse curviligne $s\,(t')$ du point matériel au point M', à l'instant $t' = t + \Delta t$. Donc, le vecteur de déplacement de ce point matériel entre les deux points M et M' est :

$$\overrightarrow{OM}'\,(t') - \overrightarrow{OM}\,(t) = \overrightarrow{MM'} = S\,\overrightarrow{u}_t. \tag{2.64}$$

Ou S est la longueur d'arc MM'. Donc le déplacement élémentaire du point M s'écrit :

$$\overrightarrow{dOM}\,(t) = \overrightarrow{dMM'} = dS\,\overrightarrow{u}_t. \tag{2.65}$$

Le vecteur vitesse du point matériel est par définition :

$$\overrightarrow{v}\,(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dS\,(t)}\frac{dS\,(t)}{dt} = \frac{dS\,(t)}{dt}\overrightarrow{u}_t = \dot{S}\,(t)\,\overrightarrow{u}_t, \tag{2.66}$$

On Remarque que le module de vecteur vitesse est égal à $\dot{S}$.

Pour obtenir l'expression du vecteur accélérateur du point M, il suffit de dériver l'expression du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\overrightarrow{a}\,(t) = \frac{d\overrightarrow{v}\,(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{S}\,(t)\,\overrightarrow{u}_t\right) = \frac{d\dot{S}\,(t)}{dt}\,\overrightarrow{u}_t + \dot{S}\,(t)\,\frac{d\overrightarrow{u}_t}{dt}, \tag{2.67}$$

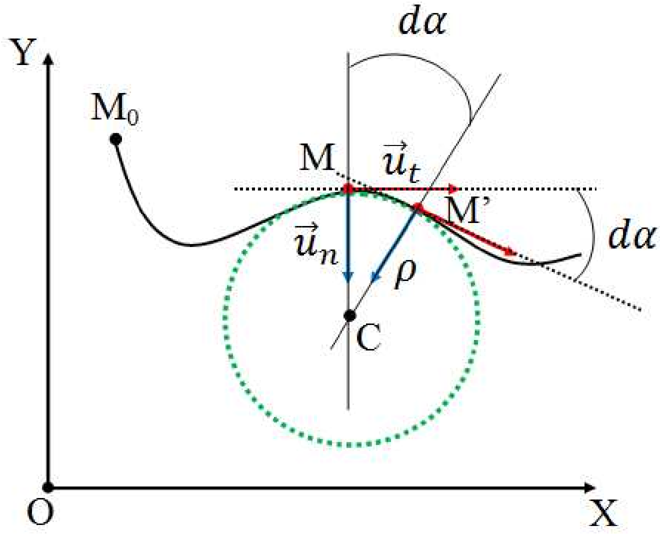

Figure 2.11 – Base de Frénet et cercle osculateur

$$\vec{a}\,(t) = \ddot{S}\,(t)\ \vec{u}_t + v\,\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{dv\,(t)}{dt}\,\vec{u}_t + v\,\frac{v}{\rho}\,\vec{u}_n, \tag{2.68}$$

Puis qu'on a :

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\vec{u}_n = \dot{\alpha}\,\vec{u}_n = \frac{d\left(\frac{S}{\rho}\right)}{dt}\vec{u}_n = \frac{1}{\rho}\frac{d\,(S)}{dt}\vec{u}_n = \frac{1}{\rho}\dot{S}\,(t)\,\vec{u}_n = \frac{v}{\rho}\vec{u}_n.$$

α représente l'angle que fait le vecteur tangent $\vec{u}_t$ quand le mobile se déplace entre le point M et M', d'autrement, on peut dire que α est l'angle de rotation du vecteur tangent entre l'instant t et t'.

Donc, l'expression de vecteur d'accélérateur et son module sont données par :

$$\vec{a}\,(t) = \frac{dv\,(t)}{dt}\,\vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{u}_n = a_t\,\vec{u}_t + a_n\,\vec{u}_n, \tag{2.69}$$

$$a\,(t) = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \tag{2.70}$$

$a_t = \frac{dv(t)}{dt}$ est l'accélération tangentielle et $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ est l'accélération normale.

Remarque

1) On peut exprimer l'accélération tangentielle a_t, l'accélération normale a_n et le rayon de courbure ρ de la manière suivante :

$$a_t = \frac{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{v}}{v}, \;\; a_n = \frac{\|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{v}\|}{v}, \;\; \rho = \frac{v^3}{\|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{v}\|}. \tag{2.71}$$

2) On dit que le mouvement est circulaire si $\rho = Cte$, l'orque $a_t = 0$: on dit que le mouvement est uniforme. Si $\rho = Cte$ et $a_t = 0$: le mouvement dans ce cas est circulaire uniforme.

3) Si $a_n = 0$, le mouvement est dit rectiligne et si $a_n = Cte$, on dit que le mouvement est uniformément varié.

2.4 Exemples de mouvements

2.4.1 Mouvements rectilignes

On dit que le mouvement est rectiligne si la trajectoire d'un point matériel M est une ligne droite. On peut décrire le mouvement rectiligne d'un système en utilisant le vecteur déplacement, la vitesse et l'accélération de son centre de masse. Selon la variation du vecteur accélération par rapport au temps, on peut distinguer les différents types de mouvements rectilignes :

1/ Le mouvement rectiligne uniforme

On dit que le mouvement d'un point matériel M est rectiligne uniforme si la trajectoire est une ligne droite et l'accélérateur est nul, par conséquent, la vitesse du mobile est constante. Pour déterminer et tracer les trois équations horaires du mouvement, nous considérons qu'un point matériel M se déplace le long de l'axe (OX) d'un référentiel $R\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ repéré par le vecteur position $\overrightarrow{OM}\,(t=0) = x_0\overrightarrow{i}$ et son

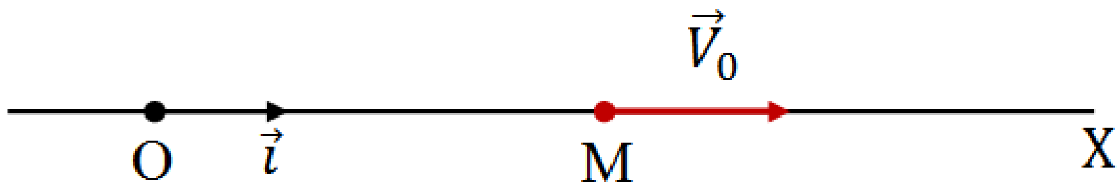

FIGURE 2.12 – Point matériel M se déplace le long de l'axe (OX)

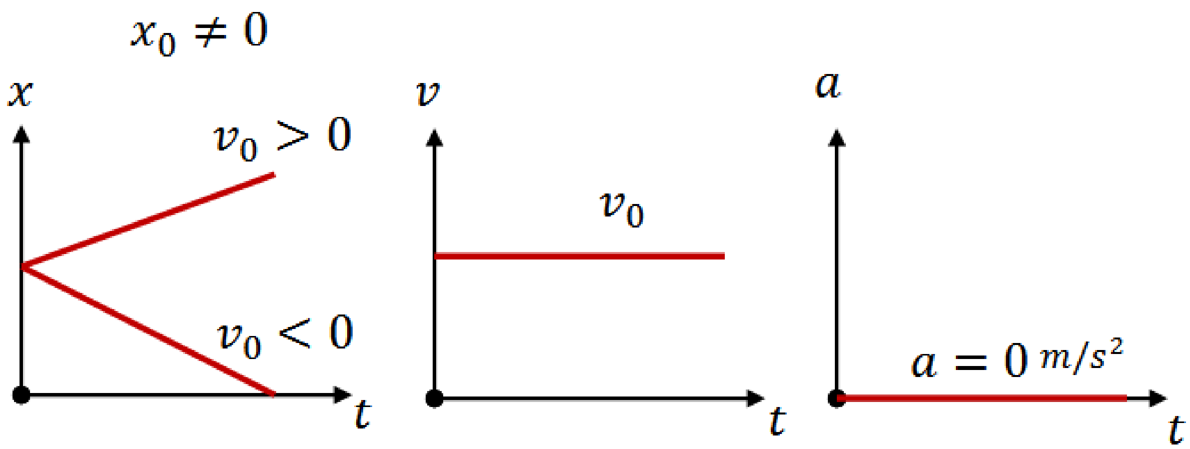

FIGURE 2.13 – Les diagrammes position, vitesse, et accélération, en foction de temps t.

vecteur de vitesse initial $\vec{v}\,(t=0) = v_0\,\vec{i}$ ou $v_0 = Cte$.

Comme le mouvement est rectiligne uniforme, donc :

$$\vec{a} = 0\,\vec{i} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0\,\vec{i} \Longrightarrow \vec{v} = v_0\,\vec{i} \tag{2.72}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_0 dt \Longrightarrow x = v_0\,t + x_0 \tag{2.73}$$

D'après l'équation (2.73), l'équation horaire de la position (la position en fonction du temps) est une droite.

Nous illustrons dans la figure (2.13), les trois types de graphiques utilisés pour visualiser les mouvements rectilignes.

2/ Le mouvement rectiligne uniformément varié

On dit que le mouvement d'un point matériel M est rectiligne uniformément varié si l'accélérateur est constant et la trajectoire rectiligne. Nous considérons un point matériel M se déplace le long de l'axe (OX) d'un référentiel $R\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, repéré par le vecteur position $\overrightarrow{OM}\,(t_0 = 0) = x_0\,\overrightarrow{i}$, son vecteur vitesse initial $\overrightarrow{v}\,(t_0 = 0) = v_0\,\overrightarrow{i}$ et son vecteur accélérateur initial $\overrightarrow{a} = a_0\,\overrightarrow{i}$, ou $a_0 = Cte$.

Par intégration, on trouve l'équation horaire de la vitesse :

$$a\,(t) = a_0 = Cte\,\frac{dv}{dt} = a_0 \int\limits_{v_0}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} a_0 dt,$$

Donc, on obtient :

$$v(t) - v(0) = a_0\,(t - t_0) \tag{2.74}$$

$$v(t) = a_0\,t + v_0, \tag{2.75}$$

D'après l'équation (2.75), l'équation horaire de la vitesse (la vitesse en fonction du temps) est une droite. Par intégration, on trouve l'équation horaire de position :

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \int\limits_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt x(t) - x(0) = \int_{t_0}^{t} (a_0\,t + v_0)\;dt,$$

Donc, on obtient :

$$x(t) - x(0) = \frac{1}{2}a_0\,\left(t^2 - t_0^2\right) + v_0\,(t - t_0) \tag{2.76}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0\,t^2 + v_0 t + x_0. \tag{2.77}$$

D'après l'équation (2.77), l'équation horaire de la position est une parabole. Nous

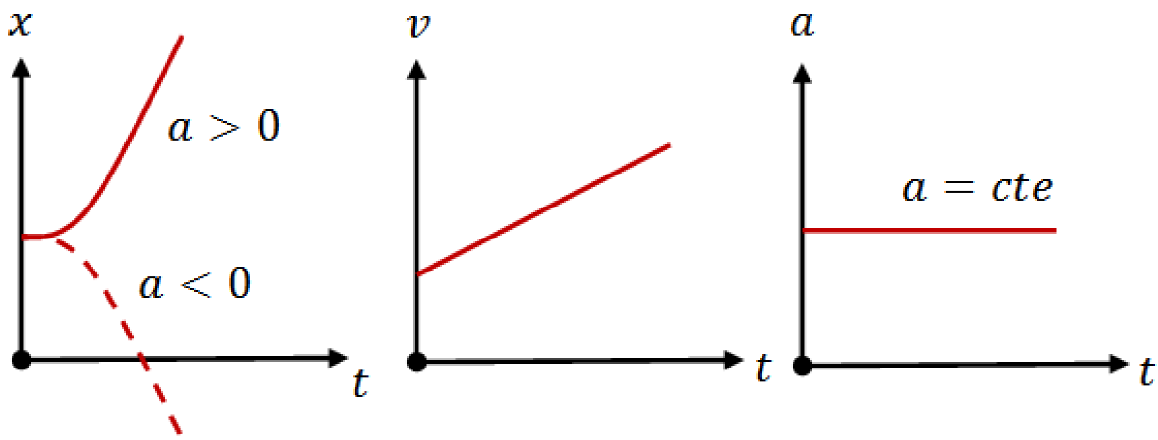

FIGURE 2.14 – Les diagrammes position, vitesse, et accélération, en foction de temps t.

illustrons dans la figure (2.14), les trois types de graphiques utilisés pour visualiser les mouvements rectilignes.

Si le vecteur Vitesse et le vecteur d'accélération ont la même direction, on dit que le mouvement est rectiligne uniformément accéléré, mais dans le cas contraire, on dit que le mouvement est rectiligne uniformément décéléré ou redardé. Nous déterminons la nature de ce mouvement mathématiquement par le produit scalaire :

Si $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{v} \geq 0$, le mouvement est rectiligne uniformément accéléré ($MRUA$).

