Spécialités :
Electrotechnique
Electromécanique
Automatique
Génie des procédés

Le 16/12/2021

INTERROGATION ÉCRITE
MATIÈRE MATHÉMATIQUE 3

Exercice1 (6pts) : Intégrales Doubles

A- Tracer les domaines suivants :

$$D_1 = \{(x,y)| \ \ 0 \leq x \leq 1 \ , \ \ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$
$$D_2 = \{(x,y)| \ \ 0{,}5 \leq x \leq 1 \ , \ \ ln(x) \leq y \leq 1 - x\}$$
$$D_3 = \{(x,y)| \ \ 0{,}25 \leq y \leq 1 \ , \ \ x^4 \leq y \leq \ x^2\}$$
$$D_4 = \{(x,y)| \ \ x \geq 0 \ \ et \ \ y \geq 0 \ , \ \ a^2 - x^2 \leq y^2 \leq \ \ b^2 - x^2\}$$

B- Calculer les intégrales doubles suivantes :

$$I_1 = \iint_{D_1} (x+y)\, dx\, dy$$

$$I_2 = \iint_{D_4} (x^2+y^2)\, dx\, dy$$

$$I_3 = \iint_{D_2} e^y\, dx\, dy$$

Exercice2 (4pts) : Séries Numériques

Vérifier à l'aide de l'un des critères de Cauchy, de D'Alembert ou de Riemann, la convergence ou la divergence des séries de termes généraux suivants :

$$U_n = \frac{n+1}{n^3-7}$$
$$U_n = \frac{n!}{2^n}$$
$$U_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$
$$U_n = \left(sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$
$$U_n = \left(sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

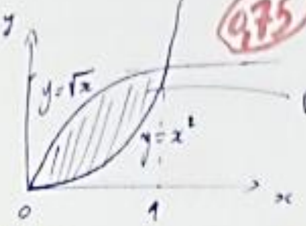
Interrogation de Math 3 — le 16-12-2021

Corrigé

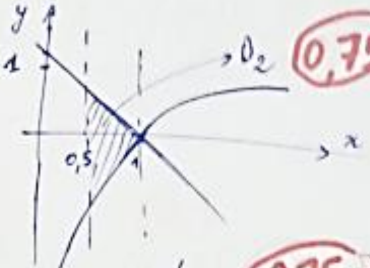
Exercice 1 06 pts

A- traçage des domaines

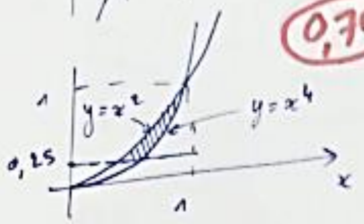
$D_1=\{(x,y)/\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le\sqrt{x}\}$ 0,75



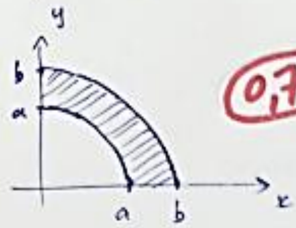
$D_2=\{(x,y)/\ 0,5\le x\le 1,\ \ln(x)\le y\le 1-x\}$ 0,75



$D_3=\{(x,y)/\ 0,25\le y\le 1,\ x^4\le y\le x^2\}$ 0,75



$D_4=\{(x,y)/\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ a^2-x^2\le y^2\le b^2-x^2\}$ 0,75



B: Calcul des intégrales doubles

$$I_1=\iint_{D_1}(x+y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x+y)\,dy\,dx \quad 0,5 \quad =\int_0^1\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx \quad 0,25$$

$$=\int_0^1 x^{\frac32}+\frac{x}{2}-x^3-\frac{x^4}{2}\,dx \quad 0,25 \quad =\left[\frac25x^{\frac52}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\right]_0^1=\frac25+\frac14-\frac14-\frac1{10}=\boxed{\frac12} \quad 0,25$$

$$I_2=\iint_{D_4}(x^2+y^2)\,dx\,dy \xrightarrow{\text{Jacobien}} I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_a^b\rho^2\rho\,d\rho\,d\theta \quad 0,5 \quad =\frac{\rho^4}{4}\Big|_a^b\frac{\pi}{2}=\boxed{\frac{\pi}{8}(b^4-a^4)} \quad 0,25$$

$$I_3=\iint_{D_2}e^y\,dx\,dy=\int_{0,5}^1\int_{\ln(x)}^{1-x}e^y\,dy\,dx \quad 0,5 \quad =\int_{0,5}^1 e^y\Big|_{\ln(x)}^{1-x}dx=\int_{0,5}^1\left(e^{1-x}-x\right)dx \quad 0,25 \quad =-e^{1-x}-\frac{x^2}{2}\Big|_{0,5}^1 \quad 0,25$$

$$=-1-\frac12+e^{\frac12}+\frac14=\boxed{e^{\frac12}-\frac54}$$

...ice 2 4 pts

...nvergence des séries numériques

1) $U_n = \frac{n+1}{n^3-7} \simeq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ série de Riemann avec $\alpha = 2$

0,5 alors la série est convergente

2) $U_n = \frac{n!}{2^n}$

0,5

d'après le critère de d'Alembert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n!}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2}\right) = +\infty$ Divergente

0,5

3) $U_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

0,5

d'après le critère de Cauchy $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1$

0,5

la série est convergente

4) $U_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$

0,5

utilisant Cauchy $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0 < 1$

0,5

la série est convergente

5) $U_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2}$ Série de Rieman Convergente avec $\alpha = 2$

0,5