Université Mohammed Seddik Benyahia, Jijel

Faculté des Sciences et de la Technologie
Filières :
- Electrotechnique
- Automatique

Examen de Math 3

Exercice 1 : Intégrales doubles (6 pts)

a) Calculer l'intégrale double suivante $\iint_D f(x,y)dxdy$, avec

1. $f(x,y) = x$ et $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0,\ x - y + 1 \geq 0,\ x + 2y - 4 \leq 0\right\}$.
2. $f(x,y) = x + y$ et $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1;\ x^2 \leq y \leq x\right\}$.
3. $f(x,y) = \cos(xy)$ et $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq xy \leq \frac{\pi}{2}\right\}$.

b) Soit D le domaine :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ -1 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq y \leq 4 - x^3\right\}.$$

Calculer l'aire de D.

Exercice 2 : Intégrales triples (4 pts)

Calculer les intégrales triples suivantes définies par les domaines D_1 et D_2

- $f(x,y,z) = 4x^2 + y + z \qquad D_1 = \{(x,y,z) | 0 \leq x \leq 2,\ x \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq y^2\}$
- $f(x,y,z) = x - y \qquad D_2 = \{(x,y,z) | 0 \leq x \leq 2,\ -x^2 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 2\}$

Exercice 3 : Jacobien (6 pts)

Calculer en utilisant le Jacobien en coordonnées polaire

a)

$$\iint_\Delta \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy$$

où $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 < x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

b) Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\right\}$.

1. Montrer que D est un disque.
2. Calculer $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$.

Exercice 4 : Suites numériques et séries de fonction (4 pts)

Etudier la convergence des séries suivantes

$u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} (n \geq 2)$ $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} (n \geq 1)$	$u_n = \frac{x^n}{n!}\ (x \in \mathbb{R}_+^*)$ $d_n = \frac{n!\, n^n}{(2n)!}$.
Règle de Cauchy	**Règle de d'Alembert**

Corrigé Examen MATH 3

EXO1 $\boxed{\text{6 PTS}}$

1. Si $(x, y) \in D$, on a $y \geq 0$ et

$$y - 1 \leq x \leq 4 - 2y. \quad \boxed{0.25}$$

D'autre part, pour que cette inégalité ait un sens, on doit avoir

$$y - 1 \leq 4 - 2y \implies y \leq 5/3, \quad \boxed{0.25}$$

et donc on a l'inégalité $0 \leq y \leq 5/3$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)dxdy &= \int_0^{5/3} \int_{y-1}^{4-2y} xdx \quad \boxed{0.5} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{5/3} \left((4-2y)^2 - (y-1)^2\right) dy \quad \boxed{0.25} \\
&= \frac{275}{54}. \quad \boxed{0.25}
\end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x+y)dydx \quad \boxed{0.5} \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x} dx \quad \boxed{0.5} \\
&= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}\right) dx \quad \boxed{0.25} \\
&= \frac{3}{20}. \quad \boxed{0.25}
\end{aligned}$$

3. On déduit de la définition de D l'inégalité $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2x}$, et on obtient :

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)dxdy &= \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2x}} \cos(xy)dydx \quad \boxed{0.5} \\
&= \int_1^2 \left[\frac{1}{x}\sin(xy)\right]_0^{\frac{\pi}{2x}} dx \quad \boxed{0.5} \\
&= \int_1^2 \frac{1}{x}dx \quad \boxed{0.25} \\
&= \ln(2). \quad \boxed{0.25}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\text{aire }(D) &= \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{4-x^3} dydx \quad \boxed{0.5} \\
&= \int_{-1}^{1} \left(4 - x^3 - x^2\right) dx \quad \boxed{0.5} \\
&= \left[4x - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} \quad \boxed{0.25} \\
&= \frac{22}{3}. \quad \boxed{0.25}
\end{aligned}$$

EXO2 4 PTS

- $D_6 = \{(x,y,z) | 0 \le x \le 2,\ \ x \le y \le 2,\ \ 0 \le z \le y^2\}$

0.5 0.25

$$I_4 = \int_0^2 \int_x^2 \int_0^{y^2} (\,4x^2 + y + z)dzdydx = \int_0^2 \int_x^2 \left[4x^2 z + yz + \frac{z^2}{2}\right]_0^{y^2} dydx$$