Si $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{v} \leq 0$, le mouvement est rectiligne uniformément retardé ($MRUR$).

Le mouvement rectiligne à accélération variable

Dans ce cas, la trajectoire est rectiligne et l'accélération du point matériel n'est pas constant, mais il varie avec le temps.

Mouvements circulaire

Dans ce mouvement, la trajectoire du point matériel M est un cercle, caractérisé par son centre O et son rayon constant $R = Cte$, le système de coordonnées polaires est parfait pour ce type de mouvement. L'équation de la trajectoire est comme suit :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \tag{2.78}$$

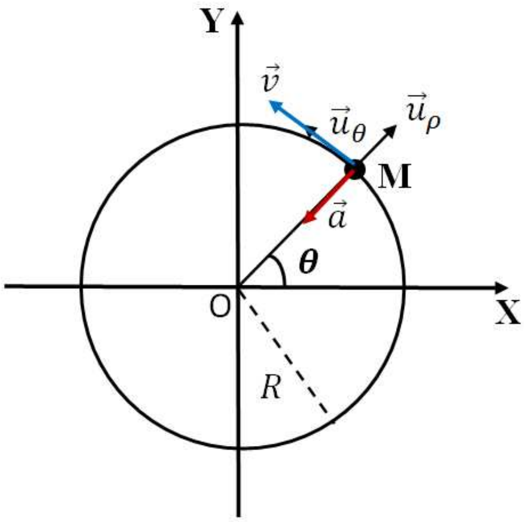

FIGURE 2.15 – Mouvements circulaire

le couple (x_0, y_0) sont les coordonnées du centre O du cercle et R est son rayon. Dans les coordonnées polaires, le vecteur de position, la vitesse linéaire et l'accélérateur linéaire ont les formes suivantes :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}(t) &= R\,\overrightarrow{u}_\rho,\\ \overrightarrow{v}(t) &= \dot{\theta}\,R\,\overrightarrow{u}_\theta,\\ \overrightarrow{a}(t) &= -R\,\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_\rho + \ddot{\theta}R\overrightarrow{u}_\theta.\end{aligned} \tag{2.79}$$

$\dot{\theta}(t) = \omega(t)$ est la vitesse angulaire en $\left(\frac{rad}{s}\right)$. Si $\dot{\theta} = \omega$ est constante, donc $\ddot{\theta}(t) = 0\,\left(\frac{rad}{s^2}\right)$ est l'accélerateur angulaire, on dit que le mouvement est circulaire uniforme et on obtient par intégration les équations horaires du mouvements :

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}(t) &= \tfrac{d\dot{\theta}(t)}{dt} = 0,\\ \dot{\theta}(t) &= \tfrac{d\theta(t)}{dt} = \omega,\\ \theta(t) &= \omega\,t + \theta_0,\end{aligned} \tag{2.80}$$

θ_0 est angle initial en (rad).

Remarque

Dans le mouvement circulaire uniforme, l'accélerateur linéaire $a(t) = R\,\dot{\theta}^2 = a_n$ est égal à ; l'accélération normale est dirigée vers le centre O par ce que l'accélération tangentielle est nulle $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = 0$, mais l'accélerateur angulaire est nul $\ddot{\theta}\left(t\right) = 0\ \left(\frac{rad}{s^2}\right)$.

Quand l'accélérateur angulaire est constant $\ddot{\theta} = Cet$, on dit que le mouvement est circulaire uniforme varié. On obtient par intégration les équations horaires du mouvement :

$$\ddot{\theta} = Cet, \tag{2.81}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}\dot{\theta}\left(t\right) = \ddot{\theta}\,t + \dot{\theta}_0 \tag{2.82}$$

$$\dot{\theta}\left(t\right) = \frac{d\theta\left(t\right)}{dt}\theta\left(t\right) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}\,t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \tag{2.83}$$

$\dot{\theta}_0$ est la vitesse angulaire initial.

Le mouvement rectiligne sinusoïdal

Quand la trajectoire d' un point matériel est rectiligne et l'équation horaire du mouvement est sinusoïdal c'est-à-dire s'écrit en fonction du cosinus ou sinus, on dit que le mouvement rectiligne sinusoïdal :

$$x\left(t\right) = x_0\,cos\left(\omega\,t + \phi\right), \tag{2.84}$$

ou x_0, ω, ϕ, $(\omega\,t + \phi)$ sont l'amplitude maximale en (m), la pulsation du mouvement en $\left(\frac{rad}{s}\right)$, la phase initiale qui est déterminée par les conditions initiales en (rad) et la phase à l'instant t en (rad) respectivement. On dérévant l'équation horaire du mouvement.

On obtient l'équation horaire de la vitesse :

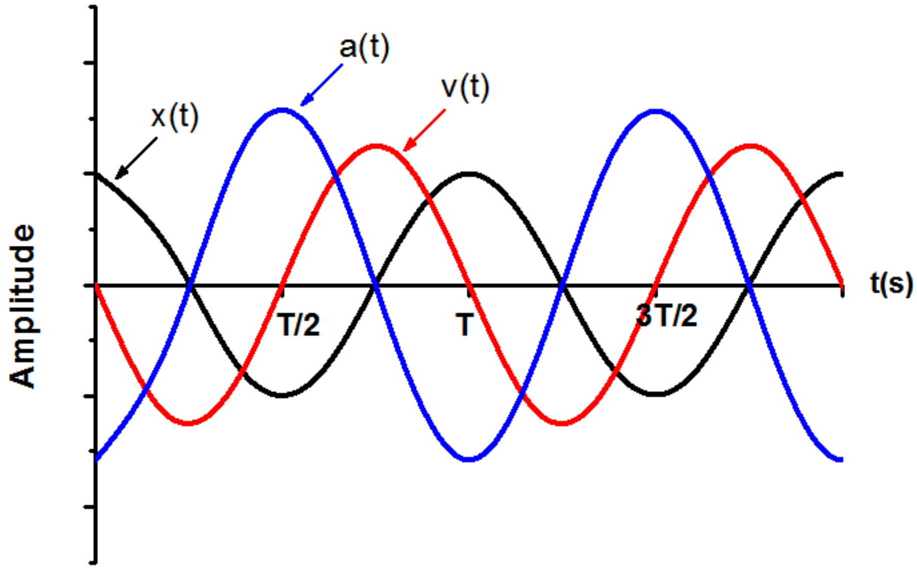

FIGURE 2.16 – Les trois graphiques du mouvement rectiligne sinusoıdal

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega x_0 \, sin(\omega t + \phi) \,. \tag{2.85}$$

On dérévant l'équation horaire de la vitesse, on obtient l'équation horaire de l'accélération :

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -\omega^2 x_0 \, cos(\omega t + \phi) \,. \tag{2.86}$$

Nous illustrons dans la figure (2.16), les trois types de graphiques utilisé pour visualiser le mouvement rectiligne sinusoïdal.

Remerque

Comme la fonction cosinus ou sinus sont des fonctions périodiques, alors le mouvement rectiligne sinusoïdal est périodique de période $T = \frac{1}{f} = \frac{\omega}{2\pi}$ en (s), f est la fréquence du mouvement en (s^{-1}) ou (Hz).

2.5 Mouvement relatif et changement de référentiel

Un état de mouvement ou un état de repos sont deux concepts essentiellement relatifs. Cela signifie que chacun de ces deux états dépend de la position du point matériel mobile par rapport au corps comme référence. Tous les mouvements que nous avons étudiés précédemment l'ont été dans le système de coordonnées galiléen, soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme. Lorsque deux observateurs sont reliés à deux amers différents qui sont en mouvement relatif, la position, la trajectoire, la vitesse et l'accélération du mobile lui-même varient selon une référence choisie par l'observateur.

Par exemple : soit un point matériel laissé par une hélicoptère :

- Par rapport à un repère lié à l'hélicoptère, le mouvement de ce point matériel est une droite verticale (chute verticale).

- Par rapport à un repère terrestre, le mouvement de ce point matériel est un projectile (une parabole).

2.5.1 Changement de référentiel

Dans le mouvement ralatif, nous considérons deux référentiels, R est fixe (imobile), son repère est (O, x, y, z), avec sa base cartésienne $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est dite le référentiel absolu et le deuxieme R' est mobile par rappourt R (on prend le cas général), dite référentiel relatif, son repère est (O', x', y', z'), avec sa base cartésienne $\left(\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}'\right)$, a l'instant $t = 0$, les trois axes de référentiel relatif R' confondus sur les trois axes de référentiel absolu R.

Soit M un point matériel en mouvement, nous pouvons décrire ce mouvement dans les deux référentiels absolu et relatif, par l'itulisation des notions suivantes ; on peut définir le mouvement de point matériel M dans le référentiel absolu R par le vecteur de position $\overrightarrow{OM}$, et sa vitesse absolue $\overrightarrow{v}_a$ et aussi par s'accélerateur absolu $\overrightarrow{a}_a$ et dans le référentiel relatif R' par le vecteur de position $\overrightarrow{O'M}$, et sa vitesse dite relative $\overrightarrow{v}_r$ et aussi par s'accélerateur relatif $\overrightarrow{a}_r$.

On adapte les définitions suivantes :

$\overrightarrow{v}_a = \overrightarrow{v}_{M/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R$ la vitesse absolue, c'est la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps dans le référentiel absolu R.

$\overrightarrow{a}_a = \overrightarrow{a}_{M/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{v}_a}{dt}\right)_R$ l'accélérateur absolu, c'est le dérivé du vecteur vitesse absolu $\overrightarrow{v}_a$ par rapport au temps dans le référentiel absolu R.

$\overrightarrow{v}_r = \overrightarrow{v}_{M/R'} = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'}$ la vitesse relatif, c'est la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{O'M}$ par rapport au temps dans le référentiel relatif R'.

$\overrightarrow{a}_r = \overrightarrow{a}_{M/R'} = \left(\frac{d\overrightarrow{v}_r}{dt}\right)_{R'}$ l'accélérateur relatif, c'est le dérivé du vecteur vitesse relatif $\overrightarrow{v}_r$ par rapport au temps dans le référentiel relatif R'.

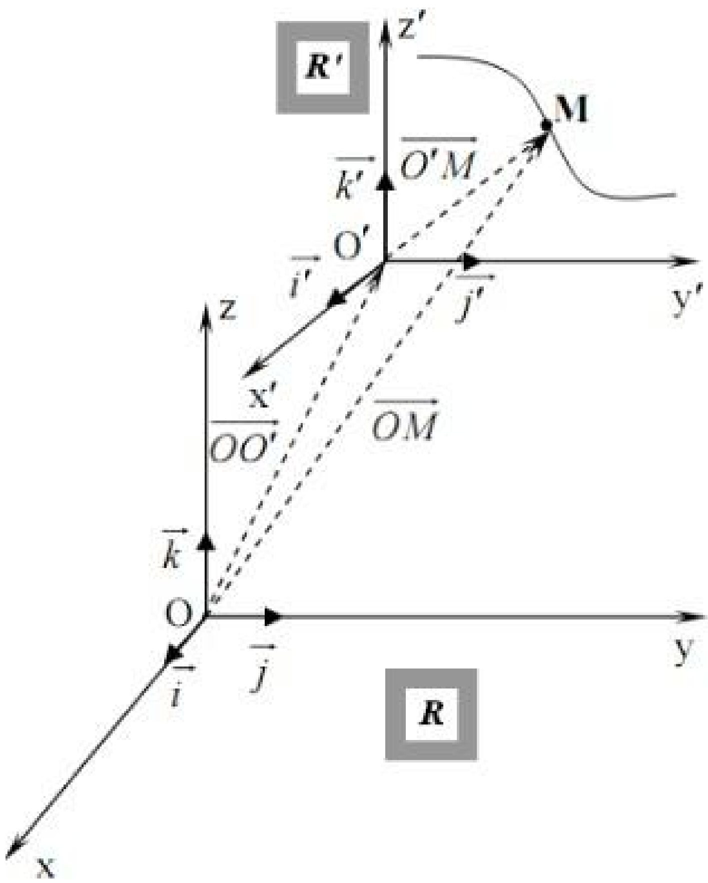

FIGURE 2.17 – Représentation des référentiels pour le mouvement ralatif

On a la relation de *Chasles* suivante :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}. \tag{2.87}$$

