Université de Jijel
Faculté des sciences et de la technologie
Les exerecices de Physique 1 pour 1 er année ST
Rappels mathématiques et analyse dimensionnelle

Exerecice 1:

Dans cet excercie, on chereche l'expression de la force de frottement visqueux $\overrightarrow{F}$ a l'aide de l'analyse dimensionnelle. Cette force de frottement visqueux $\overrightarrow{F}$, a priori, ne dépend que du rayon r de la bille, de sa vitesse $\overrightarrow{v}$, d'une constante sans dimension C et du coefficient de viscosité du fluide η . La force de frottement visqueux $\overrightarrow{F}$ définie comme étant:

$$\overrightarrow{F} = -Cr^{\alpha}\eta^{\beta}\overrightarrow{v}^{\gamma} \tag{1}$$

1) A l'aide de l'équation aux dimensions poùr l'équation (1), détermine les coefficients, α, β et γ.

2) Déduire l'expression de la force de frottement visqueux $\overrightarrow{F}$, on done $C = 6\pi$.

Solution de l'Exerecice 1

1) A l'aide de l'équation aux dimensions pour l'équation (1), on trouve:

$$[F] = \left[Cr^{\alpha}\eta^{\beta}v^{\gamma}\right] = [C]\,[r]^{\alpha}\,[\eta]^{\beta}\,[v]^{\gamma}. \tag{2}$$

donc :

$$\begin{cases} [F] = & MLT^{-2} \\ [C] = & 1 \\ [r]^{\alpha} = & L^{\alpha} \\ [\eta]^{\beta} = & M^{\beta}T^{-\beta}L^{-\beta} \\ [v]^{\gamma} = & L^{\gamma}T^{-\gamma} \end{cases}$$

En remplace dans l'équation (2), on trouve :

$$MLT^{-2} = M^{\beta}L^{-\beta+\alpha+\gamma}T^{-\gamma-\beta}. \tag{3}$$

Par comparison du premier et deuxième membre de l'équation (3), on trouve :

$$\beta = 1, -\beta+\alpha+\gamma = 1, -\gamma-\beta = -2.$$

La solution est donc :

$$\alpha = \beta = \gamma = 1. \tag{4}$$

2) En remplace les valeur de α, β et γ dans l'équation (1), on trouve l'expression de la force de frottement visqueux $\overrightarrow{F}$:

$$\overrightarrow{F} = -6\pi\, r\, \eta \overrightarrow{v}. \tag{5}$$

Exerecice 2:

La période propre T_0 d'un pendule simple est la durée d'une oscillation libre, à priori, ne dépend que de la masse m, de la longueur l du fil et de l'accélération de la pesanteur g.

1) Déterminer par analyse dimensionnelle l'expression de T_0.

Solution de l'exerecice 2:

On peut écrire :

$$T_0 = C\, m^{\alpha}\, l^{\beta}\, g^{\gamma} \tag{6}$$

Où C est une constante, donc par analyse dimensionnelle, on trouve :

$$[T_0] = [C]\ [m]^{\alpha}\ [l]^{\beta}\ [g]^{\gamma}\,.$$

$$M^0 L^0 T^1 = M^{\alpha} L^{\beta+\gamma} T^{-2\gamma}. \tag{7}$$

L'équation (7) est dimensionnellement homogène, donc par comparaison du premier et deuxième membre de l'équation (7), on trouve :

$$\alpha = 0, \beta + \gamma = 0, -2\gamma = 1.$$

La solution est alors :

$$\alpha = 0\, \beta = +1/2\, \gamma = -1/2. \tag{8}$$

2) En remplaçant les valeurs de α, β et γ dans l'équation (7), on trouve l'expression de la période propre T_0 :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{9}$$

On voit que l'expression de La période propre T_0 du pendule simple ne dépend pas de la masse m.

Exerecice 3:

On définit la masse volumique ρ d'un cylindre de masse m, de rayon r et de hauteur h, par la relation suivante:

$$\rho = \frac{m^\alpha}{\pi h^\beta r^2}. \tag{10}$$

1) Trouvez les constantes α et β, à l'aide de l'analyse dimensionnelle. 2) Déduire l'expression de la masse volumique ρ.

