Université de Jijel
Faculté des sciences et de la technologie
Les exerecices de Physique 1 pour 1 er année ST
TRAVAIL ET ÉNERGIE DU POINT MATÉRIEL

Exerecice 1:

Soit un point matreiel de masse m ce deplace de point $O\,(0,0)$ au point $A\,(1,1)$, sous l' effet d' une seule force $\overrightarrow{F}$, donnée par :
$\overrightarrow{F}=(x+y)\,\overrightarrow{i}+(x-y)\,\overrightarrow{j}$.

1/ Calculer le travail de la force $\overrightarrow{F}$ l'orsque le point materiel ce déplce de point O au A selon les différents chemins suivants :

a) Un segment $O\,(0,0)\rightarrow C\,(1,0)$ puit $C\,(1,0)\rightarrow A\,(1,1)$.

b) Un segment $O\,(0,0)\rightarrow B\,(0,1)$ puit $B\,(1,0)\rightarrow A\,(1,1)$.

c) La droite $y=x$.

d) La parabole $y=x^2$.

e) Le chemain fermer $O\,(0,0)\rightarrow C\,(1,0)\rightarrow\rightarrow A\,(1,1)\rightarrow B\,(1,0)\rightarrow O\,(0,0)$.

2/ Calculer le rotationnel de $\overrightarrow{F}$ c'est-a-dire $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{F}\right)$.

3/ Conclure.

4/ Déterminer l'énergie potentiel E_P, sachons que $E_P\,(0,0)=0$.

5/ À partir du théorème de l'énergie potentielle, déduire le travail de cette force entre le point $O\,(0,0)$ et $A\,(1,1)$.

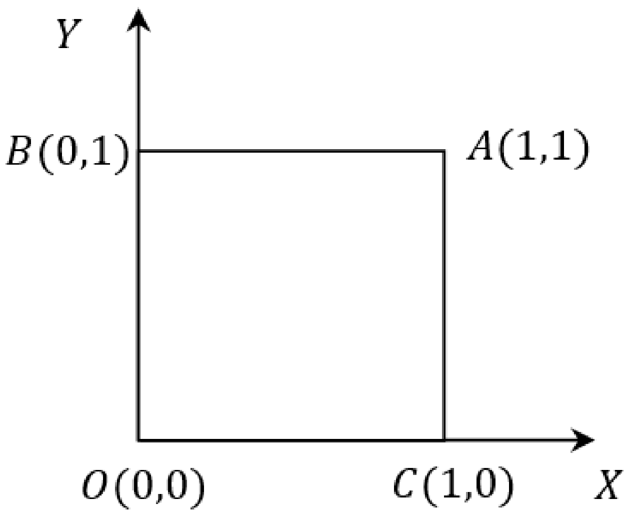

FIG. 1: Le travail de la force selon défferents chamains

Solution de l'Exerecice 01

1/ Le travail de la force $\overrightarrow{F}$ est donnée par la relation suivante :

$$W = \int \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{dl} = \int F_x dx + \int F_y dy = \int (x+y)\ dx + \int (x-y)\ dy.$$

a) Le segment $O(0,0) \to C(1,0)$ puit $C(1,0) \to A(1,1)$.

$$W_{OA} = W_{OC} + W_{CA}.$$

$W_{OC} =?$ $\ y = 0 \Rightarrow dy = 0,\ 0 \le x \le 1$, donc : $W_{OC} = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

$W_{CA} =?$ $\ x = 1 \Rightarrow dx = 0,\ 0 \le y \le 1$, donc : $W_{CA} = \int_0^1 (1-y)\ dy = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Finalement,

$$W_{OA} = W_{OC} + W_{CA} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\ (joule)\,.$$

b) Le segment $O(0,0) \to B(0,1)$ puit $B(0,1) \to A(1,1)$.

$$W_{OA} = W_{OB} + W_{BA}.$$

$W_{OB} =?$ $\ x = 0 \Rightarrow dx = 0,\ 0 \le y \le 1$, donc : $W_{OB} = -\int_0^1 y\,dy = -\frac{1}{2}$.

$W_{BA} =?$ $\ y = 1 \Rightarrow dy = 0,\ 0 \le x \le 1$, donc : $W_{BA} = \int_0^1 (x+1)\ dx = \frac{3}{2}$.