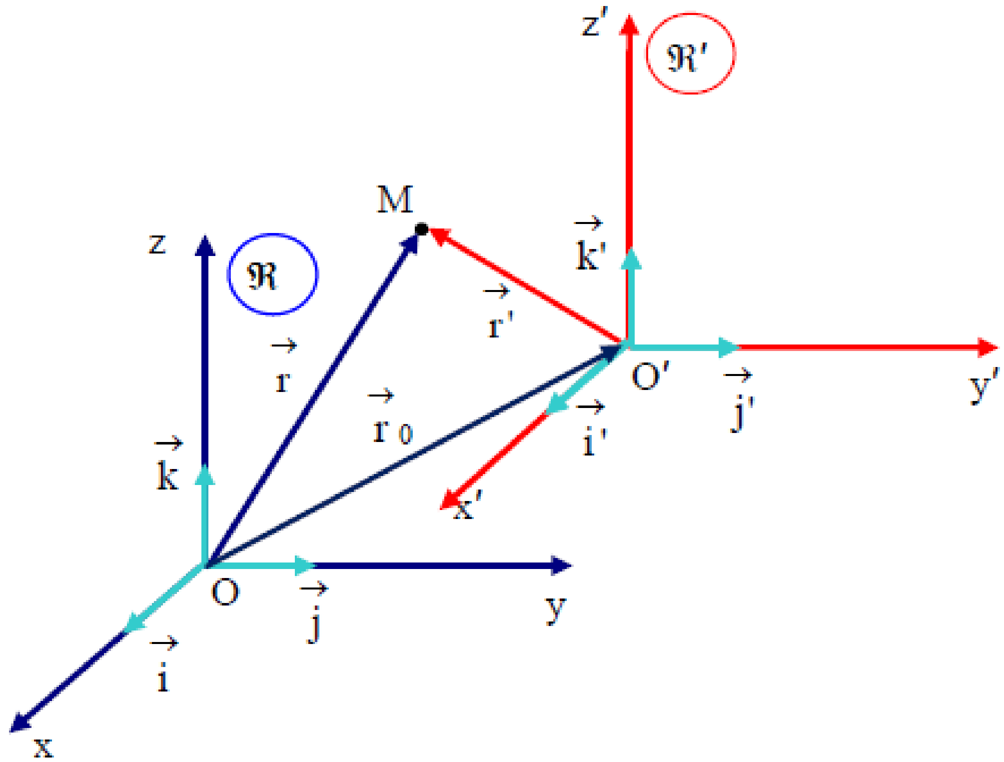

Figure 2.18 – Représentation d'un point M en mouvement ralatif

$$x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}=x_{o'}\overrightarrow{i}+y_{o'}\overrightarrow{j}+z_{o'}\overrightarrow{k}+x'\overrightarrow{i}'+y'\overrightarrow{j}'+z'\overrightarrow{k}'.$$

Par dérévation par rapport au temps dans le référentiel R, on trouve :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R=\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R+\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R. \tag{2.88}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}\overrightarrow{i}+\dot{y}\overrightarrow{j}+\dot{z}\overrightarrow{k} &= \dot{x}_{o'}\overrightarrow{i}+\dot{y}_{o'}\overrightarrow{j}+\dot{z}_{o'}\overrightarrow{k}+\dot{x}'\overrightarrow{i}'+\dot{y}'\overrightarrow{j}'+\dot{z}'\overrightarrow{k}'+x'\frac{d\overrightarrow{i}'}{dt}+y'\frac{d\overrightarrow{j}'}{dt}+z'\frac{d\overrightarrow{k}'}{dt},\\
\dot{x}\overrightarrow{i}+\dot{y}\overrightarrow{j}+\dot{z}\overrightarrow{k} &= \dot{x}'\overrightarrow{i}'+\dot{y}'\overrightarrow{j}'+\dot{z}'\overrightarrow{k}'+\dot{x}_{o'}\overrightarrow{i}+\dot{y}_{o'}\overrightarrow{j}+\dot{z}_{o'}\overrightarrow{k}+x'\frac{d\overrightarrow{i}'}{dt}+y'\frac{d\overrightarrow{j}'}{dt}+z'\frac{d\overrightarrow{k}'}{dt}.
\end{aligned}$$

Finalement, on trouve la loi de composition des vitesses :

$$\overrightarrow{v}_a=\overrightarrow{v}_r+\overrightarrow{v}_e, \tag{2.89}$$

ou $\overrightarrow{v}_e=\dot{x}_{o'}\overrightarrow{i}+\dot{y}_{o'}\overrightarrow{j}+\dot{z}_{o'}\overrightarrow{k}+x'\frac{d\overrightarrow{i}'}{dt}+y'\frac{d\overrightarrow{j}'}{dt}+z'\frac{d\overrightarrow{k}'}{dt}$ s'appelle la vitesse d'entrainement, elle représente la vitesse de référentiel relatif R' par rapport au référentiel absolu R.

Nous dérévons par rapport au temps la relation(2.89), on trouve :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{v}_a}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{v}_r}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\overrightarrow{v}_e}{dt}\right)_R. \tag{2.90}$$

$$\overrightarrow{a}_a = \ddot{x}'\overrightarrow{i}'+\ddot{y}'\overrightarrow{j}'+\ddot{z}'\overrightarrow{k}'+\ddot{x}_{o'}\overrightarrow{i}+\ddot{y}_{o'}\overrightarrow{j}+\ddot{z}_{o'}\overrightarrow{k}+x'\frac{d^2\overrightarrow{i}'}{dt^2}+y'\frac{d^2\overrightarrow{j}'}{dt^2}+z'\frac{d^2\overrightarrow{k}'}{dt^2}+2(\dot{x}'\frac{d\overrightarrow{i}'}{dt}+\dot{y}'\frac{d\overrightarrow{j}'}{dt}+\dot{z}' \tag{2.91}$$

Finalement, on trouve la loi de composition des accélerations :

$$\overrightarrow{a}_a = \overrightarrow{a}_r + \overrightarrow{a}_e + \overrightarrow{a}_c. \tag{2.92}$$

ou $\overrightarrow{a}_e = \ddot{x}_{o'}\overrightarrow{i} + \ddot{y}_{o'}\overrightarrow{j} + \ddot{z}_{o'}\overrightarrow{k} + x'\frac{d^2\overrightarrow{i}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\overrightarrow{j}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\overrightarrow{k}'}{dt^2}$ s'appele l'accélerateur d'entrainement, il represente l'accéleration de référentiel relatif R' par rappourt référentiel absolu R et $\overrightarrow{a}_c = 2\dot{x}'\frac{d\overrightarrow{i}'}{dt}+2\dot{y}'\frac{d\overrightarrow{j}'}{dt}+2\dot{z}'\frac{d\overrightarrow{k}'}{dt}$ est l'accélérateur de $Coriolis$ ou l'accélération complémentaire.

Comme on l'a mentionné précédemment, le mouvement du référentiel relatif R' par rapport à R est dans le cas général, mais on peut trouver toutes ces relations si le référentiel relatif R' est en translation ou en rotation ou les deux à la fois par rapport au référentiel absolu R.

1 Le référentiel relatif R' en translation par rappourt aux référentiel absolu R :

Dans ce cas, les vecteurs unitaires de référentiel relatif R' restent parallèles aux vecteurs unitaires du repère fixe R au cours du mouvement, donc les dérivés premier et deuxième de ces vecteurs unitaires de référentiel relatif R' par rapport au temps sont nuls, c'est-à-dire : $\frac{d\overrightarrow{i}'}{dt} = \frac{d\overrightarrow{j}'}{dt} = \frac{d\overrightarrow{k}'}{dt} = \overrightarrow{0}$, $\frac{d^2\overrightarrow{i}'}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{j}'}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{k}'}{dt^2} = \overrightarrow{0}$. Par conséquent, l'expression de la vitesse d'entraînement se simplifie comme suit :

$$\overrightarrow{v}_e = \dot{x}_{o'}\overrightarrow{i} + \dot{y}_{o'}\overrightarrow{j} + \dot{z}_{o'}\overrightarrow{k} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R, \tag{2.93}$$

Elle représente la vitesse de l'origine du référentiel relatif R' dans le référentiel R. Et la loi de composition des vitesses devient :

$$\overrightarrow{v}_a = \overrightarrow{v}_r + \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R. \tag{2.94}$$

On note que dans ce cas, l'accélerateur de Coriolis est nul et l'accélerateur d'entrainement se réduit à :

$$\overrightarrow{a}_e = \ddot{x}_{o'}\overrightarrow{i} + \ddot{y}_{o'}\overrightarrow{j} + \ddot{z}_{o'}\overrightarrow{k} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_R, \tag{2.95}$$

qui représente l'accélération de l'origine de ce référentiel mobile, aussi la loi de composition des accélérations réduit à :

$$\overrightarrow{a}_a = \overrightarrow{a}_r + \overrightarrow{a}_e. \tag{2.96}$$

2 le référentiel relatif R' en rotation par rapport au référentiel absolu R :

Nous considérons que le référentiel relatif R' tourne à une vitesse angulaire constante par rapport à un référentiel absolu R autour des axes verticaux $Oz \equiv O'z'$ (nous considérons la rotation autour d'un seul axe où le point O' est confondu avec le point O'). À l'instant $t = 0\,(s)$, les trois axes du référentiel relatif R' et absolu R sont confondus, puis à l'instant t, les seuls axes $(o'x'\ )$ et $(o'y'\ )$ du référentiel R' tournent uniformément avec une vitesse angulaire constante $\dot{\alpha} = \omega$ par rapport aux axes verticaux $Oz \equiv oz'$ au cours du temps où $\alpha = \omega\, t$ est l'angle de rotation.

On a la loi de composition des vitesses :

$$\overrightarrow{v}_a = \overrightarrow{v}_r + \overrightarrow{v}_e.$$

Dans ce cas, le seul changement est l'expression de la vitesse d'entraînement $\overrightarrow{v}_e$ qui devient :

$$\overrightarrow{v}_e = \omega\, \overrightarrow{k}' \wedge \overrightarrow{O'M}.$$

On peut démontrer cette relation de la manière suivante :

* Les vecteurs de base du référentiel relatif R' peuvent s'écrire en fonction des vecteurs de base du référentiel fixe R comme suit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{i}' &= cos\alpha\ \overrightarrow{i} + sin\alpha\ \overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{j}' &= -sin\alpha\ \overrightarrow{i} + cos\alpha\ \overrightarrow{j}, \end{aligned} \tag{2.97}$$

et $\overrightarrow{k}' = \overrightarrow{k}$, ou $\alpha = \omega\, t$ est l'angle de rotation.

* Ces dérivés par rapport au temps sont :

$$\begin{aligned} \tfrac{d\overrightarrow{i}'}{dt} &= \tfrac{d\overrightarrow{i}'}{d\alpha}\tfrac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}\tfrac{d\overrightarrow{i}'}{d\alpha} = \dot{\alpha}\left(-sin\alpha\ \overrightarrow{i} + cos\alpha\ \overrightarrow{j}\right) = \dot{\alpha}\,\overrightarrow{j}' = \omega\,\overrightarrow{j}', \\ \tfrac{d\overrightarrow{j}'}{dt} &= \tfrac{d\overrightarrow{j}'}{d\alpha}\tfrac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}\tfrac{d\overrightarrow{j}'}{d\alpha} = \dot{\alpha}\left(-cos\alpha\ \overrightarrow{i} - sin\alpha\ \overrightarrow{j}\right) = -\dot{\alpha}\,\overrightarrow{i}' = -\omega\,\overrightarrow{i}', \end{aligned} \tag{2.98}$$

et $\frac{d\overrightarrow{k}'}{dt} = \frac{d\overrightarrow{k}}{dt} = 0$. Donc, l'expression de la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{v}_e$ est :

$$\overrightarrow{v}_e = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R + x'\frac{d\overrightarrow{i}'}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{j}'}{dt} + z'\frac{d\overrightarrow{k}'}{dt} = -\omega y'\,\overrightarrow{i}' + x'\omega\,\overrightarrow{j}', \tag{2.99}$$

D'autre part, puisque $\left(\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}'\right)$ est une base orthonormée directe, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{i}' &= \overrightarrow{j}' \wedge \overrightarrow{k}', \\ \overrightarrow{j}' &= \overrightarrow{k}' \wedge \overrightarrow{i}', \\ \overrightarrow{k}' \wedge \overrightarrow{k}' &= \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

La vitesse d'entraînement s'écrit :

$$\overrightarrow{v}_e = -\omega y' \overrightarrow{i}' + x'\omega \overrightarrow{j}' = -\omega y' \overrightarrow{j}' \wedge \overrightarrow{k}' + x'\omega \overrightarrow{k}' \wedge \overrightarrow{i}' = \left(\omega \overrightarrow{k}'\right) \wedge \left(y' \overrightarrow{j}'\right) + \left(\omega \overrightarrow{k}'\right) \wedge \left(x' \overrightarrow{i}'\right), \tag{2.100}$$

Finalement, on trouve l'expression de la vitesse d'entraînement :

$$\overrightarrow{v}_e = \left(\omega \overrightarrow{k}'\right) \wedge \left[\left(y' \overrightarrow{j}'\right) + \left(x' \overrightarrow{i}'\right)\right] = \left(\omega \overrightarrow{k}'\right) \wedge \left[x' \overrightarrow{i}' + y' \overrightarrow{j}' + z' \overrightarrow{k}'\right] = \left(\omega \overrightarrow{k}'\right) \wedge \overrightarrow{O'M}, \tag{2.101}$$

On a la loi de composition des accélérations :

$$\overrightarrow{a}_a = \overrightarrow{a}_r + \overrightarrow{a}_e + \overrightarrow{a}_c, \tag{2.102}$$

ou $\overrightarrow{a}_e = \left(\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$ est l'accélérateur d'entrainement et $\overrightarrow{a}_c = 2\,\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v}_r$ est l'accélérateur de $Coriolis$.

