Université de Jijel
Faculté des sciences et de la technologie
Les exerecices de Physique 1 pour 1 er année ST
CINÉMATIQUE DU POINT MATÉRIEL

Exerecice 1:

Un point matériel M se mouve sur une ligne droite (ox) suivant l'équation horaire suivante :

$$\overrightarrow{OM}\,(t) = x(t)\,\overrightarrow{i} = \left(-3t^2 + 12\,t\right)\overrightarrow{i} \tag{1}$$

1) Quelle est la position de ce corps à $t = 2\,(s)$.
2) À quel instant t, il passe par l'origine O.
3) Quelle est la vitesse moyenne v_m entre $t_1 = 1\,(s)$ et $t_3 = 3\,(s)$.
4) Déterminer l'expression de la vitesse instantanée et calculer sa valeur à $t_2 = 2\,(s)$.
5) Quelle est l'accélération moyenne a_m entre $t_1 = 1\,(s)$ et $t_3 = 3\,(s)$.
6) Donner l'expression de l'accélération instantanée et calculer sa valeur a $t_2 = 2\,(s)$.
7) Déterminer la nature du mouvement.

Solution de l'Exerecice 1

$$\overrightarrow{OM}\,(t) = x(t)\,\overrightarrow{i} = \left(-3t^2 + 12\,t\right)\overrightarrow{i} \tag{2}$$

1) La position de ce corps à $t = 1\,(s)$ est $x(t = 1) = 9\,(m)$
2) Le mobile passe par l'origine O c'est-à-dire $x(t) = 0 \Rightarrow -3t^2 + 12\,t = 0$, il existe deux solutions : $\Rightarrow t = 0\,(s)$ et $t = 2\,(s)$.
3) La vitesse moyenne entre $t_1 = 1\,(s)$ et $t_3 = 3\,(s)$ est $v_m = \frac{x(t=3)-x(t=1)}{t_3-t_1} = \frac{9}{2}\,(m/s)$.
4) L'expression de la vitesse instantanée est $v = \frac{dx(t)}{dt} = -6t + 12\,(m/s)$, et sa valeur a $t_2 = 2\,(s)$ est $v_2 = 0\,(m/s)$.
5) L'expression de l'accélération moyenne entre $t_1 = 1\,(s)$ et $t_3 = 3\,(s)$ est $a_m = \frac{v(t=3)-v(t=1)}{t_3-t_1} = -6\,(m/s^2)$.
6) L'expression de l'accélération instantanée est $a = \frac{dv(t)}{dt} = -6\,(m/s^2)$ et sa valeur a $t_2 = 2\,(s)$ est $a = -6\,(m/s^2)$
7) La nature du mouvement :

Le mouvement est rectiligne parce que le mouvement est sur une ligne droite (ox).

Le produit scalaire de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{v}$ est :

$$\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{v} = (-6)\overrightarrow{i} \bullet (-6t+12)\overrightarrow{i} = 36\,t - 72$$

Quand $t\epsilon\,[0,2]$, $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{v} \leq 0$, le mouvement rectiligne est uniformément retardé $(MRUR)$.

Quand $t \geq 2\,(s)$, $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{v} \geq 0$, le mouvement rectiligne est uniformément accéléré $(MRUA)$.

Exerecice 2:

Un point matériel M se déplace sur une courbe où le vecteur de position à chaque instant t est donné par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = R\,cos\,(\omega t)\,\overrightarrow{i} + R\,sin\,(\omega t)\,\overrightarrow{i} + b\,t\,\overrightarrow{k}, \tag{3}$$

ou R, b et w sont des constantes.

1) Trouver les expressions des vecteurs vitesse et accélération en coordonnée cartésienne et déduire leurs modules.

2) Écrire le vecteur position dans coordonnées cylindriques.

3) Trouves les expressions des vecteurs vitesse et accélération en coordonnées cylindriques et déduire leurs modules.

4) Concluez-vous ?

Solution de l'exerecice 2:

1) Les expressions des vecteurs vitesse et accélération en coordonnée cartésienne et leurs modules

On sait que le vecteur vitesse est défini par :

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = -R\,\omega\,sin\,(\omega t)\,\overrightarrow{i} + R\,\omega\,cos\,(\omega t)\,\overrightarrow{j} + b\,\overrightarrow{k}, \tag{4}$$

et le module est : $\left\|\overrightarrow{v}(t)\right\| = v = \sqrt{R^2\omega^2 + b^2}\;(m/s)$.