Finalement,

$$W_{OA} = W_{OB} + W_{BA} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1\ (joule)\,.$$

c) La droite $y = x \Rightarrow dy = dx$, donc : $W_{OA} = \int_0^1 2x\,dx = 1$.

d) La parabole $y = x^2 \Rightarrow dy = 2\,x\,dx$, donc :$W_{OA} = \int_0^1 \left(x + 3x^2 - 2x^3\right)\ dx = 1\,(joule)\,.$

e) Le chemain fermer $O(0,0) \to C(1,0) \to\to A(1,1) \to B(1,0) \to O(0,0)$.

$$W_{OO} = W_{OC} + W_{CA} + W_{AB} + W_{BO} = W_{OC} + W_{CA} - W_{BA} - W_{OB} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 0\ (joule)$$

2/ Le calcule de rotationnel de $\overrightarrow{F}$:

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_y & F_z \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_z \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \overrightarrow{k}\,.$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(\tfrac{\partial F_z}{\partial y} - \tfrac{\partial F_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} - \left(\tfrac{\partial F_z}{\partial x} - \tfrac{\partial F_x}{\partial z}\right)\overrightarrow{j} + \left(\tfrac{\partial F_y}{\partial x} - \tfrac{\partial F_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{k},$$
$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(-\tfrac{\partial(x-y)}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} - \left(-\tfrac{\partial(x+y)}{\partial z}\right)\overrightarrow{j} + \left(\tfrac{\partial(x-y)}{\partial x} - \tfrac{\partial(x+y)}{\partial y}\right)\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}.$$

3/ Puis que $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \Rightarrow$ la force $\overrightarrow{F}$ est conservative.

4/ La force $\overrightarrow{F}$ est dérivée d'une énergie potentielle E_p, donc :

$$F_x = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_y,\ F_y = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_x.$$

$$F_x = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_y \Rightarrow E_p(x,y) = -\int F_x\,dx = -\left(\frac{1}{2}x^2 + xy\right) + c(y). \quad (1)$$

La dérivée partielle de E_p par rappourt y est donné :

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z} = -x + \frac{dc(y)}{dy} \Rightarrow -\left(\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z} = x - \frac{dc(y)}{dy}.$$

Donc:

$$F_y = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z} = x - \frac{dc(y)}{dy} = x - y \Rightarrow -\frac{dc(y)}{dy} = -y \Rightarrow c(y) = \frac{1}{2}y^2 + c$$

On remplace dans la relation (1), on trouve :

$$E_p(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + c \quad (2)$$

On utilise la condition $E_P(0,0) = 0$ pour déterminer la constante c, on remplace dans la relation (2),on trouve : $E_p(0,0) = c = 0$.

Donc, l'expresion finale de l'énergie potentiel E_P est :

$$E_p(x,y) = \frac{1}{2}\left(y^2 - x^2\right) - xy \quad (3)$$

5/ d'apres le théorème de l'énergie potentielle, on a :

$$\Delta E_P = E_P\,(A) - E_P\,(O) = W_{OA}\left(\overrightarrow{F}^{c}\right). \tag{4}$$

$E_P\,(A) = -1$ et $E_P\,(O) = 0 \Rightarrow W_{OA}\left(\overrightarrow{F}^{c}\right) = 0 - (-1) = 1\ (joule)$.

Exerecice 2:

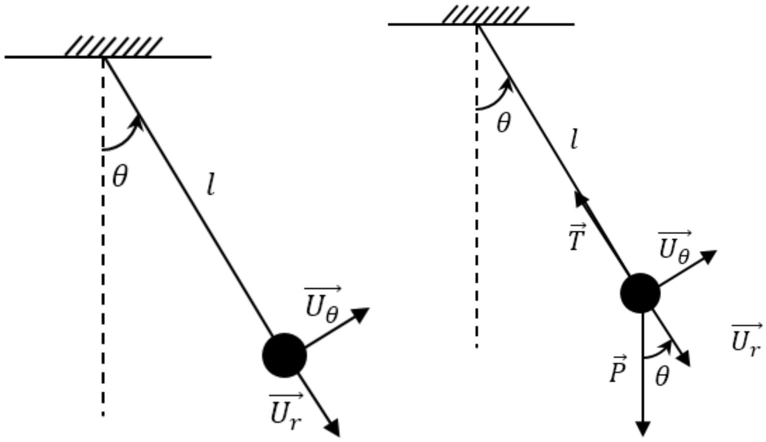

FIG. 2: Le pendule simple

Un pendule simple est constitué d'une petite boule de masse m suspendue à l'extrémité d'un fil de longueur l et de masse négligeable dont l'autre extrémité est fixe. On écarte le fil de sa position d'équilibre d'un angle θ et on abandonne le pendule sans vitesse initiale.

1) Représenter toutes les forces qui s'exercent sur la petite boule fixée au fil.

Donner l'expression d'énergie cinétique, potentiel et mécanique de la masse m.

2) Trouver l'équation différentielle du mouvement en utilisant le théorème de l'énergie mécanique.

3) Déterminer l'éxpression de la pulsation propre et la période des oscillations.