On peut démontrer ces deux relations de la manière suivante :

* On a l'expression de l'accélérateur d'entrainement :

$$\overrightarrow{a}_e = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_R + x'\frac{d^2 \overrightarrow{i}'}{dt^2} + y'\frac{d^2 \overrightarrow{j}'}{dt^2} + z'\frac{d^2 \overrightarrow{k}'}{dt^2} = x'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\,\overrightarrow{i}'}{dt}\right) + y'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\,\overrightarrow{j}'}{dt}\right) + z'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\,\overrightarrow{k}'}{dt}\right), \tag{2.103}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a}_e &= x'\tfrac{d}{dt}\left(\omega \overrightarrow{j}'\right) + y'\tfrac{d}{dt}\left(-\omega \overrightarrow{i}'\right) + z'\tfrac{d}{dt}\left(\omega \overrightarrow{k}'\right), \\ \overrightarrow{a}_e &= x'\tfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{i}'\right) + y'\tfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{j}'\right) + z'\tfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{k}'\right). \end{aligned} \tag{2.104}$$

* On utilise les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\wedge\vec{i}\,'\right) &= \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{i}\,'+\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{i}\,'}{dt}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{i}\,'+\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{i}\,',\\
\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\wedge\vec{j}\,'\right) &= \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{j}\,'+\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{j}\,'}{dt}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{j}\,'+\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{j}\,',\\
\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\wedge\vec{k}\,'\right) &= \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{k}\,'+\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{k}\,'}{dt}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{k}\,'+\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{k}\,',
\end{aligned}\tag{2.105}$$

Finaleent, on trouve l'expresion de l'accélerateur d'entrainement :

$$\begin{aligned}
\vec{a}_e = &\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge x'\vec{i}\,'+\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge x'\vec{i}\,'\right)+\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge y'\vec{j}\,'+\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge y'\vec{j}\,'\right)\\
&+\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge z'\vec{k}\,'+\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge z'\vec{k}\,'\right).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\vec{a}_e = &\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge x'\vec{i}\,'+\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge y'\vec{j}\,'+\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge z'\vec{k}\,'\right)\\
&+\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge x'\vec{i}\,'+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge y'\vec{j}\,'+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge z'\vec{k}\,'\right),
\end{aligned}$$

$$\vec{a}_e=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\left(x'\vec{i}\,'+y'\vec{j}\,'+z'\vec{k}\,'\right)+\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\left(x'\vec{i}\,'+y'\vec{j}\,'+z'\vec{k}\,'\right),$$

$$\vec{a}_e=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}+\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}.\tag{2.106}$$

Et comme la vitesse angulaire est constante ($\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\vec{0}$), l'expresion de l'accélerateur d'entrainement devient :

$$\vec{a}_e=\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}.\tag{2.107}$$

En utilisant la même stratégique précédemment, nous trouvons l'expresion de l'accélération de Coriolis suivante :

$$\vec{a}_c=2\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r\tag{2.108}$$

3 Le référentiel relatif R' en translation-rotation par rapport au référentiel absolu R :

Pour un mouvement quelconque d'un référentiel R' par rapport à un autre R, il peut toujours se ramener à une composition de mouvements de translation et de rotation.

Dans ce cas, où le référentiel relatif R' en translation-rotation par rapport au référentiel absolu R, on donne les lois de composition des vitesses et des accélérations directement :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}. \tag{2.109}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_R + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \left(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r. \tag{2.110}$$

Chapitre 3

DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL

3.1 Introduction :

Dans le chapitre cinématique du point matériel, nous avons décrit géométriquement le mouvement du point matériel (le vecteur de position, le vecteur de vitesse, le vecteur d'accélération, etc.) sans nous soucier des facteurs qui le provoquent. Dans ce chapitre, dynamique du point matériel qui est une partie de la mécanique newtonienne qui traite toutes les causes possibles (les forces, les actions) du mouvement, elle peut déterminer la cause d'un mouvement connu et prédire le mouvement en fonction de la cause. Il s'agit de construire des relations entre les deux.

3.2 Les concepts physiques

3.2.1 La masse

La masse notée m d'une particule est une quantité d'inertie qui caractérise la résistance du corps à toute modification de son mouvement soit de le faire accélérer, ralentir ou changer de direction, ou d'une façon plus simple, la masse est une grandeur physique scalaire positive qui représente la quantité de matière contenue dans le volume de ce corps, s'exprime en kilogramme (kg) dans le système international d'unités.

3.2.2 La quantité de mouvement

La quantité de mouvement joue un rôle très important en mécanique, elle est introduite par *Isaac Newton*. De nombreux phénomènes physiques deviennent clairs si nous comprenons leur signification vectorielle et l'effet des forces sur leurs valeurs. On dénomme $\overrightarrow{P}$ la quantité de mouvement d'une particule de masse m qui se déplace dans un référentiel R avec une vitesse $\overrightarrow{v}$, est définie comme étant le produit de sa masse m par son vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ dans le même référentiel R :

$$\overrightarrow{P} = m\,\overrightarrow{v}, \tag{3.1}$$

D'apres la relation (3.1), la quantité de mouvement est une quantité vectorielle orientée dans la direction et le sens de la vitesse de la particule. Sa dimension (unité) est $M\,L\,T^{-1}$ $(kg.m.s^{-1})$. Pour un système physique constitué de N particules de masses m_i et de vitesses $\overrightarrow{v}_i$, alors la quantité de mouvement totale est la somme vectorielle des quantités de mouvements de chacune des particules : $\overrightarrow{P}_T = \sum_i^N \overrightarrow{P}_i = \sum_i^N m_i\,\overrightarrow{v}_i$.

3.2.3 La force

En physique classique, la force est par définition toute cause capable de produire ou de modifier le mouvement d'un corps ou d'engendrer sa déformation. La force a un caractère vectoriel, donc elle sera représentée par un vecteur associé à un point d'application, une certaine direction, un certain sens et module. Elle est mesurée par le dynamomètre et s'exprime en *Newton* (N) dans le système international d'unités. En physique classique, la force est décrite par un vecteur qui a les caractéristiques suivantes : la direction (la droite d' action), le sens, le point d'application et l'intensité (module). On dit qu'un point matériel est isolé lorsqu'il n'est soumis à aucune interaction mécanique avec l'extérieur.

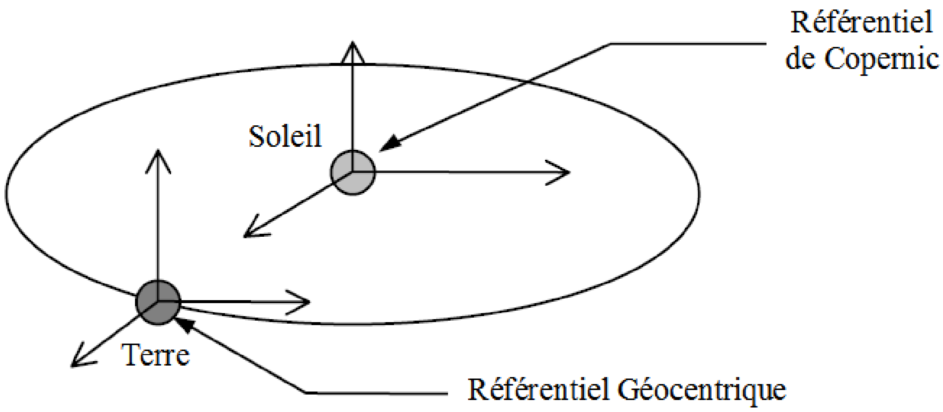

FIGURE 3.1 – Référentiels galiléens

3.2.4 Référentiel inertiel ou Galiléen

On sait que la notion de mouvement ou de repos dépend du choix du référentiel. On dit que R est un référentiel galiléen si le principe d'inertie est appliquable. Les référentiels les plus utilisables sont :

1/ Référentiel sidéral ou de *Copernic* : Le référentiel de Copernic est un excellent référentiel galiléen qui est muni d'un repère d'espace dont l'origine est le centre d'inertie du système solaire et ses axes sont relient ce centre de masse à trois étoiles très éloignées considérées comme fixes.

2/ Référentiel de *Kepler* : (repère héliocentrique) Est un référentiel qui est muni d'un repère d'espace dont l'origine est le centre d'inertie du soleil, et ses axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic. Il est utilisé pour étudier le mouvement des planètes et des engins spatiaux.

3/ Référentiel Géocentrique : C'est un référentiel qui possède comme origine le centre de la terre et ses axes sont dirigés parallèlement à ceux du référentiel de Copernic. Il permet d'étudier le mouvement de la lune et des satellites autour de la terre, ce référentiel n'a rien à voir avec la rotation de la terre elle-même.

4/ Référentiel Terrestre : Le référentiel terrestre est par définition le référentiel dont le centre est le sol de la Terre et ces axes se déplacent avec la rotation de la Terre. Il permet d'étudier tout mouvement sur la Terre.

3.3 Les principes de la dynamique newtonienne

En 1686, *Isaac Newton* l'ence les trois principes de la dynamique qui pourtent son nom sans démonstration, ils sont la base de la mécanique classique, généralement ces principes appelés : premier, deuxième, et troisième principe de Newton. Les trois principes de la dynamique (les lois de Newton) sont :

3.3.1 Principe d'inertie ou première loi de Newton

Dans un référentiel galiléen R, un corps isolé mécaniquement c'est-à-dire qui n'est soumis à aucune force $\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, dans ce cas, il est soit au repos ($\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}, \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$) s'il est initialement au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme ($\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{v}_0, \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$) s'il se déplace initialement avec une vitesse initiale. Ce principe est déjà entrevu par Galilée et a été repris en 1686 par Newton.

L'énoncé de principe d'inertie est : "Dans un référentiel R galiléen, le centre d'inertie de tout système matériel mécaniquement isolé est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme."

Ou d'autres termes :"existe des référentiels privilégiés appelés référentiels galiléens dans lesquels un point matériel isolé est animé d'un mouvement rectiligne uniforme, c'est-à-dire que les vecteurs vitesse et quantité de mouvement sont constants au cours du temps."

Remarque

La conservation de la quantité de mouvement

Dans un référentiel inertiel, la conservation de la quantité de mouvement désigne l'absence de variation de la quantité de mouvement du centre d'inertie du système dans certaines cas physiques, on parle donc d'un système isolé.

Le vecteur quantité de mouvement se conserve l'orsque le principe d'inertie est vérifié.

$$\overrightarrow{v}_G = \overrightarrow{cte} \Longrightarrow \overrightarrow{p}_G = \overrightarrow{cte} \Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{p}_G}{dt} = \overrightarrow{0}. \tag{3.2}$$

FIGURE 3.2 – Galileo Galilei 1564-1642

3.3.2 Principe fondamental de la dynamique ou deuxième loi de Newton

L'énoncé de principe fondamental de la dynamique est : "Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rappourt au temps de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la résultante des forces extérieures qui agissent sur lui"

Mathématiquement, on traduit ce principe par la relation suivante :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \frac{d\left(m\overrightarrow{v}\right)}{dt} = m\frac{d\left(\overrightarrow{v}\right)}{dt} = m\overrightarrow{a}. \tag{3.3}$$

Remarque

1/ Le principe fondamental de la dynamique est valable tant que la vitesse du point matériel est très inférieure à celle de la lumière.

2/ Dans le cas où la masse n'est pas constante, le principe fondamental de la dynamique prend la forme générale suivante :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \frac{d\left(m\left(t\right)\overrightarrow{v}\right)}{dt} = \frac{dm\left(t\right)}{dt}\overrightarrow{v} + m\left(t\right)\frac{d\left(\overrightarrow{v}\right)}{dt} = \frac{dm\left(t\right)}{dt}\overrightarrow{v} + m\left(t\right)\overrightarrow{a}. \quad (3.4)$$

3.3.3 Principe d'action et réaction ou troisième loi de Newton

l'énoncé de principe d'action et réaction est :"Lorsque deux systèmes S_A et S_B sont en interaction, quel que soit le référentiel d' étude et quel que soit leur mouvement (ou l' absence de mouvement), l' action du système S_A sur le système S_B est exactement opposée à la réaction du système S_B sur le système S_A mais égale en intensité"

Et on écrit $\overrightarrow{F}_{A/B} = -\overrightarrow{F}_{B/A}$.