On sait que le vecteur accélération est défini par :

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{d\overrightarrow{v}(t)}{dt} = -R\omega^2\,cos\,(\omega t)\,\overrightarrow{i} - R\omega^2\,sin\,(\omega t)\,\overrightarrow{j}, \tag{5}$$

et le module est : $\left\|\overrightarrow{a}(t)\right\| = a\sqrt{\left[-R\omega^2 \, cos\,(\omega t)\right]^2 + \left[-R\omega^2 \, sin\,(\omega t)\right]^2} = R\omega^2 \, \left(m/s^2\right)$.

2) Le vecteur de position en des coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \rho\,(t)\,\overrightarrow{u}_\rho + z\,(t)\,\overrightarrow{k}, \tag{6}$$

$\rho\,(t) = \sqrt{x^2\,(t) + y^2\,(t)} = \sqrt{\left[R\,cos\,(\omega t)\right]^2 + \left[R\,sin\,(\omega t)\right]^2} = R$ et

$tan\theta = \frac{y(t)}{x(t)} = tan\,(\omega t) \Rightarrow \theta = \omega t.$

donc, on trouve :

$$\overrightarrow{OM}(t) = R\,\overrightarrow{u}_\rho + b\,t\,\overrightarrow{k}, \tag{7}$$

L'expression de la vitesse en coordonnées cylindriques est la dérivée du vecteur de position qui a la forme suivante :

$$\overrightarrow{v}\,(t) = \dot{\rho}\,(t)\,\overrightarrow{u}_\rho + \dot{\theta}\,\rho\,(t)\,\overrightarrow{u}_\theta + \dot{z}\,(t)\,\overrightarrow{k} = \omega\,R\,\overrightarrow{u}_\theta + b\,\overrightarrow{k}, \tag{8}$$

et le module est : $\left\|\overrightarrow{v}\,(t)\right\| = v = \sqrt{R^2\omega^2 + b^2}\,\,(m/s)$.

Le vecteur d'accélération instantanée en coordonnées cylindriques est défini comme suit :

$$\overrightarrow{a}\,(t) = \frac{d\overrightarrow{v}\,(t)}{dt} = \left(\ddot{\rho} - \dot{\theta}^2\rho\right)\overrightarrow{u}_\rho + \left(\ddot{\theta}\rho + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \ddot{z}\,(t)\,\overrightarrow{k} = -\omega^2 R\,\overrightarrow{u}_\rho, \tag{9}$$

et le module est : $a\,(t) = \omega^2 R\,\left(m/s^2\right)$.

On conclut que les modules de vecteur vitesse et accélération ne dépendent pas des bases choisies.

<u>Exerecice 3:</u>

Un mobile M se déplace dans le plan (OXY), où le vecteur de position à chaque instant t est donné dans les coordonnées cartésiennes par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = b\,cos\,(\omega t)\,\overrightarrow{i} + b\,sin\,(\omega t)\,\overrightarrow{j}, \tag{10}$$

Ou b et w sont des constantes positives.

1) Trouver l'équation de la trajectoire du mobile M.

2) Déterminer les composantes du vecteur vitesse en coordonnée cartésienne et déduire leur module.

3) Déterminer les composantes du vecteur d'accélération en coordonnée cartésienne et déduire leur module.

4) Trouver les expressions des accélérations normale a_n et tangentielle a_t.

5) Déduire la nature de mouvement du mobile M et le rayon de curbure r.

Solution de l'exerecice 3:

1) Le vecteur de position pour un point matériel M qui se déplace dans un référentiel $R\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est donné par la relation suivante :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} = b\,cos(\omega t)\overrightarrow{i} + b\,sin(\omega t)\overrightarrow{j}. \tag{11}$$

donc :

$$x^2(t) + y^2(t) = [b\,cos(\omega t)]^2 + [b\,sin(\omega t)]^2 = b^2.$$

L'équation de la trajectoire du mobile a la forme suivante :

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = b^2, \tag{12}$$

Cette équation est d'un cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon $r = b$, donc la trajectoire est circulaire.

