

Les intégrales

I. Intégrales indéfinies, propriétés.

Def ① Primitive.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On appelle primitive de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x \in I; \quad F'(x) = f(x).$$

Exemple : $f(x) = x^4$

$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $F(x) = \frac{1}{5} x^5$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Proposition ① Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert et admet une primitive sur I . Alors.

- 1- f admet une infinité de primitive sur I .
- 2- Si F est une primitive de f sur I , alors toute fonction G définie et dérivable sur I vérifiant

$$G(x) = F(x) + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

est aussi une primitive de f .

Définition ②

L'ensemble des primitives d'une fonction f est appelé intégrale indéfinie et on pose

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Exemples

① $\int x^4 dx = \frac{1}{5} x^5 + C$ est l'intégrale indéfinie de $x \mapsto x^4$ sur $\mathbb{R}$

② $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$ est l'intégrale indéfinie de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$

Théorème

Toute fonction continue admet une primitive

Propriétés de l'intégrale indéfinie.

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes.

① $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$

② $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx.$

③ $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$

④ $\int f'(x) dx = f(x) + c.$

II Méthodes de calcul d'une intégrale

1° Méthode directe. $\int f'(x) dx = f(x) + c.$

Exemples :

① $\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \int 2 \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(2x) + c.$

② $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx = e^{x^2} + c.$

③ $\int (\sin x + x^2 + 1) dx = -\cos x + \frac{1}{3} x^3 + x + c$

2° Méthode de changement de variable

Soient $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: I \rightarrow J$ deux fonctions avec $I = [a, b]$ et $J = [\alpha, \beta]$, f continue sur J et g dérivable sur I

Si F est une primitive de f sur J , alors

$$\int_{\text{sur } I} g'(x) f(g(x)) dx = \int [F(g(x))]' dx = F(g(x)) + c.$$

Exemples.

$$① \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Posons $t = 1+x^2$.
Alors $dt = 2x dx$.

D'où

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{\sqrt{1+t}} = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C.$$
$$= \sqrt{1+x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$② \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$\text{On a } \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}.$$

Par suite

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}$$

$$\text{Posons } t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \quad \text{et } e^{2x} = t^2.$$

$$\text{Ainsi } \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan(t) + C$$
$$= \arctan(e^x) + C.$$

39. Méthode de l'intégration par parties.

Proposition Soit f et g deux fonctions dérivables et
à dérivées continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. on a.

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$$

$$(\text{D'après } (fg)' = f'g + fg').$$

$$\text{Exemple: } \int x e^{-2x} dx$$

$$\text{Posons } \left. \begin{array}{l} f(x) = x \\ \text{et } g'(x) = e^{-2x} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f'(x) = 1 \\ g(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{array} \right.$$

$$\text{Donc } \int x e^{-2x} dx = -\frac{x}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -\frac{x}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) + C$$
$$= -\frac{x}{2} e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C$$

III Intégration des fonctions rationnelles.

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes avec $d \equiv P = n$
et $d \equiv Q = m$ soit la fonction rationnelle $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Pour intégrer f deux cas se présentent
si $d \equiv P < d \equiv Q$ ($n < m$). on décompose f en éléments
simples.

si $d \equiv P \geq d \equiv Q$ on fait la division euclidienne de P par Q
on obtient

$$f(x) = N(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

avec $N(x)$ un polynôme de degré $n-m$
et $R(x)$ un polynôme de degré $< d \equiv Q$.

Par suite $\int f(x) dx = \int N(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$.

(on décompose $\frac{R(x)}{Q(x)}$ en éléments simples).

Exemples (Pour expliquer la méthode)

① $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$. On décompose en élément simples

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad ; \quad \Delta = 9 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{matrix} \quad \text{dont les deux racines de } x^2 + x - 2.$$

Par suite $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$.

$$\text{et } f(x) = \frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-1}$$

on cherche les valeurs de a et b .

On multiplie $f(x)$ par $(x+2)$ puis on pose $x = -2$

$$(x+2)f(x) = \frac{1}{x-1} = a + \frac{b(x+2)}{x-1}$$

$$x = -2 \Rightarrow \frac{1}{-3} = a \Rightarrow \boxed{a = -1/3}$$

On multiplie $f(x)$ par $x-1$ et on prend $x = 1$.

$$(x-1)f(x) = \frac{1}{x+2} = \frac{a(x-1)}{x+2} + b$$

$$x = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{3} = b} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3} \frac{1}{x+2} + \frac{1}{3} \frac{1}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \frac{1}{x+2}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \int f(x) dx &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+2} \\ &= \frac{1}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{3} \ln |x+2| + C \\ &= \frac{1}{3} [\ln |x-1| - \ln |x+2|] + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C. \end{aligned}$$

(20) $g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 5x + 6}$ (on fait division euclidienne).
ou bien

$$\begin{aligned} &= \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 6} + \frac{5x - 6}{x^2 - 5x + 6} \\ &= 1 + \frac{5x - 6}{x^2 - 5x + 6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int g(x) dx &= \int dx + \int \frac{5x - 6}{x^2 - 5x + 6} dx \\ &= x + \int \frac{5x - 6}{x^2 - 5x + 6} dx \end{aligned}$$

On décompose $\frac{5x - 6}{x^2 - 5x + 6}$ en éléments simples.

$$\Delta = 25 - 24 = 1 \quad x_1 = \frac{5-1}{2} = 2.$$

$$x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$\text{et } (x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)).$$

$$\text{Par suite } \frac{5x - 6}{x^2 - 5x + 6} = \frac{5x - 6}{(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3}$$

Détermination de a et b.