3.4 Les forces fondamentales

On sait aujourd'hui que la théorie du Big Bang est la théorie qui a été acceptée scientifiquement pour la création de notre univers. Dans l'univers primordial, les quatre forces connues aujourd'hui (l'interaction forte, faible, électromagnétique, et gravitationnelle) étaient unies en une seule force en raison de l'énergie et de la haute densité. Après cela, ces forces ont commencé à se séparer, de sorte que la force nucléaire forte est séparée en premier, puis la force nucléaire faible, puis la force électromagnétique et la force gravitationnelle. Aujourd'hui, les physiciens théoriciens s'efforcent d'unifier ces forces dans un cadre unique, qui est la théorie de l'unification. En 1968 la force électromagnétique a été unifiée avec la force nucléaire faible, et elle a été appelée force électrofaible, puis elles ont été unies avec la force nucléaire forte dans ce que l'on appelle le modèle standard, mais la force gravitationnelle reste non unifiée jusqu'à aujourd'hui malgré des nombreuses tentatives des scientifiques.

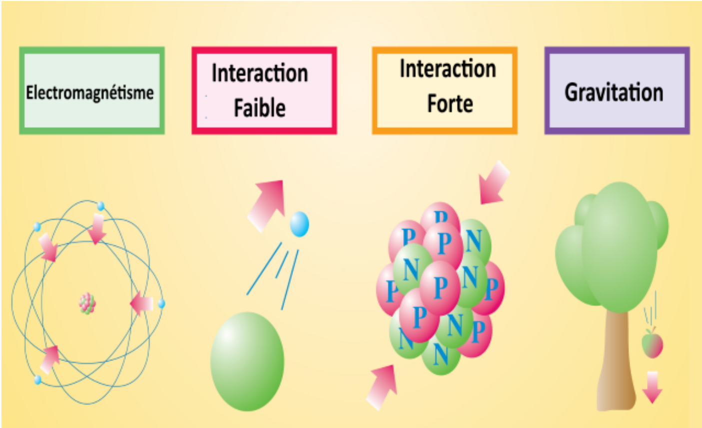

FIGURE 3.3 – Les quatre forces fondamentales

3.4.1 L'interaction forte

Elle est la plus forte force parmi les quatre forces fondamentales du l'univers, l'interaction forte permet la cohésion du noyau de l'atome, sinon il serait instable. Elle agit à courte pourtée au sein du proton ou du neutron ($2,5 \times 10^{-15} m$), elle concerne les particules élémentaires. Elle confine les quarks en couples (mésons) ou dans des triplets de quarks (baryons). Cette interaction est notamment responsable des réactions nucléaires qui ont lieu au sein du Soleil.

3.4.2 L'interaction faible

Elle agit à courte distance, à l'échelle atomique (de l'ordre de 10^{-17} m.), elle régit les modes de désintégration radioactive $\beta^{\pm}$ des noyaux instables et elle permet la conversion de l'hydrogène en hélium, c'est-à-dire la fusion nucléaire qui est la source d'énergie principale des étoiles et du soleil. Les interactions électromagnétique et faible ont été unifiées dans une seule force, s'appelle l'interaction électrofaible en 1968.

3.4.3 L'interaction électromagnétique

Les interactions électromagnétiques régissent tous les phénomènes électriques et magnétiques. Avant les années 1860, les phénomènes d'électricité et de magnétisme étaient considérés comme distincts, jusqu' à l'intervention de *Maxwell*, qui les unifia et décrivit l'électromagnétisme en 1864, donc sont devenus les deux faces d'une même pièce. Les interactions électromagnétiques peuvent être attractives ou répulsives, selon le signe de la charge. C'est elle qui est responsable de la cohésion des atomes, puisque les électrons et les noyaux s'attirent en raison de leurs charges opposées. Elle est la deuxième des quatre interactions fondamentales, en ordre de puissance, elle est 100 fois plus faible que l'interaction forte, mais plus de 10^{11} et 10^{36} fois plus forte que les interactions faibles et gravitationnelles, respectivement. Elle est connue aussi comme la force de *Lorentz* :

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_{ele} + \overrightarrow{F}_{mag} = q\overrightarrow{E} + q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}, \tag{3.5}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont le champ électrique et le champ magnétique respectivement et q est la charge électrique de la particule et v sa vitesse.

3.4.4 L'interaction gravitationnelle

La force gravitationnelle est une force attractive, caractérisée par une pourtée infinie et son effet apparaît au niveau macroscopique seulement, où les objets ont de grandes masses dites gravitationnelles, comme les planétaires et les trous noirs. L'interaction gravitationnelle est la seule force qui n'est pas unifiée jusqu'à aujourd'hui avec les autres forces. Elle est décrite par la loi d'attraction universelle de *Newton* en 1650 :

"Tout point matériel de masse M_A attire tout point matériel de masse M_B avec une force dirigée le long de la droite qui les relie. Cette force varie comme l'inverse du carré de la distance entre les particules et propourtionnellement au produit de leurs masses"

La force d'attraction gravitationnelle avec laquelle le point matériel A de masse M_A agit sur le point matériel B de masse M_B est donnée par cette relation :

$$\overrightarrow{F}_{A/B} = -G\frac{M_A M_B}{d^2}\overrightarrow{U}_{AB} = -\overrightarrow{F}_{B/A},$$

en notant $G = 6,67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$ la constante de gravitation ou constante de *Cavendish*.

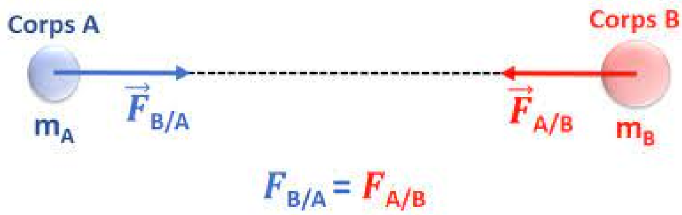

FIGURE 3.4 – La force d'attraction gravitationnelle

3.5 Les forces à distance et les forces de contact

Nous discutons dans ce paragraphe les deux types de forces : les forces à distance s'exercent entre deux systèmes mécaniques éloignés l'un de l'autre comme la force gravitationnelle, la force de poids, la force électrique et la force magnétique et les forces de contact (de liaison) agissent sur deux systèmes mécaniques en contact comme la force de contact, la force de tension du fil ou du ressort.

3.5.1 Les forces à distance

La force gravitationnelle $\overrightarrow{F}_G$ et la force de poids $\overrightarrow{P}$

Comme on l'a vu précédemment, la force gravitationnelle $\overrightarrow{F}_G$ entre deux points matériels A de masse M_A et B de masse M_B, séparés par une distance d est donnée par cette relation :

$$\overrightarrow{F}_G = -G\frac{M_A M_B}{d^2}\overrightarrow{U}_{AB}. \tag{3.6}$$

La force de poids $\overrightarrow{P}$ par définition est une force attractive exercée par la terre sur un point matériel de masse m, elle dépend du lieu et de sa masse, donnée par cette relation :

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{g}, \tag{3.7}$$

Ou $\overrightarrow{g}$ le vecteur d'accélération de la pesanteur. Nous consideron un point matériel (S) de masse m_s au voisinage de la terre et en négligeant la rotation de la terre sur elle-même. On obtient :

$$\overrightarrow{F}_{T/S} = -G\frac{M_T m_s}{R_T^2}\overrightarrow{U}_{TS} = m_s\overrightarrow{g}, \tag{3.8}$$

Ou M_T et R_T sont la masse et le rayon de la terre, donc l'accélération de la pesanteur à la surface de la terre est egal à :

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2}, \tag{3.9}$$

Pour une hauteur $h \ll R_T$ de la surface de la terre, la relation (3.9) devient :

$$g_h = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} \simeq g\left(1 - 2\frac{h}{R_T}\right), \tag{3.10}$$

La force électrique $\overrightarrow{F}_q$

En la rencontre entre les charges électriques, donnée par cette relation :

$$\overrightarrow{F}_q = q\overrightarrow{E}, \tag{3.11}$$

ou $\overrightarrow{E} = \frac{kQ}{r^3}\overrightarrow{r}$ représente le champ électrique résultant de la charge Q dans tous les points de l'espace.

La forces magnétiques $\overrightarrow{F}_B$

La force magnétique $\overrightarrow{F}_B$ est toujours perpendiculaire à la vitesse des particules chargées. L'expression de cette force est :

$$\overrightarrow{F}_B = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} = q\,v\,B\,sin\alpha\,\overrightarrow{u}, \tag{3.12}$$

En rassemblant la force électrique et la force magnétique par la force de *Lorentz* , relation(3.5).

3.5.2 Les forces de contact ou les forces de liaison

La réaction du support solide $\overrightarrow{N}$

La force de réaction d'un support horizontal solide (par exemple une table) est la force qui s'exerce sur un objet de masse m posé sur ce support, elle est nommée $\overrightarrow{R}_N \equiv \overrightarrow{N} \equiv \overrightarrow{C}_y$ et représentée vers la haute verticalement sur la surface de contact et est égale au poids de l'objet s'il était en équilibre :

$\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}_N = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{R}_N = -\overrightarrow{P} = -m\overrightarrow{g}.$

Nous mentionnons que la réaction du support sur l'objet de masse m est répartie sur toute la surface de contact support-objet.

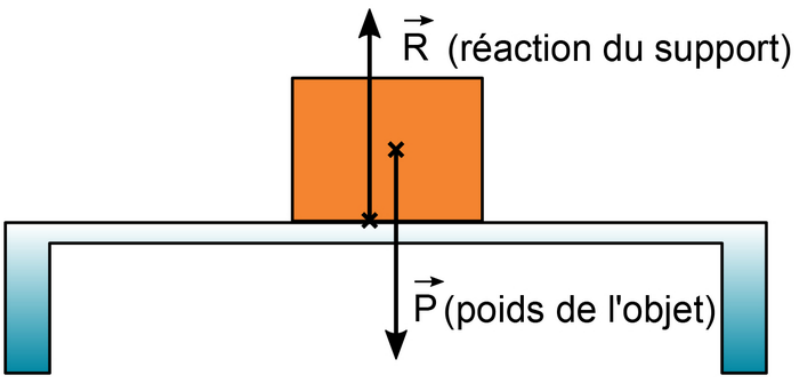

FIGURE 3.5 – La force de la réaction du support

FIGURE 3.6 –

La force de frottement

La force de frottement est une force qui apparaît soit lors du mouvement d'un point matériel, soit si ce point matériel est soumis à une force qui tend à vouloir le déplacer, la force de frottement a toujours le sens opposé au mouvement, c'est une force résistante. Nous distinguons deux types de frottement : le frottement solide, c'est-à-dire le contact solide-solide et le frottement visqueux, c'est-à-dire le contact solide-fluide.

Le frottement solide $\overrightarrow{f}_r$

Dans le cas de présence de la force de frottement nommée $\overrightarrow{R}_T \equiv \overrightarrow{f}_r \equiv \overrightarrow{C}_x$ entre le support horizontal solide et l'objet de masse m posé sur ce support, les actions du support peuvent être représentées par une force dite de réaction $\overrightarrow{C}$ qui est la somme vectorielle de deux forces, la première est la force de réaction $\overrightarrow{C}_y$ qui est normale au support et la deuxième est la force de frottement $\overrightarrow{C}_x$, elle est tangentielle au support et a la même direction et de sens opposé à la vitesse de l'objet.

Dans ce cas, nous permettons de définir le coefficient de frottement statique μ_S où l'objet est immobile par cette relation :

$$\mu_S = \frac{C_x}{C_y} = \frac{f_r}{N} = tan\Phi, \tag{3.13}$$

L'angle Φ est appelé angle de frottement. On voit que ce coefficient μ_S, sans dimension et dépendant de la nature des surfaces en contact, où sa valeur est déterminée expérimentalement. On note ici que dans certaines références, le coefficient de frottement statique μ_S est nommé le coefficient de friction statique.

Dans le cas où l'objet est mobile, on parle donc de frottement dynamique, nous permettons de définir le coefficient de frottement dynamique $\mu_d \equiv \mu_c$ qui est le rapport des composantes normale et tangentielle de la force de contact du support :

$$\mu_d = \frac{C_x}{C_y} = \frac{f_r}{N} = tan\beta, \tag{3.14}$$

μ_d est un coefficient sans dimension et ne dépend que de la nature des surfaces en contact.

Remarque

La valeur du coefficient de frottement statique μ_S est toujours supérieure à celle du coefficient de frottement dynamique μ_d.

Le frottement visqueux $\overrightarrow{f}_r$

La force de frottement visqueux est une force qui représente l'interaction entre l'objet mobile et le milieu dans lequel il évolue (gaz, l'huile, l'air..), dans ce type de frottement, la norme de cette force est proportionnelle à la vitesse de l'objet.

Pour faibles (quelques dizaines de mètre par secondes) et fortes vitesse$s$, on écrit : $\overrightarrow{f}_r = -\lambda\,\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{f}_r = -\lambda\overrightarrow{v}^2$, ou λ est une constante qui dépend de la forme de l' objet ainsi qu' à la masse volumique ρ du fluide.

Les forces de tension

La force du tension de fil $\overrightarrow{T}$

Soit un fil de masse négligeable dont l'une de ses extrémités est fixée et on attache à l'autre extrémité libre un objet de masse m. Nous remarquons que le fil devient tendu et prend une forme rectiligne à cause de la force de poids de l'objet attaché et d'après le principe d'action réaction, le fil exerce une force sur l'objet qui lui est attaché, dite force de tension.