2) Les composantes du vecteur vitesse en coordonnée cartésienne et leur module :

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = v_x(t)\overrightarrow{i} + v_y(t)\overrightarrow{j}. \tag{13}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -b\,\omega\,sin(\omega t), \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = b\,\omega\,cos(\omega t). \end{cases}$$

Sa module est donné par :

$$v = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = b\,\omega\ (m/s). \tag{14}$$

3) Les composantes du vecteur d'accélération en coordonnée cartésienne et leur module :

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{d\overrightarrow{v}(t)}{dt} = a_x(t)\overrightarrow{i} + a_y(t)\overrightarrow{j}. \tag{15}$$

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = -b\,w^2\,cos\,(\omega t)\,, \\ a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = -b\,w^2\,sin\,(\omega t)\,. \end{cases}$$

Son module est donné par :

$$a(t) = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t)} = b\,\omega^2\left(m/s^2\right). \tag{16}$$

4) Les expressions des accélérations tangentielle a_t et normale a_n.

L'accélération tangentielle $a_t = \frac{dv(t)}{dt} = 0\ \left(m/s^2\right)$.

L'expression de module de vecteur accélérateur dans la base de Frenet est:

$$a^2(t) = a_t^2 + a_n^2 \Rightarrow, a_n = \sqrt{a_t^2 - a^2(t)} = b\,\omega^2\ \left(m/s^2\right). \tag{17}$$

5) La nature de mouvement du mobile M et le rayon de curbure r.

La trajectoire est circulaire et $a_t = 0$ donc le mouvement est circulaire uniforme.

$a_n = \frac{v^2}{r}$ est l'accélération normale, donc le rayon de curbure est
$r = \frac{v^2}{a_n} = \frac{b^2\,\omega^2}{b\,\omega^2} = b\ (m)$.

Exerecice 4:

Un point matériel M, se déplace dans le plan (OXY), est repéré par son vecteur de position $\overrightarrow{OM}$, tel que :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \left(t^2 + 2t - 1\right)\overrightarrow{i} + (t+1)\overrightarrow{j}, \tag{18}$$

1) Trouver l'équation de la trajectoire du mobile M.

2) Déterminer les composantes du vecteur vitesse en coordonnée cartésienne et déduire leur module.

3) Déterminer les composantes du vecteur accélération en coordonnées cartésienne et déduire leur module.

4) Quelle est la nature de mouvement du mobile M.

5) Trouver les expressions des accélérations normale a_n et tangentielle a_t.

6) Déterminer le rayon de curbure r.

Solution de l'exerecice 4:

1) Le vecteur de position du point matériel M qui se déplace dans le plan (OXY) est donné par la relation suivante :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\overrightarrow{i} + y(t)\,\overrightarrow{j} = \left(t^2 + 2t - 1\right)\,\overrightarrow{i} + (t+1)\,\overrightarrow{j}. \tag{19}$$

Donc , $x = t^2 + 2t - 1$ et $y = t + 1$, on remplace t dans x, on trouve l'équation de la trajectoire du mobile :

$$x = y^2 - 2 \Rightarrow y = \sqrt{x+2}, \tag{20}$$

2) Les composantes du vecteur vitesse en coordonnée cartésienne et leur module :

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = v_x(t)\,\overrightarrow{i} + v_y(t)\,\overrightarrow{j}. \tag{21}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 2(t+1), \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 1. \end{cases}$$

Et le module est donné par :

$$v = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \sqrt{4t^2 + 8t + 5}\ (m/s). \tag{22}$$

3) Les composantes du vecteur d'accélération en coordonnée cartésienne et leur module :

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{d\overrightarrow{v}(t)}{dt} = a_x(t)\,\overrightarrow{i} + a_y(t)\,\overrightarrow{j}. \tag{23}$$

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = 2, \\ a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = 0. \end{cases}$$

et son module est doné par :

$$a(t) = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t)} = 2\ \left(m/s^2\right). \tag{24}$$

4) Les expressions des accélérations tangentielle a_t et normale a_n.

L'accélération tangentielle $a_t = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{4(t+1)}{\sqrt{4t^2+8t+5}} \left(m/s^2\right)$.

L'expression de module de vecteur accélérateur dans la base de Frenet est :

$$a^2(t) = a_t^2 + a_n^2 \Rightarrow, a_n = \sqrt{a^2(t) - a_t^2} = \sqrt{\frac{4}{4t^2+8t+5}} \left(m/s^2\right). \qquad (25)$$

5) La nature de mouvement du mobile M et le rayon de curbure r. La trajectoire est circulaire et $a_t = 0$, donc le mouvement circulaire uniforme. $a_n = \frac{v^2}{r}$ est l'accélération normale, donc le rayon de curbure est

$$r = \frac{v^2}{a_n} = \frac{1}{2}\left(4t^2+8t+5\right)^{\frac{3}{2}} \ (m).$$

Exerecice 5:

Un point matériel M, se déplace dans un réferentiel fixe $R_0\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, est repéré par son vecteur de position $\overrightarrow{OM}$, tel que :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \left(t^2+3t-2\right)\overrightarrow{i} + \left(t^3+5t-6\right)\overrightarrow{j} + \left(t^2+t-5\right)\overrightarrow{k}, \qquad (26)$$

et dans un autre référentiel mobile $R_1\left(O_0, \overrightarrow{i}' = \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}' = \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}' = \overrightarrow{k}\right)$, les coordonnées de ce point matériel en fonction du temps sont données par :

$x'(t) = \left(t^2+3t-8\right)$, $y'(t) = \left(t^3+2t-3\right)$ et $z'(t) = \left(t^2+t-10\right)$

1) Déterminer les expressions de la vitesse absolue $\overrightarrow{v}(M/R_0) = \overrightarrow{v}_a$ et de la vitesse relative $\overrightarrow{v}(M/R_1) = \overrightarrow{v}_r$.

2) Calculer la différence entre la vitesse absolue et la vitesse relative, puis déduire la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{v}_e$.

3) Déterminer les expressions de l'accélération absolue $\overrightarrow{a}_a$ et de l'accélération relative $\overrightarrow{v}_r$.

4) Déduire la nature du mouvement du référentiel mobile R_1 par Rapport référentiel fixe R_0.

Solution de l'exerecice 5:

1) Les expressions de la vitesse absolue $\overrightarrow{v}(M/R_0) = \overrightarrow{v}_a$ et de la vitesse relative $\overrightarrow{v}(M/R_1) = \overrightarrow{v}_r$.

$$\overrightarrow{v}_a = \overrightarrow{v}(M/R_0) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}\right)_{R_0} = \frac{dx(t)}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{dy(t)}{dt}\overrightarrow{j} + \frac{dz(t)}{dt}\overrightarrow{k}.$$

$$\overrightarrow{v}_a = \overrightarrow{v}\,(M/R_0) = (2t+3)\,\overrightarrow{i} + \left(3t^2+5\right)\overrightarrow{j} + (2t+1)\,\overrightarrow{k}. \tag{27}$$

$$\overrightarrow{v}_r = \overrightarrow{v}\,(M/R_1) = \left(\frac{d\overrightarrow{O_0M}\,(t)}{dt}\right)_{R_1} = \frac{dx\,(t)}{dt}\overrightarrow{i}' + \frac{dy\,(t)}{dt}\overrightarrow{j}' + \frac{dz\,(t)}{dt}\overrightarrow{k}'$$

$$\overrightarrow{v}_r = \overrightarrow{v}\,(M/R_1) = (2t+3)\,\overrightarrow{i} + \left(3t^2+2\right)\overrightarrow{j} + (2t+1)\,\overrightarrow{k}. \tag{28}$$

2) La différence entre la vitesse absolue et la vitesse relative

$$\overrightarrow{v}_a - \overrightarrow{v}_r = 3\overrightarrow{j} \Rightarrow \overrightarrow{v}_a = 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{v}_r.$$

D'après la loi de composition des vitesses : $\overrightarrow{v}_a = \overrightarrow{v}_e + \overrightarrow{v}_r \Rightarrow \overrightarrow{v}_e = 3\overrightarrow{j}$.

3) Déterminer les expressions de l'accélération absolue $\overrightarrow{a}_a$ et de l'accélération relative $\overrightarrow{a}_r$

$$\overrightarrow{a}_a = \left(\frac{d\left[3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{v}_r\right]}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d\left(3\overrightarrow{j}\right)}{dt} \right)_{R_0} + \left(\frac{d\overrightarrow{v}_r}{dt} \right)_{R_0} = \overrightarrow{a}_r = 2\overrightarrow{i} + 6t\overrightarrow{j} + 2t\overrightarrow{k}.$$

4) La nature de mouvement du référentiel mobile R_1 par rapport au référentiel fixe R_0.

On a :

$\overrightarrow{v}_a - \overrightarrow{v}_r = 3\overrightarrow{j} \Rightarrow$ La trajectoire est rectiligne.

$\overrightarrow{a}_a = \overrightarrow{a}_r \Rightarrow$ Le mouvement est uniforme.

$\overrightarrow{\omega}\,(R_1/R_0) = \overrightarrow{0} \Rightarrow R_1$ est en translation par rapport R_0.

donc, R_1 est en translation rectiling uniforme par rapport à R_0.