Examen de Mathématique 3

Exercice 1 (intégrales doubles 5pts)

Calculer les intégrales doubles suivantes :

$$\iint_{\pi^2<x^2+y^2\leq 4\pi^2} sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\ dx\, dy$$

$$\iint_{\substack{x,y\geq 0\\ x^2+y^2\leq 1}} (4-x^2-y^2)\ dx\, dy$$

$$\iint_{\Delta} |y-x^2| d\Delta \quad avec \quad \Delta = \left\{(x,y) \middle| \quad 0\leq x\leq 1, \quad 0\leq y\leq \sqrt{x}\right\}$$

Exercice 2 (intégrales impropres 5pts)

Étudier la nature des intégrales suivantes, puis calculer celles qui sont convergentes

$$\int_0^1 \frac{x}{(1-x)^2}\, dx \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} \qquad \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

Exercice 3 (convergence des suites numériques 5pts)

Par le critère de d'Alembert ou de Cauchy, Étudier la convergence des suites numériques suivantes :

$$x_n = \frac{a^n}{n^n}\ ,\ pour \quad a\in \mathbb{R}$$

$$z_n = \frac{z^n n^3}{n!}\ ,\ pour \quad z\in \mathbb{C} \qquad\qquad t_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

Exercice 4 (Equations différentielles 5pts)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$x\, y' - y = x^3 \quad avec \quad y(0) = 5$$

$$cos(t)\frac{dy}{dt} + sin(t)\ y = 1$$

$$2y'' + 5y' + 2y = 0 \quad avec \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 0$$

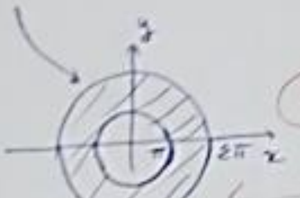
Examen de Mathématique 3

Corrigé type

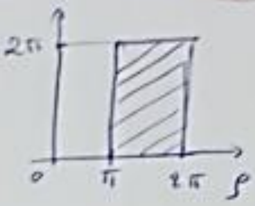
15 pts

Exo 1 Calcul des intégrales doubles

$$\iint_{\pi^2 < x^2+y^2 \le 4\pi^2} \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy \xrightarrow[\text{Jacobien}]{} \int_0^{2\pi}\int_\pi^{2\pi} \sin(\rho)\,\rho\, d\rho\, d\theta \quad (0{,}5)$$



(0,25) $\equiv$

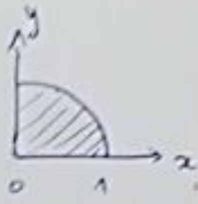


$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

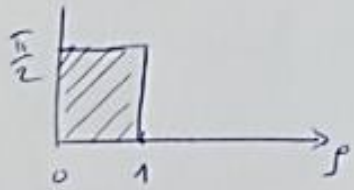
$$\theta\Big]_0^{2\pi} = 2\pi \int_\pi^{2\pi} \rho \sin(\rho)\, d\rho \;(0{,}25) = 2\pi\left[\left(-\cos(\rho)\rho\right)_\pi^{2\pi} - \int_\pi^{2\pi} -\cos(\rho)\, d\rho\right] \quad (0{,}25)$$

$$= 2\pi\left[(-2\pi - \pi) \;(0{,}25) + \cancel{\sin(\rho)}\Big|_\pi^{2\pi}\right] = \boxed{-6\pi^2}$$

$$\iint_{\substack{x,y\ge 0\\ x^2+y^2\le 1}} (4 - x^2 - y^2)\, dx\,dy \xrightarrow[\text{Jacobien}]{} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (4-\rho^2)\rho\, d\rho\, d\theta \quad (0{,}5)$$

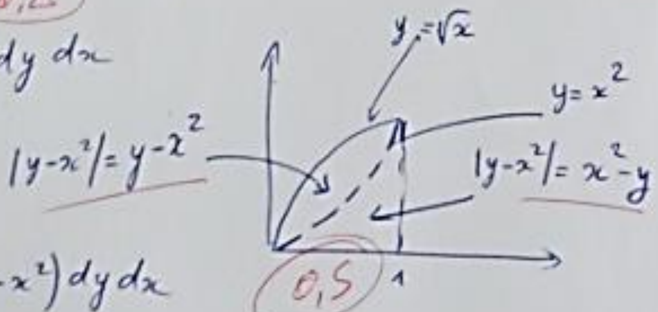


(0,25) $\equiv$



$$= \theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\int_0^1 (4\rho - \rho^3)\, d\rho\right] \;(0{,}25) = \frac{\pi}{2}\left[2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \;(0{,}25) = \frac{\pi}{2}\left[2 - \frac{1}{4}\right] = \boxed{\frac{7\pi}{8}} \quad (0{,}25)$$

$$\iint_D |y - x^2|\, d\sigma = \int_0^1\int_0^{\sqrt{x}} |y - x^2|\, dy\, dx \quad (0{,}25)$$