Donc, la force de tension de fil $\overrightarrow{T} \equiv \overrightarrow{F}_{f/S}$ est une force de réaction qui apparaît dans le fil au point attaché à la masse m, où la direction de cette force est le long du fil

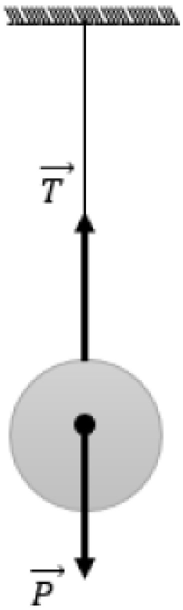

FIGURE 3.7 – La force de tension de fil

et dans une direction opposée à la force agissant sur le fil qui provoque cette tension, si le fil n'est plus tendu, la tension est nulle. Comme le fil et l'objet attaché de masse m sont en équilibre, on trouve que :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{T} + \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{T} = -\overrightarrow{P} \Rightarrow\Rightarrow T = mg \tag{3.15}$$

La force de tension de ressort $\overrightarrow{F}_{el}$

Nous supposons que le ressort est parfaitement élastique, c'est-à-dire qu'on peut négliger sa masse et qu'il ne reprend pas sa forme et sa longueur initiales qu'après une compression ou une élongation. Soit l_0 la longueur du ressort au repos ; mais juste quand on attache un objet de masse m à l'autre extrémité libre, sa longueur augmente et devient l sous l'action du poids de l'objet de masse m, dans ce cas immédiatement le fil exerce une tension qu' on l'appelle force de rappel pour essayer de revenir à l'état de repos. Cette force est proportionnelle à leur allongement et à la forme suivante :

FIGURE 3.8 – Pendule élastique vertical.

$$\overrightarrow{F}_{el} = -K\,\Delta l\,\overrightarrow{u} = -K\,(l - l_0)\,\overrightarrow{u}, \tag{3.16}$$

ou k est une constante appelée raideur du ressort, exprimée en $N.m^{-1}$ dans le $S.I.$ des unités, $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire dans la direction de la déformation, Δl est l'allongement du ressort, l et l_0 sont la longueur du ressort après allongement et au repos respectivement.

Dans le cas d'équilibre, on a :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{F}_{el} + \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{F}_{el} = -\overrightarrow{P} \Rightarrow K\,\Delta l = mg \Rightarrow l = l_0 + \frac{mg}{K}. \quad (3.17)$$

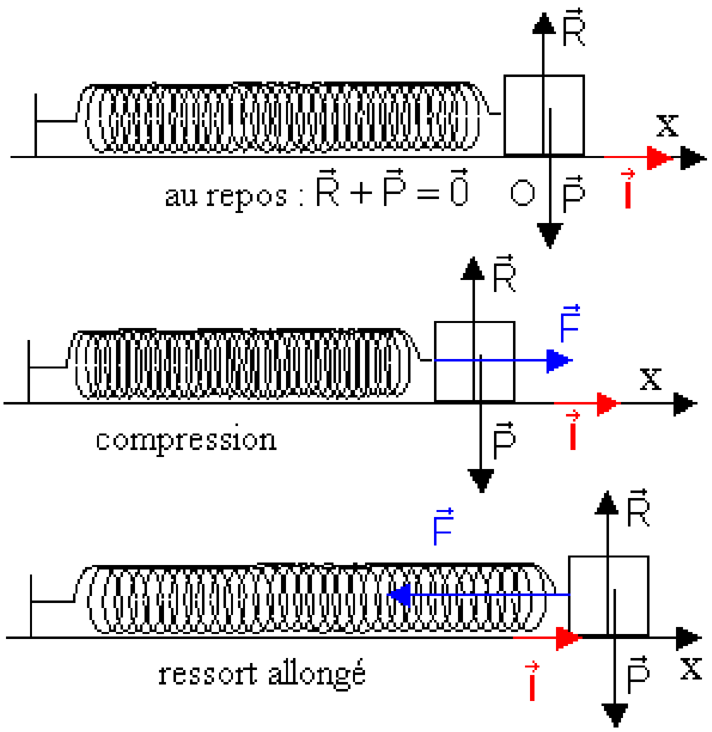

FIGURE 3.9 – Pendule élastique horizontal.

3.6 Le moment cinétique

3.6.1 Définition du moment d'une force

Le moment d'une force $\overrightarrow{F}$ par rapport à un point O fixe dans l'espace, est le produit vectoriel du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et cette force. Et nous écrivons :

$$\overrightarrow{M}_o(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = OM\,F\,sin\theta, \quad (3.18)$$

ou θ est l'angle entre le vecteur du position $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur force $\overrightarrow{F}$, en remarquant que le moment de la force est maximal quand $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire $\theta = \frac{\pi}{2}$.

3.6.2 Définition du moment cinétique

Le moment cinétique au point O du point matériel qui est en mouvement avec une vitesse $\overrightarrow{v}$ est par définition le produit vectoriel du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur quantité du mouvement $\overrightarrow{p}$, et nous écrivons :

$$\overrightarrow{L}_o = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p} = m\,\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v}, \tag{3.19}$$

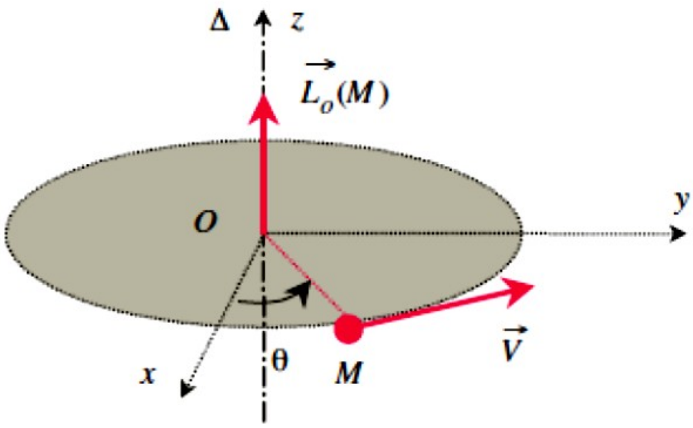

FIGURE 3.10 – Le moment cinétique au point O

3.6.3 Théorème du moment cinétique :

Dans un référentiel Galiléen R, la dérivée du moment cinétique $\overrightarrow{L}_o$ par rapport au temps est égale à la somme des moments des forces appliquées au point matériel M par rapport au point fixe O, et nous écrivons :

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{L}_o}{dt} &= \frac{d\left(\overrightarrow{OM}\right)}{dt} \wedge \overrightarrow{p} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d(\overrightarrow{p})}{dt},\\ &= m\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{OM} \wedge \sum \overrightarrow{F}_{ext},\end{aligned}$$

Et on a utilisé la deuxième loi de Newton, et rapele que $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Finalement, on trouve :

$$\frac{d\overrightarrow{L}_o}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{M}_o(\sum \overrightarrow{F}_{ext}). \tag{3.20}$$

Remarque

1) Le théorème du moment cinétique est analogue à la deuxième loi de Newton.

2) Le moment cinétique est conservé quand la résultante des forces extérieures est nulle, c'est-à-dire quand le point matériel est isolé mécaniquement et aussi quand la force est parallèle au vecteur de position.

3) Quand le référentiel n'est pas Galiléen, le moment cinétique $\overrightarrow{L}_o$ prend la forme suivante :

$$\frac{d\overrightarrow{L}_o}{dt} = \overrightarrow{M}_o(\sum \overrightarrow{F}_{ext}) + \overrightarrow{M}_o(\sum \overrightarrow{F}_{inertie}), \tag{3.21}$$

ou $\overrightarrow{F}_{inertie}$ est le vecteur de force d'inertie, n'est pas une véritable force, mais plutôt une pseudo-force, elle n' intervient que si l' étude est faite dans un référentiel non Galiléen.

D'apres la loi de composition des accélerations et le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel Galiléen R, on a :

$$\overrightarrow{a}_a = \overrightarrow{a}_r + \overrightarrow{a}_e + \overrightarrow{a}_c et \sum \overrightarrow{F}_{ext} = m\overrightarrow{a}.$$

donc :

$$\overrightarrow{\sum F_{ext}} = m\left(\overrightarrow{a}_r + \overrightarrow{a}_e + \overrightarrow{a}_c\right) = m\overrightarrow{a}_r + m\overrightarrow{a}_e + m\overrightarrow{a}_c,$$

Finalement, on trouve le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel non Galiléen R :

$$\begin{aligned}\sum \overrightarrow{F}_{ext} - m\overrightarrow{a}_e - m\overrightarrow{a}_c &= m\overrightarrow{a}_r \\ \sum \overrightarrow{F}_{ext} + \overrightarrow{F}_{ie} + \overrightarrow{F}_{ic} &= m\overrightarrow{a}_r\end{aligned}$$

$\overrightarrow{F}_{ie} = -m\overrightarrow{a}_e$ la force d' inertie d' entraînement et $\overrightarrow{F}_{ic} = -m\overrightarrow{a}_c$ la force d' inertie de Coriolis ou force d' inertie complémentaire.

Chapitre 4

TRAVAIL ET ÉNERGIE DU POINT MATÉRIEL

4.1 Travail et puissance d'une force

4.1.1 Définition

On appelle le travail élémentaire δW d'une force $\overrightarrow{F}$ qui s'exerce sur un point matériel qui est en déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ (infiniment petit), du point M à l'instant t à un autre point M' à l'instant $t + dt$, la quantité scalaire définie par :

$$\delta W = \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{dl}. \tag{4.1}$$

Dans les différentes bases, la force $\overrightarrow{F}$, le déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ et le travail élémentaire δW ont les formes suivantes :

En coordonnes cartésiennes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} &= \quad F_x \overrightarrow{i} + F_y \overrightarrow{j} + F_z \overrightarrow{k}, \\ \overrightarrow{dl} &= \quad dx \overrightarrow{i} + dy \overrightarrow{j} + dz \overrightarrow{k}, \\ \delta W &= \quad F_x dx + F_y dy + F_z dz. \end{aligned} \tag{4.2}$$

En coordonnes cylindriques :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} =& \quad F_\rho \ \overrightarrow{u}_\rho + F_\theta \ \overrightarrow{u}_\theta + F_z \ \overrightarrow{k}, \\ \overrightarrow{dl} =& \quad d\rho \, \overrightarrow{u}_\rho + \rho \, d\theta \, \overrightarrow{u}_\theta + dz \, \overrightarrow{k}, \\ \delta W =& \quad F_\rho d\rho + F_\theta \, \rho \, d\theta + F_z dz. \end{aligned} \tag{4.3}$$

En coordonnes sphériques :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} =& F_r \ \overrightarrow{u}_r + F_\theta \ \overrightarrow{u}_\theta + F_\phi \ \overrightarrow{u}_\phi, \\ \overrightarrow{dl} =& \quad dr \, \overrightarrow{u}_r + r \, d\theta \, \overrightarrow{u}_\theta + r \, sin\theta \, d\phi \, \overrightarrow{u}_\phi, \\ \delta W =& \quad F_r \, dr + F_\theta \, r \, d\theta + F_\phi \, r \, sin\theta \, d\phi. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Le travail total de la force entre les deux points A et B est la sommation de tous les travaux élémentaires, ce qui donne :

$$W\left(\overrightarrow{F}\right)_{AB} = \int_A^B \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{dl} = C_{\overrightarrow{F}_{A \to B}}. \tag{4.5}$$

Donc, le travail est une quantité scalaire, sa dimension est $M \, L^2 \, T^{-2}$ et leur unite dans le $S.I$ est $Kg \, m^2 \, s^{-2}$ que l'on nomme le Joule (j). D'après la relation (4.5), le travail d'une force sur un déplacement AB correspond à la circulation C du vecteur force $\overrightarrow{F}$ sur ce chemin.

Théorème

"Le travail d'une force au cours d'un déplacement AB est égal à la circulation du vecteur force sur ce déplacement"

La puissance instantanée, notée $P(t)$, représente la rapidité avec laquelle il s'effectue le travail, mathématiquement, on écrit :

$$\delta W = \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{v} \, dt = p\,(t) \ dt, \Longrightarrow p\,(t) = \frac{\delta W}{dt} = \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{v}. \tag{4.6}$$

Cette grandeur s'exprime dans le $S.I$ d'unités par $Kg \, m^2 \, s^{-3}$ que l'on nomme le Watt

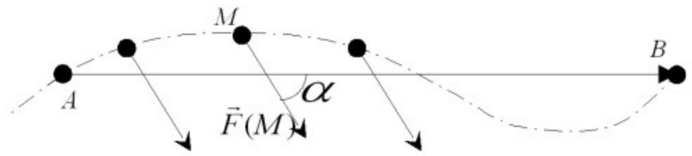

FIGURE 4.1 – Travail d'une force au cours d'un déplacement élémentaire

(W) et sa dimension est $M\,L^2\,T^{-3}$.