Solution de l'Exerecice 02

1) Le pendule est soumise à la tension du fil $\overrightarrow{T}$ qui ne travaille pas et à son poids $\overrightarrow{P}$ qui est une force conservatif.

L'expression d'énergie cinétique, potentiel et mécanique de la masse m :

L'exprision de l'énergie cinitique : $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\,l^2\,\dot{\theta}^2$.

L'exprision de l'énergie potentile :$E_{pp} = m\,g\,h = m\,g\,l\,(1 - cos\theta) = \frac{1}{2}m\,g\,l\,\theta^2$.

L'exprision de l'énergie mecanique : $E_m = \frac{1}{2}m\,l\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\,g\,l\,\theta^2$.

2) L'équation différentielle du mouvement :

On va dériver l'expression de l'énergie mécanique E_m pour obtenir l'équation du mouvement et que la dérivée d'une constante est nulle par ce que l'énergie mécanique est conservé . Par dérivation, on obtient :

$$\frac{dE_m}{dt} = m\,l^2\,\dot{\theta}\ddot{\theta} + m\,g\,l\,\theta\,\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta}\,(t) + \frac{g}{l}\,\theta\,(t) = 0 \tag{5}$$

L'équation (5) est une équation différentielle de deuxième ordre, sa solution est :

$$\theta\,(t) = \theta_0\,cos\,(\omega\,t + \phi)\,, \tag{6}$$

ou w la pulsation propre du mouvement en $(\frac{rad}{s})$ et ϕ est la phase initiale en (rad).

À partir de l'éxpression (6), nous pouvons déduire l'éxpression de la vitesse angulaire :

$$\dot{\theta}\,(t) = \frac{d\theta\,(t)}{dt} = -\theta_0\omega\,sin\,(\omega\,t + \phi) \tag{7}$$

L'accélération angulaire du mobile est donc :

$$\ddot{\theta}\,(t) = \frac{d\theta\,(t)}{dt} = -\theta_0\omega^2\,cos\,(\omega\,t + \phi) = \ddot{\theta}\,(t) = \frac{d\theta\,(t)}{dt} = -\omega^2\theta\,(t) \tag{8}$$

Donc, on trouve facilement que :

$$\ddot{\theta}\,(t) + \omega^2\theta\,(t) \;=\; 0. \tag{9}$$

Par comparaison entre l'équation (5) et (9), on trouve l'expression la pulsation propre et la période des oscillations :

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{10}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{11}$$

Exerecice 3:

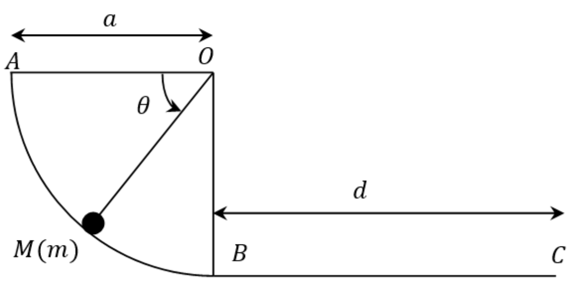

FIG. 3: La trajectoire de m

Une particule de masse m, initialement au repos au point A, cette particule glisse sans frottement sur la surface circulaire AB de rayon a.

1) Déterminer l'expréssien de travail du poids pour le déplacement de A à M.

2) Déterminer le travail de la force de contacte.

3) Déterminer l'énergie potentielle du poids E_{pp} de m au point M, sachant que $E_{pp}\ (B) = 0$.

4) Par l'utilisation de théorème de l'énergie cinétique déterminer l'énergie cinétique E_c au point M et déduire sa vitesse.

5) Déduire l'énergie mécanique E_m au point M.

6) La particule continue sa trajectoire sur une partie horizontale BC, ou il existe des frottements entre B et C, la particule s'arrête au point D a une distance $d = BD$ de B. Déterminer le coefficient de frottement cinétique μ_d.

Solution de l'Exerecice 03

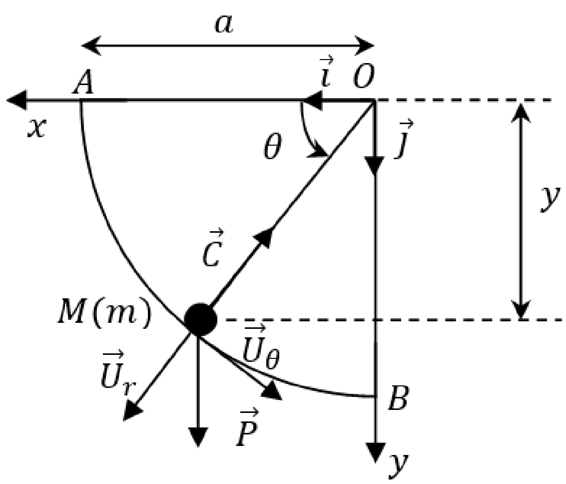

FIG. 4: Les forces agissant sur m à la surface circulaire AB

1) L'expréssien de travail du poids pour le déplacement de A à M :

$$W_{AM}\left(\overrightarrow{P}\right)=\int\overrightarrow{P}\bullet d\overrightarrow{r}=\int\left(mg\overrightarrow{j}\right)\bullet\left(dx\,\overrightarrow{i}+dy\,\overrightarrow{j}\right)=\int_{y_A}^{y_M}m\,g\,dy=mg\,a\,sin\theta.$$