(0,5)

$$= \int_0^1\int_0^{x^2} (x^2 - y)\, dy\, dx + \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (y - x^2)\, dy\, dx \quad (0{,}25)$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2} dx + \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} - x^2 y\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \Big) \quad 0,25$$

$$= \int_0^1 \left(x^4 - \frac{x^4}{2} + \frac{x}{2} - x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^4}{2} + x^4\right) dx$$

0,25

$$= \int_0^1 2x^4 - x^4 - x^{5/2} + \frac{x}{2}\, dx = \int_0^1 \left(x^4 - x^{5/2} + \frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{23}{140}} \quad 0,25$$

0,25

EXERCICE 2 5pts

$\int_0^1 \frac{x}{(1-x)^2}\, dx \longrightarrow$ il y'a indétermination à la valeur 1 d'après Riemann $\frac{1}{x^{\alpha=1}}$ 0,5 l'intégrale est Divergente 0,5

$\int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} \longrightarrow$ la même chose que la première Intégrale 0,5 Riemann $\alpha=2$ Divergente 0,5

$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \longrightarrow$ à $+\infty$ ~~elle~~ est de type $\int \frac{1}{x^2}$, $\alpha = 2$ 0,5 d'après Riemann, l'intégrale est Convergente 0,5

Solution de l'intégrale $\longrightarrow$ TD (changement de variable $x \to \tan\theta$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int_{\arctg(0)}^{\arctg(+\infty)} \frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}(1+\tan^2\theta)\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\, d\theta$$

0,25 0,25 0,25

0,5 0,5

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{= \frac{\pi}{4}} \quad 0,25$$

EXERCICE 3 5pts Critères de Cauchy ou d'Alembert

1) $x_n = \frac{a^n}{n^n}$; d'après Cauchy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n} = 0 < 1$ 0,5 0,5 0,5

convergente

2) $z_n = \frac{2^n n^3}{n!}$; d'après d'Alembert $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)^3}{(n+1)!\, 2^n n^3} n!$ 0,5 0,5

$\lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)^2}{n^3} = \frac{2}{n} = 0 < 1$ 0,5

convergent 0,5

3) $t_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, d'après Cauchy $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ 0,5 0,5

$= \frac{1}{e} < 1$

convergente 0,5

EXERCICE 4 5pts (Equations Différentielles)

1) $xy' - y = x^3$ avec $y(0) = 5$

$y' - \frac{y}{x} = x^2$ 0,25 $\Rightarrow a(x) = -\frac{1}{x}$ 0,25 alors $A(x) = \int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln(x)$ 0,25

$y(x) = y_0 e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_0^x b(x) e^{A(x)} dx$ 0,25 $= 5e^{+\ln(x)} + e^{\ln(x)} \int_0^x x^2 e^{-\ln(x)} dx$ 0,25

$= 5x + x \int_0^x \frac{x^2}{x} dx = 5x + x\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x = \boxed{5x + \frac{x^3}{2} = y(x)}$ 0,25

---

2) $\cos(t)\, y' + \sin(t)\, y = 1$

$y' + \tan(t)\, y = \frac{1}{\cos(t)}$ 0,25 ; $A(t) = \tan(t) \Rightarrow A(t) = \int \tan(t)\, dt$ 0,25

$= \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)} dt = \boxed{-\ln(\cos(t))}$ $A(t)$ 0,25

$y(t) = y_0 e^{\ln(\cos(t))} + e^{\ln(\cos(t))} \int_0^t \frac{1}{\cos(t)} e^{-\ln(\cos(t))} dt$ 0,25

$$y(t) = y_0 \cos(t) + \cos(t) \int_0^t \frac{1}{\cos^2(t)} dt = y_0 \cos(t) + \cos(t) \left(\tan(t)\right)_0^t$$

0,25

$$y(t) = y_0 \cos(t) + \cos(t) \tan(t) = \boxed{y_0 \cos(t) + \sin(t) = y(t)}$$

0,25

3) $2y'' + 5y' + 2y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 1$

l'équation caractéristique $\quad 2r^2 + 5r + 2 = 0$ 0,25

$\Delta = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3 \quad \begin{cases} r_2 = \frac{-5-3}{4} = -2 & 0{,}25 \\ r_1 = -\frac{5+3}{4} = -\frac{1}{2} & 0{,}25 \end{cases}$

donc $\quad y(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-2x}$ 0,25

avec les conditions initiales

0,25 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ -\frac{C_1}{2} - 2C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{8}{3} \\ C_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$ 0,25

donc la solution finale

$$\boxed{y(x) = \frac{8}{3} e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{2}{3} e^{-2x}}$$

0,5