Dans les différentes bases, la force $\overrightarrow{F}$, la vitesse $\overrightarrow{v}$ et la puissance instantanée p, ont les formes suivantes :

En coordonnes cartésiennes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} &= F_x \overrightarrow{i} + F_y \overrightarrow{j} + F_z \overrightarrow{k}, \\ \overrightarrow{v} &= v_x \overrightarrow{i} + v_y \overrightarrow{j} + v_z \overrightarrow{k}, \\ p &= F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z. \end{aligned} \tag{4.7}$$

En coordonnes cylindriques :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} &= F_\rho \overrightarrow{u}_\rho + F_\theta \overrightarrow{u}_\theta + F_z \overrightarrow{k}, \\ \overrightarrow{v} &= \dot{\rho}\, \overrightarrow{u} + \rho\dot{\theta} \overrightarrow{u}_\theta + \dot{z}\, \overrightarrow{k}, \\ p &= F_\rho \dot{\rho} + F_\theta \rho \dot{\theta} + F_z \dot{z}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

En coordonnes sphériques :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} &= F_r \overrightarrow{u}_r + F_\theta \overrightarrow{u}_\theta + F_\phi \overrightarrow{u}_\phi, \\ \overrightarrow{v} &= \dot{r} \overrightarrow{u}_r + r\,\dot{\theta}\, \overrightarrow{u}_\theta + r\,sin\theta\,\dot{\phi}\, \overrightarrow{u}_\phi, \\ p &= F_r\ \dot{r} + F_\theta\, r\,\dot{\theta} + F_\phi\, r\,sin\theta\,\dot{\phi}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

4.1.2 Travail d'une force constante

Le travail total d'un point matériel effectuant un déplacement rectiligne entre le point A et B sous l'action d'une force F constante prend la forme suivante :

$$W\left(\overrightarrow{F}\right)_{AB} = \int_A^B \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{dl} = \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{AB} = F\, AB\, cos\theta, \tag{4.10}$$

ou θ est l'angle entre $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{AB}$.

4.1.3 Travail moteur et travail résistant d'une force

D'après la relation (4.10), on distingue trois types de travail :

Quand le travail de la force est positif, on dit que le travail de cette force est moteur, ceci est réalisé pour $cos\theta \geq 0$, donc $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Quand le travail de la force est négatif, on dit que le travail de cette force est résistant, ceci est réalisé pour $cos\theta \leq 0$, donc $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$.

Quand le travail de la force est nul, on dit que la force ne travaille pas, ceci est réalisé pour $cos\theta = 0$, donc $\theta = \frac{\pi}{2}$.

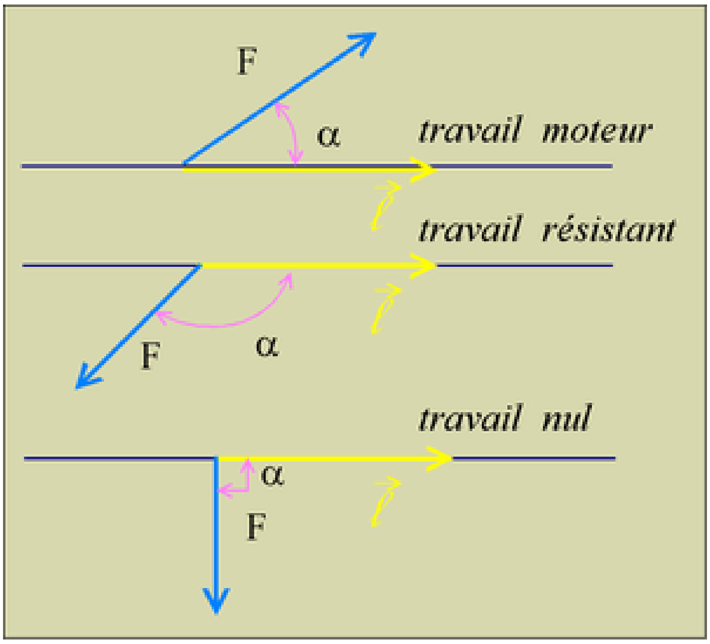

FIGURE 4.2 – Les différents types de travail

4.1.4 Quelques exemples de travail d'une force

Travail d'une force constante (poids d'un objet)

Dans un système de coordonnées cartésiennes dont l'axe Oz est la verticale dirigée vers le haut, nous considérons un point matériel de masse m dans le cas d'une chute libre de point $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ au point $B\left(x_B, y_B, z_B\right)$ selon une trajectoire quelconque (c'est-à-dire que le chemin qui mène de A vers B peut prendre plusieurs trajectoires). Donc, le point matériel est sous l'action d'une seule force qui est son poids $\overrightarrow{P}$ qui est une force constante en norme et en direction.

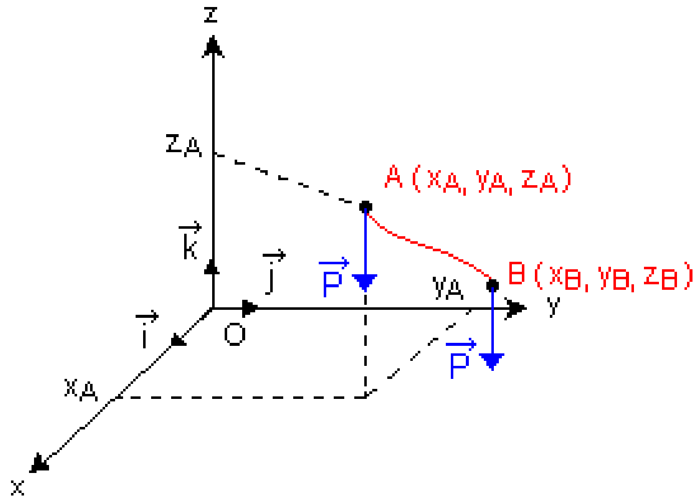

FIGURE 4.3 – Le travail de poids

Dans les coordonnes cartésiennes, le poids $\overrightarrow{P}$ et le déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$, ont les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P} &= 0\,\overrightarrow{i} + 0\,\overrightarrow{j} - mg\,\overrightarrow{k}\,, \\ \overrightarrow{dl} &= dx\,\overrightarrow{i} + dy\,\overrightarrow{j} + dz\,\overrightarrow{k}\,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Le travail de poids sera donc :

$$W_{AB}\left(\overrightarrow{P}\right) = \int_A^B \overrightarrow{P} \bullet \overrightarrow{dl} = -\int_A^B mgdz = -mg\int_A^B dz = mg\left(Z_A - Z_B\right), \tag{4.12}$$

D'après la relation (4.12), nous voyons que le travail de la force de poids ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement de l'altitude initiale et finale. Et nous voyons aussi que le travail de poids est moteur ou résistant, quand $Z_A \geq Z_B$ ou $Z_A \leq Z_B$ respectivement, quand $Z_A = Z_B$ le travail de poids est nul.

Travail d'une force non constante (la force élastique du ressort)

On suppose que le ressort est parfaitement élastique, ou l_0, k sont sa longueur au repos et sa constante de raideur respectivement, on attache un objet de masse m à l'autre extrémité libre et on pose le ressort et la masse sur un plan horizontal lisse, puis on tire la masse m de la position x_0 au x_1, sa longueur augmente et devient l, le fil exerce une tension qu'on l'appelle force de rappel $\overrightarrow{F}_{el} = -k\,x\,\overrightarrow{i}$ pour essayer de revenir à l'état de repos, cette force n'est pas constante (une force variable) car elle dépend de x . Donc, le travail de cette force devient :

$$W\left(\overrightarrow{F}_{el}\right) = \int_{x_0}^{x_1} \overrightarrow{F}_{el} \bullet \overrightarrow{dl} = \int_{x_0}^{x_1} \left(-k\,x\,\overrightarrow{i}\right) \bullet \left(dx\,\overrightarrow{i}\right) = -k\int_{x_0}^{x_1} x\,dx = -k\left(x_1^2 - x_0^2\right), \tag{4.13}$$

d'après la relation (4.13), nous voyons que le travail de la force de rappel du ressort ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement de la position initiale et finale du ressort.

4.1.5 Les forces conservatives

Lorsque le travail d'une force ne dépend que de son état initial et de son état final et ne dépend pas du chemin suivi par le point matériel, on dit que cette force est conservative, par exemple le travail de force de poids et le travail de la force élastique du ressort.

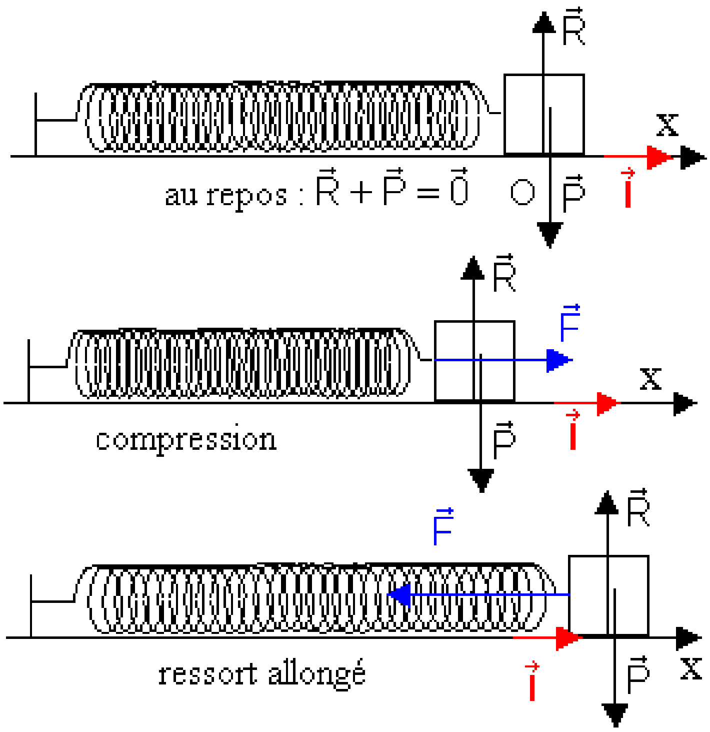

FIGURE 4.4 – Pendule élastique horizontal

Remarque

1/ Généralement, pour calculer le travail d'une force, on utilise la relation (4.5), donc éviter d'appliquer directement la relation (4.10), cette relation est valable quand la force est constante et le chemin est rectiligne.

2/ Si le travail d'une force est nul, la puissance correspondante est aussi nulle.

3/ Quand le vecteur de force est perpendiculaire au vecteur de déplacement, le travail de cette force est nul.

4/ Le travail d'une force conservative $\vec{F}_{con}$ le long d' un chemin fermée est nul c'est-à-dire :

$$W_{AA}\left(\vec{F}_{co}\right) = \int_A^A \vec{F}_{co} \bullet \vec{dl} = W(A) - W(A) = 0. \tag{4.14}$$

5/ Quand le travail de la force dépend du chemin suivi, on parle donc de force non conservative $\vec{F}_{nco}$, par exemple les forces de frottement.

4.1.6 Les forces non conservatives

Les forces non conservatives ou les forces dissipatives sont des forces qui diminuent l'énergie mécanique dans un système. Les forces non conservatives agissant sur un objet s'opposent toujours au mouvement de l'objet et leur travail est toujours négatif et dépend du chemin suivi. Par exemple, la force de frottement, la résistance de l'air et la résistance des fluides.

4.2 Energie

4.2.1 L'énergie cinétique E_c

Définition

L'énergie cinétique, notée par E_c d'un point matériel de masse m qui se déplace avec une vitesse v dans un referentiel galiléen R, est une grandeur physique scalaire positive définie par la relation suivante :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2, \tag{4.15}$$

Cette grandeur phyique s'exprime dans le $S.I$ d' unités par $Kg\,m^2\,s^{-2}$ que l'on nomme le joule (j) et sa dimension est $M\,L^2\,T^{-2}$.

4.2.2 Théorème de l'énergie cinétique

On considère un point matériel de masse m animé d'une vitesse v dans un referentiel galiléen R sous l'action d'un ensemble de forces extérieures. Le principe fondamental de la dynamique régit le mouvement de ce point matériel comme suit :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = m\overrightarrow{a} = m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}, \tag{4.16}$$

En multipliant scalairement la relation (4.16) par $\overrightarrow{v}\,dt$, on trouve :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} \bullet (\overrightarrow{v}\, dt) = m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \bullet (\overrightarrow{v}\, dt)\,,$$
$$\sum \left(\overrightarrow{F}_{ext} \bullet \overrightarrow{v}\right) dt = m\,\overrightarrow{v} \bullet d\overrightarrow{v},$$

Avec $\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{dl}}{dt}$, donc :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} \bullet \overrightarrow{dl} \;\; = m\, v\, dv,$$

On déduit par intégration le travail de la somme des forces entre deux points A et B :

$$\sum \int_A^B \overrightarrow{F}_{ext} \bullet \overrightarrow{dl} \quad = m \int_{v_A}^{v_B} v\, dv,$$
$$\sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F}_{ext}\right) \;\; = \frac{1}{2}m\left(v_B^2 - v_A^2\right),$$

Finalement, on trouve :

$$\Delta E_c = E_c\,(B) - E_c\,(A) = \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F}_{ext}\right). \tag{4.17}$$

L'énoncé du théorème "Dans un référentiel galiléen, la variation d' énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position A et une position B est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points."