Solution de l'exerecice 3:

1) Par analyse dimensionnelle, on trouve :

$$[\rho] = \frac{[m^\alpha]}{[\pi h^\beta r^2]} \Rightarrow ML^3 = \frac{[m]^\alpha}{[\pi]\,[h]^\beta\,[r]^2} \Rightarrow ML^3 = \frac{M^\alpha}{L^{\beta+2}},$$

donc, on trouve :

$$ML^3 = M^\alpha L^{\beta+2}, \tag{11}$$

Par comparison du premier membre et le deuxième de l'équation (11), on trouve :

$$\alpha = 1, \beta + 2 = 3,$$

$$\begin{cases} \alpha &= 1, \\ \beta + 2 &= 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha &= 1 \\ \beta &= 1 \end{cases}. \tag{12}$$

2) En remplace les valeur de α et β dans l'équation (10), on trouve l'expression de la masse volumique ρ :

$$\rho = \frac{m}{\pi h r^2}. \tag{13}$$

Exerecice 4:

Soit le reférentiel orthonormal $\overrightarrow{R}(O;x,y,z)$ et la base est $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$. Dans le plan Oxy, on definie deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$:

$$\overrightarrow{A}=A_x\overrightarrow{i}+A_y\overrightarrow{j}=-4\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j} \tag{14}$$

$$\overrightarrow{B}=B_x\overrightarrow{i}+B_y\overrightarrow{j}=-2\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j} \tag{15}$$

Calculer:
1) La norme (module) du vecteur $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$.
2) Les vecteurs $\overrightarrow{C}$, $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{F}$ tel que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{C} &= 2\left(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}\right),\\ \overrightarrow{D} &= 2\overrightarrow{A}-3\overrightarrow{B},\\ \overrightarrow{F} &= -2\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}.\end{aligned} \tag{16}$$

3) Le produit scalaire $\overrightarrow{A}\bullet\overrightarrow{B}$.
4) L'angle θ entre $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$.
5) Le produit vectoriel $\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B}$.
6) L'aire du parallélogramme formé par $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$.
7) Le vecteur unitaire $\overrightarrow{V}$ porté par $\overrightarrow{F}$.
8) La projection de $\overrightarrow{B}$ sur $\overrightarrow{D}$.

Solution de l'exerecice 4:

1) La norme des vecteurs :

$$A=\left|\left|\overrightarrow{A}\right|\right|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=5, \tag{17}$$

$$B=\left|\left|\overrightarrow{B}\right|\right|=\sqrt{(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}. \tag{18}$$

2) Les vecteurs $\overrightarrow{C}$,$\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{F}$:

$$\overrightarrow{C}=2\left(-4\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}\right)=-12\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}, \tag{19}$$

$$\overrightarrow{D} = 2\left(-4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}\right) - 3\left(-2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}\right) = -2\overrightarrow{i} - 12\overrightarrow{j}, \tag{20}$$

$$\overrightarrow{F} = -2\left(-4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}\right) - \left(-2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}\right) = 10\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}. \tag{21}$$

3) Le produit scalaire $\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{B}$ est:

$$\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{B} = \left(-4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}\right) \bullet \left(-2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}\right) = (-4).(-2) + (-3).(+2) = 8 - 6 = 2. \tag{22}$$

4) L'angle θ entre $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ est :

$$\theta = arccos\left(\frac{\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{B}}{A.B}\right) = arccos\left(\frac{2}{5.2.\sqrt{2}}\right) =$$

5) Le produit vectoriel $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}$ est :

$$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -4 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} = -2\overrightarrow{k}. \tag{23}$$

6) L'aire du parallélogramme formé par $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ est :

$$S = \left|\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}\right| = 2. \tag{24}$$

7) Le vecteur unitaire $\overrightarrow{V}$ pourté par $\overrightarrow{F}$ est :

$$\overrightarrow{V} = \frac{\overrightarrow{F}}{F} = \frac{10\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}}{\left|10\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}\right|} = \frac{10\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}}{\sqrt{116}} = \frac{10}{\sqrt{116}}\overrightarrow{i} + \frac{4}{\sqrt{116}}\overrightarrow{j}, \tag{25}$$

8) La projection de $\overrightarrow{B}$ sur $\overrightarrow{D}$ est :

$$\overrightarrow{B}_D = \frac{\overrightarrow{B} \bullet \overrightarrow{D}}{D}\overrightarrow{D} = \frac{\left(-2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}\right) \bullet \left(-2\overrightarrow{i} - 12\overrightarrow{j}\right)}{\left|-2\overrightarrow{i} - 12\overrightarrow{j}\right|}\left(-2\overrightarrow{i} - 12\overrightarrow{j}\right) = \frac{20}{\sqrt{148}}\left(2\overrightarrow{i} + 1\right. \tag{26}$$