On multiplie par $(x-2)$ et on prend $x=2$.

$$\frac{(5x-6)(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{5x-6}{x-3} = \frac{a(x-2)}{x-2} + \frac{b(x-2)}{x-3} = a + \frac{b(x-2)}{x-3}$$

$$x=2 \Rightarrow \boxed{a = -4}$$

On multiplie par $(x-3)$ et on prend $x=3$.

$$\frac{5x-6}{x-2} = \frac{a(x-3)}{x-2} + b \quad \text{et } x=3 \Rightarrow b=9$$

$$\text{D'où } \frac{5x-6}{x^2-5x+6} = -\frac{4}{x-2} + \frac{9}{x-3}$$

$$\text{et } \int \frac{5x-6}{x^2-5x+6} dx = -4 \int \frac{dx}{x-2} + 9 \int \frac{dx}{x-3} = -4 \ln |x-2| + 9 \ln |x-3| + C$$

En fin

$$\int g(x) dx = x - 4 \ln |x-2| + 9 \ln |x-3| + C$$

$$3^o) h(x) = \frac{2x-1}{x(x-1)^2}$$

$$x(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ et } x=1$$

$x=1$ est une racine double alors la décomposition en éléments simples se fait de la manière suivante.

$$h(x) = \frac{2x-1}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

Détermination de a : on multiplie h par x puis on prend $x=0$

$$x h(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2} = a + \frac{bx}{x-1} + \frac{cx}{(x-1)^2}$$

$$\text{puis } x=0 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

Détermination de c : on multiplie par $(x-1)^2$ puis on prend $x=1$

$$\begin{aligned} (x-1)^2 h(x) &= \frac{2x-1}{x} = \frac{a(x-1)^2}{x} + \frac{b(x-1)^2}{x-1} + c \\ &= \frac{a(x-1)^2}{x} + b(x-1) + c \end{aligned}$$

$$x=1 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

Il reste à déterminer b .

On multiplie $h(x)$ par $(x-1)$ puis on prend la limite $x \rightarrow +\infty$

$$(x-1) h(x) = \frac{(2x-1)(x-1)}{x(x-1)^2} = \frac{a(x-1)}{x} + b + \frac{c(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x-1}{x^2-x} = \frac{2x-1}{x} + b + \frac{c}{x-1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x^2-x} = 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x-1}{x} + b + \frac{c}{x-1} \right] = a+b \end{aligned}$$

$$\text{Donc } a+b=0 \Rightarrow b = -a = 1$$

$$\text{Ainsi } h(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } \int h(t) dt &= - \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t-1} + \int \frac{dt}{(t-1)^2} \\
 &= -\ln |t| + \ln |t-1| - \frac{1}{t-1} + C \\
 &= \ln \left| \frac{t-1}{t} \right| - \frac{1}{t-1} + C.
 \end{aligned}$$

$$(4) \int \frac{5x^2 - 2x + 3}{(x^2+1)(x-1)} dx. \quad (x^2+1 > 0 \text{ n'est jamais nul})$$

Décomposition en élément simple. ($d = P \wedge d' \neq 0$).

$$\frac{5x^2 - 2x + 3}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

* On multiplie par $(x-1)$ et on prend $x=1$

$$\left. \frac{5x^2 - 2x + 3}{x^2+1} \right|_{x=1} = A + \left. \frac{(Bx+C)(x-1)}{x^2+1} \right|_{x=1}.$$

$$\Rightarrow A = \frac{6}{2} = 3 \quad \boxed{A=3}$$

* On pose $x=0$ on obtient $\frac{3}{-1} = -A + C \Rightarrow C = A - 3 = 0$.

$$\boxed{C=0}.$$

* On multiplie par x puis on prend la limite en $+\infty$.

$$\frac{5x^3 - 2x^2 + 3x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax}{x-1} + \frac{Bx^2+Cx}{x^2+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{5x^3 - 2x^2 + 3x}{x^3 - x^2 + x - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{Ax}{x-1} + \frac{Bx^2+Cx}{x^2+1} \right]$$

$$\text{Alors, } 5 = A + B \Rightarrow B = 5 - A = 5 - 3 = 2$$

$$\boxed{B=2}.$$

$$\text{et } \frac{5x^2 - 2x + 3}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{3}{x-1} + \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ainsi } \int \frac{5x^2 - 2x + 3}{(x^2+1)(x-1)} dx &= \int \frac{3dx}{x-1} + \int \frac{2x dx}{x^2+1} \\
 &= 3 \ln |x-1| + \ln |x^2+1| + C
 \end{aligned}$$