4.2.3 L'énergie potentielle E_p

D'abord, nous considérons que le mouvement du point matériel de masse m est sous l'effet d'une force conservative $\overrightarrow{F}$, le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement de l'état initial et final. On dit que cette force est dérivée d'une énergie potentielle E_p, s'il existe une fonction d'état continue et dérivable telle que :

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}E_P = -\overrightarrow{\nabla}E_p,\; dE_p = -\overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{dl} \tag{4.18}$$

La relation (4.18) est très importante, parce qu'elle nous permet de déterminer la force consevative $\overrightarrow{F}$ à partir de l'énergie potentielle E_p dont elle dérive et aussi de déterminer l'énergie potentielle E_p associée dont dérive une force conservative $\overrightarrow{F}$.

Dans les différentes bases, la force $\overrightarrow{F}$, le déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ et la différentielle de l'énergie potentielle dE_p ont les formes suivantes :

En coordonnes cartésiennes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} &= F_x \overrightarrow{i} + F_y \overrightarrow{j} + F_z \overrightarrow{k}, \\ \overrightarrow{dl} &= dx \overrightarrow{i} + dy \overrightarrow{j} + dz \overrightarrow{k}, \\ dE_p &= -F_x dx - F_y dy - F_z dz, \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$F_x = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y,z}, \ F_y = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z}, \ F_z = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{x,y} \tag{4.20}$$

En coordonnes cylindriques :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} &= F_\rho \ \overrightarrow{u}_\rho + F_\theta \ \overrightarrow{u}_\theta + F_z \ \overrightarrow{k}, \\ \overrightarrow{dl} &= d\rho \overrightarrow{u}_\rho + \rho \, d\theta \overrightarrow{u}_\theta + dz \overrightarrow{k}, \\ dE_p &= -F_\rho d\rho - F_\theta \, \rho \, d\theta - F_z dz. \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$F_\rho = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{\theta,z}, \ F_\theta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{\rho,z}, \ F_z = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{\rho,\theta} \tag{4.22}$$

En coordonnes sphériques :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} &= F_r \ \overrightarrow{u}_r + F_\theta \ \overrightarrow{u}_\theta + F_\phi \ \overrightarrow{u}_\phi, \\ \overrightarrow{dl} &= dr \overrightarrow{u}_r + r \, d\theta \, \overrightarrow{u}_\theta + r \, sin\theta \, d\phi \, \overrightarrow{u}_\phi, \\ dE_p &= -F_r \, dr - F_\theta \, r \, d\theta - F_\phi \, r \, sin\theta \, d\phi. \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$F_r = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial r}\right)_{\theta,\phi}, \ F_\theta = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\right)_{r,\phi}, \ F_\phi = -\frac{1}{r \, sin\theta}\left(\frac{\partial E_p}{\partial \phi}\right)_{r,\theta} \tag{4.24}$$

4.2.4 Théorème de l'énergie potentielle

Soit $\overrightarrow{F}^c$ une force conservative s'appliquant sur un point matériel qui se déplace du point A vers le point B. On définit l'énergie potentielle E_p dont la variation ΔE_p sur le chemin AB est l'opposé du travail de cette force conservative. On a :

$$dE_p = -\overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{dl} = -dW$$

Par intégration, on trouve :

$$\Delta E_P = E_P(B) - E_P(A) = W_{AB}\left(\overrightarrow{F}^c\right). \tag{4.25}$$

L'énoncé du théorème "La variation d'énergie potentielle entre deux points et est égale à l'opposé du travail de la force conservative entre ces deux points."

4.2.5 Exemples d'énergie potentielle

Énergie potentielle de pesanteur

Nous considérons un point matériel de masse m, se déplaçant du point $A(x_A, y_A, z_A)$ au point $B(x_B, y_B, z_B)$ dans l'espace dont l'axe (Oz) est la verticale dirigée vers le haut. Donc, le point matériel est soumis au champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$, donc au poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$. Dans les coordonnes cartésiennes, le poids $\overrightarrow{P}$ et le déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$, ont les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P} &= 0\,\overrightarrow{i} + 0\,\overrightarrow{j} - mg\,\overrightarrow{k}, \\ \overrightarrow{dl} &= dx\,\overrightarrow{i} + dy\,\overrightarrow{j} + dz\,\overrightarrow{k}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Lors du déplacement du point matériel m, le travail élémentaire de poids sera :

$$dW\left(\overrightarrow{P}\right) = \overrightarrow{P} \bullet \overrightarrow{dl} = -mgdz = -d(mgz) = -dE_p,$$

Alors, l'énergie potentielle E_p associée à la force de poids $\overrightarrow{P}$ s'exprime par : $E_p = mgz + Cet$.

Par convention, au niveau du sol $z = 0$ l'énergie potentielle $E_p = 0$, et par conséquent $Cet = 0$, qui donne l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_p = mgz. \tag{4.27}$$

On peut facilement montrer que la force de poids d' un corps $\overrightarrow{P}$ dérive de la fonction énergie potentielle de pesanteur $E_p$comme suit :

$$\overrightarrow{P} = -\overrightarrow{grad}E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial z}\overrightarrow{k} = -\frac{\partial\,(mgz)}{\partial z}\overrightarrow{k} = -mg\,\overrightarrow{k}$$

Énergie potentielle élastique E_{pe}

Nous considérons un ressort parfaitement élastique, l_0 sa longueur au repos et k sa constante de raideur, on attache un objet de masse m à l'autre extrémité libre et on pose le ressort et la masse sur un plan horizontal lisse, puis on tire la masse m de la position x_0 à l'instant t_0 au x_A à l'instant t_A ou sa longueur devinet l_0, et l' allongement du ressort est $\Delta l = x = l - l_0 = x_A - x_0$, le fil exerce une tension $\overrightarrow{F}_{el} = -k\,x\,\overrightarrow{i}$, le travail élémentaire de cette force devient :

$$dW\left(\overrightarrow{F}_{el}\right) = \overrightarrow{\overrightarrow{F}}_{el} \bullet \overrightarrow{dl} = -kx\,dx = -d\left(\frac{1}{2}Kx^2\right) = -dE_{pe}, \tag{4.28}$$

Ce qui conduit à l'expression de l'énergie potentielle élastique :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}Kx^2 + C,$$

Par convention, au repos $x = 0$ (aucune déformation), l'énergie potentielle élastique devient nulle ($E_{pe} = 0$) et par conséquent $C = 0$, donc la relation de l'énergie potentielle élastique s'écrit :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} K x^2. \tag{4.29}$$

Ici x représente l'allongement (ou la compression) du ressort, donc on peut écrire la relation de l'énergie potentielle élastique sous la forme suivante :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} K \left(l - l_0\right)^2. \tag{4.30}$$

On peut facilement montrer que la force de tension de file $\overrightarrow{F}_{el}$ dérive de la fonction de l'énergie potentielle élastique E_{pe} comme suit :

$$\overrightarrow{F}_{el} = -\overrightarrow{grad} E_{pe} = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \overrightarrow{i} = -\frac{\partial \left(\frac{1}{2} K x^2\right)}{\partial x} \overrightarrow{i} = -Kx \overrightarrow{i}. \tag{4.31}$$

Remarque

L'énergie potentielle E_p toujours définie comme une constante Cet additif arbitraire près, où le choix de son origine est arbitraire.

4.2.6 L'énergie mécanique E_m

Définition

Nous considérons un point matériel de masse m qui se déplace avec une vitesse v dans un reférentiel galilien R, on définit l'énergie mécanique notée E_m de ce point matériel comme la somme de son énergie cinétique E_c et potentielle E_p, et on écrit :

$$E_m = E_c + E_p.$$

4.2.7 Théorème de l'énergie mécanique

Soit un point matériel de masse m qui se déplace avec une vitesse v dans un reférentiel galilien R sous l'action de l'ensemble des forces extérieures conservative $\overrightarrow{F}^{c}_{ext}$

et non conservative $\overrightarrow{F}^{nc}_{ext}$. Nous avons établi précédemment, le théorème de l'énergie cinétique entre le point A et B qui stipule que :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F}_{ext}\right),$$

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F}^{nc}_{ext}\right) + \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F}^{c}_{ext}\right), \tag{4.32}$$

D'autre part, on a déjà vu que la variation de l'énergie potentielle entre deux points A et B est égale à l'opposé du travail de la force conservative entre ces deux points, ce qui permet de nous écrire :

$$\Delta E_P = E_P(B) - E_P(A) = -\sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F}^{c}_{ext}\right). \tag{4.33}$$

Apres le remplacement de la relation (4.33) dans la relation (4.32), on trouve :

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F}^{nc}_{ext}\right) - E_P(B) + E_P(A),$$

$$\left[E_c(B) + E_P(B)\right] - \left[E_c(A) + E_P(A)\right] = \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F}^{nc}_{ext}\right),$$

Ce qui nous donne :

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F}^{nc}_{ext}\right). \tag{4.34}$$

L'énoncé du théorème "La variation d'énergie mécanique d'un système entre deux points A et B est égale la somme des travaux des forces extérieures non-conservatives appliquées à ce système "

D'après ce théorème, on remarque que $E_m(B)$ est inférieur toujours à $E_m(A)$ par ce que $W_{AB}\left(\overrightarrow{F}^{nc}_{ext}\right)$ est négative, dans ce cas l' énergie mécanique ne se conserve pas, contrairement elle est diminuée au cours du temps.

4.2.8 Théorème de conservation l'énergie mécanique

Si le système mécanique ne subit aucune force extérieure non conservative, alors l'énergie mécanique se conserve et on parle dans ce cas d'un système mécaniquement isolé, on écrit :

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = 0 \Rightarrow E_m(B) = E_m(A) = Cte. \tag{4.35}$$

L'énoncé du théorème "Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie mécanique d'un système soumis à des forces extérieures conservatives se conserve. L'énergie mécanique d'un tel système est une constante de mouvement."

D'après ce théorème, on remarque que : $\Delta E_m = 0 \Rightarrow \Delta E_c + \Delta E_p = 0 \Rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p$,

c'est-a-dire l'augmentation de l'énergie cinétique entre deux points et compensée par une diminution de l'énergie potentielle et vice versa, mais de manière que la somme de ces deux formes d'énergie reste constante.

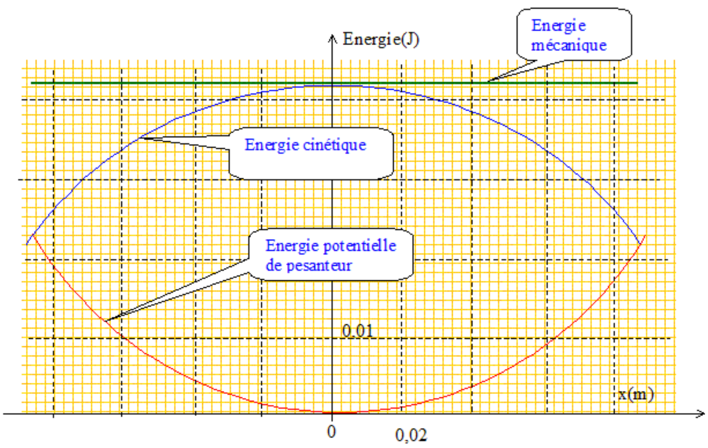

FIGURE 4.5 – Conservation l'énergie mécanique

Références

[1] AHMED FIZAZI, Cahier de la Mécanique du Point Matériel, Office des Publications Universitaires, Algérie, 2013.

[2] ZIANI NOSSAIR et BOUTAOUS AHMED, Mécanique du point matériel cours et exercices, université des sciences et technologie d'Oran - Mohamed Boudiaf-, 2015/2016.

[3] ALAIN GIBAUD ET MICHEL HENRY, Cours de physique mécanique du point, 2e Edition Dunod (2007).

[4] Laurent Gautron et autres, Cours applications et exercices corrigés, Dunod, Paris, 2010.

[5] HADJRI MEBARKI SORIA, Physique générale - live 1 : Cinématique du point matériel, OPU, 2016.

[6] HADJRI MEBARKI SORIA, Physique générale - live 2 : dynamique du point matériel, OPU, 2016

[7] MEICHEL HENRY ET NICOLAS DELORME, mini Manuel Mécanique du point Cours + Exos, Dunod, Paris, France, 2008.

[8] JEAN-MARIE BRÉBEC, THIERRY DESMARAIS, MARC MÉNÉTRIER, Bruno NOËL, RÉGINE NOËL et Claude ORSINI, Mécanique, 1 ière Année Physique MPSI/PCSI/PTSI, Hachette Livre, Paris, (2010).