A. Application 2

Soient un champ scalaire $f(x,y,z)$ et un champ vectorielle $\overrightarrow{V}(x,y,z)$, donnés par :

$$f(x,y,z) = 3x^2y^3z, \tag{27}$$

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = \left(-xyz^2\right)\overrightarrow{i} + \left(3xy^2z\right)\overrightarrow{j} + \left(2x^2yz\right)\overrightarrow{k}. \tag{28}$$

1) Calculer le gradient de $f(x,y,z)$ noté $\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z)$.
2) Calculer le rotationnel du gradient de $f(x,y,z)$ noté $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\nabla} f(x,y,z)$.
3) Calculer la divergence de $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ noté $\overrightarrow{\nabla} \bullet \overrightarrow{V}(x,y,z)$.
4) Calculer le rotationnel de $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ noté $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}(x,y,z)$.

<u>Exerecice 5:</u>

Soient un champ scalaire $f(x,y,z)$ et un champ vectorielle $\overrightarrow{V}(x,y,z)$, donnés par :

$$f(x,y,z) = 3x^2y^3z, \tag{29}$$

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = \left(-xyz^2\right)\overrightarrow{i} + \left(3xy^2z\right)\overrightarrow{j} + \left(2x^2yz\right)\overrightarrow{k}. \tag{30}$$

1) Calculer le gradient de $f(x,y,z)$ noté $\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z)$.
2) Calculer le rotationnel du gradient de $f(x,y,z)$ noté $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\nabla} f(x,y,z)$.
3) Calculer la divergence de $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ noté $\overrightarrow{\nabla} \bullet \overrightarrow{V}(x,y,z)$.
4) Calculer le rotationnel de $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ noté $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}(x,y,z)$.

<u>Solution de l'exerecice 5:</u>

1) Le gradient de $f(x,y,z)$ définie par :

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\overrightarrow{k},$$

donc :

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = \left(6xy^3z\right)\overrightarrow{i} + \left(9x^2y^2z\right)\overrightarrow{j} + \left(3x^2y^3\right)\overrightarrow{k}. \tag{31}$$

2) Le rotationnel du gradient de $f(x,y,z)$ est :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (6xy^3z) & (9x^2y^2z) & (3x^2y^3) \end{vmatrix},$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\nabla} f = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (9x^2y^2z) & (3x^2y^3) \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (6xy^3z) & (3x^2y^3) \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ (6xy^3z) & (9x^2y^2z) \end{vmatrix} \overrightarrow{k},$$

donc :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial(3x^2y^3)}{\partial y} - \frac{\partial(9x^2y^2z)}{\partial z} \right) \overrightarrow{i} - \left(\frac{\partial(3x^2y^3)}{\partial x} - \frac{\partial(6xy^3z)}{\partial z} \right) \overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial(9x^2y^2z)}{\partial x} - \frac{\partial(6xy^3z)}{\partial y} \right) \overrightarrow{k}.$$

Finalement en trouve :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = \left(9x^2y^2 - 9x^2y^2\right) \overrightarrow{i} - \left(6xy^3 - 6xy^3\right) \overrightarrow{j} + \left(18xy^2z - 18xy^2z\right) \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}. \tag{32}$$

3) La divergence de $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ noté $\overrightarrow{\nabla} \bullet \overrightarrow{V}(x,y,z)$ est définie par :

$$\overrightarrow{\nabla} \bullet \overrightarrow{V}(x,y,z) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z},$$

donc :

$$\overrightarrow{\nabla} \bullet \overrightarrow{V}(x,y,z) = \frac{\partial\left(-xyz^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(3xy^2z\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(2x^2yz\right)}{\partial z} = -yz^2 + 6xyz + 2x^2y. \tag{33}$$

4) Le rotationnel de $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ noté $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}(x,y,z)$ a la définition suivente :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (-xyz^2) & (3xy^2z) & (2x^2yz) \end{vmatrix},$$

donc :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{V} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (3xy^2z) & (2x^2yz) \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (-xyz^2) & (2x^2yz) \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ (-xyz^2) & (3xy^2z) \end{vmatrix}\vec{k},$$

d'où :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{V}(x,y,z) = \left(\frac{\partial\left(2x^2yz\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(3xy^2z\right)}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial\left(2x^2yz\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(-xyz^2\right)}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial\left(3xy^2z\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(-xyz^2\right)}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Finalement, en trouve :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{V}(x,y,z) = \left(2x^2z - 3xy^2\right)\vec{i} - (4xyz + 2xyz)\vec{j} + \left(3y^2z + xz^2\right)\vec{k}, \quad (34)$$