2) Le travail de la force de contacte :

$$W_{AM}\left(\overrightarrow{C}\right)=\int\overrightarrow{C}\bullet d\overrightarrow{r}=\int\left(-C\overrightarrow{U}_r\right)\bullet\left(Rd\theta\,\overrightarrow{U}_\theta\right)=0.$$

3) L'énergie potentielle du poids E_{pp}:

$dE_{pp}=-dw\Longrightarrow E_{pp}=-mg\,a\,sin\theta+c.$ et on a la consition $E_{pp}\,(B)=0$, donc :

$E_{pp}\,(B)=-mg\,a\,sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+c=0\Longrightarrow c=mga.$

Donc, L'énergie potentielle du poids $E_{pp}=mga\,(1-sin\theta)\,.$

4) L'énergie cinétique E_c au point M et sa vitesse :

Le théorème de l'énergie cinétique entre le point A et M est : $\Delta E_c=\sum W_{AM}\left(\overrightarrow{F}_{ext}\right)$.

$$E_c\,(M)-E_c\,(A)=W_{AM}\left(\overrightarrow{P}\right)+W_{AM}\left(\overrightarrow{C}\right).$$

On a : $W_{AM}\left(\overrightarrow{C}\right)=0$ et $E_c\,(A)=0$.

Donc, on trouve : $E_c\,(M)=W_{AM}\left(\overrightarrow{P}\right)=mg\,a\,sin\theta.\Longrightarrow v_M=\sqrt{2g\,a\,sin\theta}.$

5) L'énergie mécanique E_m au point M :

$E_m\,(M)=E_C\,(M)+E_{PP}\,(M)=mga=cte.$

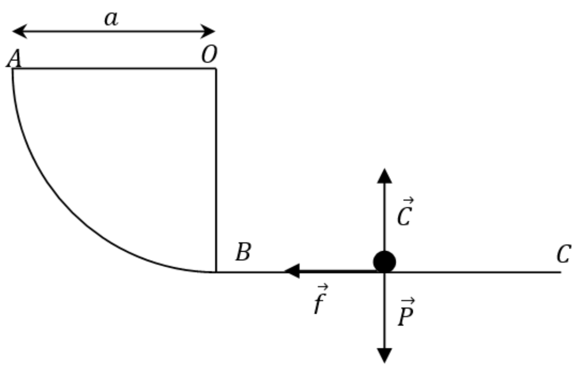

FIG. 5: Les forces agissant sur m à la partie horizontale BC

6) Le coefficient de frottement cinétique μ_d:

Par défintion

$$\mu_d=\frac{f_r}{C}=\frac{f_r}{P}\Longrightarrow f_r=\mu_d mg.$$

Le théorème de l'énergie cinétique entre le point B et D est : $\Delta E_c = \sum W_{BD}\left(\overrightarrow{F}_{ext}\right)$.

$$E_c\left(D\right) - E_c\left(B\right) = W_{BD}\left(\overrightarrow{P}\right) + W_{BD}\left(\overrightarrow{C}\right) + W_{BD}\left(\overrightarrow{f_r}\right).$$

On a : $W_{AM}\left(\overrightarrow{C}\right) = W_{BD}\left(\overrightarrow{P}\right) = 0$ et $E_c\left(D\right) = 0$.
Donc, on trouve :

$$-E_c\left(B\right) = W_{BD}\left(\overrightarrow{f_r}\right). \tag{12}$$

Donc, on doit calculer $E_c\left(B\right)$ et $W_{BD}\left(\overrightarrow{f_r}\right)$:
$E_c\left(B\right) = mg\,a$ par ce que $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$W_{BD}\left(\overrightarrow{f_r}\right) = \int \overrightarrow{f_r} \bullet d\overrightarrow{r} = \int_B^D \left(-f_r\,\overrightarrow{i}\right) \bullet \left(dx\,\overrightarrow{i} + dy\,\overrightarrow{j} + dz\,\overrightarrow{k}\right) = -\mu_d mg\,d.$$

On remlpace dans l'équation (12) , on trouve :

$$-mg\,R = -\mu_d mg\,d \Longrightarrow \mu_d = \frac{a}{d}.$$