0.25

$$I_4 = \int_0^2 \int_x^2 \left(4x^2y^2 + y^3 + \frac{y^4}{2}\right) dydx = \int_0^2 \left[\frac{4x^2y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{10}\right]_x^2 dx$$ 0.25

$$I_4 = \int_0^2 \left[\frac{32x^2}{3} + 4 + \frac{16}{5} - \frac{4x^5}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right] dx = \int_0^2 \left[-\frac{43x^5}{30} - \frac{x^4}{4} + \frac{32x^2}{3} + \frac{36}{5}\right] dx$$ 0.25

0.25 $$I_4 = \left[-\frac{43x^6}{180} - \frac{x^5}{20} + \frac{32x^3}{9} + \frac{36x}{5}\right]_0^2 = \left[-\frac{43 \times 64}{180} - \frac{32}{20} + \frac{256}{9} + \frac{72}{5}\right]$$

$$= \left[-\frac{688}{45} - \frac{72}{45} + \frac{1280}{45} + \frac{648}{45}\right] = \frac{1168}{45}$$ 0.25

- $D_7 = \{(x,y,z) | 0 \le x \le 2,\ \ -x^2 \le y \le 2,\ \ 0 \le z \le 2\}$

0.5 0.25

$$I_5 = \int_0^2 \int_{-x^2}^2 \int_0^2 (\,x - y)dzdydx = \int_0^2 \int_{-x^2}^2 [(\,x - y)z]_0^2 dydx$$

0.5

$$I_5 = \int_0^2 \left[2\left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\right]_{-x^2}^2 dx = 2\int_0^2 \left(2x - 2 + x^3 + \frac{x^4}{2}\right) dx$$ 0.25

$$I_5 = \left[2x^2 - 4x + \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{72}{5}$$ 0.25

0.25

EXO3 6 PTS

0.25 0.25

a) On passe en coordonnées polaires en posant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Remarquons que :

$$(x,y) \in \Delta \iff 0 \le r \le 1 \text{ et } \theta \in [0, \pi/2].$$ 0.5

0.5

D'autre part, $1 + x^2 + y^2 = 1 + r^2$. La formule de changement de variables en coordonnées polaires donne donc :

0.25

$$I = \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{r}{1+r^2} d\theta dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{2r}{1+r^2} dr = \frac{\pi}{4} \left[\ln(1+r^2)\right]_0^1 = \frac{\pi \ln 2}{4}.$$

0.5 0.25 0.25 0.25

b

1. On a : $\boxed{0.5}$

$$x^2+y^2-2x=(x-1)^2+y^2-1$$

et donc $\boxed{0.5}$

$$x^2+y^2-2x\leq 0 \iff (x-1)^2+y^2\leq 1.$$

$\boxed{0.25}$ D est le disque de centre $(1,0)$ et de rayon 1.

2. On passe en coordonnées polaires, avec $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$. L'équation du disque donne :

$$\boxed{0.25}\ r^2-2r\cos\theta\leq 0 \implies 0\leq r\leq 2\cos\theta,$$

tandis que θ varie dans $[-\pi/2,\pi/2]$ (impératif pour que $\cos(\theta)$ soit positif). La formule de changement de variables donne donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2}\int_{r=0}^{r=2\cos\theta} r^2 dr d\theta \quad \boxed{0.5}\\ &= \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta d\theta. \quad \boxed{0.5}\end{aligned}$$

Il reste à linéariser $\cos^3\theta$, ce que l'on fait en utilisant les nombres complexes :

$$\cos^3\theta=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta. \quad \boxed{0.25}$$

On achève le calcul sans difficultés pour trouver :

$$I=\frac{32}{9}. \quad \boxed{0.25}$$

<u>EXO4</u> $\boxed{4\ \text{PTS}}$

On a : $\sqrt[n]{u_n}=\frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n}=\frac{\exp\frac{(\ln n)^2}{n}}{\ln n}$ $\boxed{0.25}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(\ln n)^2}{n}=0$ $\boxed{0.25}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=0$ $\boxed{0.25}$. La série est convergente. $\boxed{0.25}$

On a : $\sqrt[n]{u_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$. $\boxed{0.25}$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{e}<1$ $\boxed{0.25}$ $\boxed{0.25}$. La série est convergente. $\boxed{0.25}$

Il s'agit d'une série à termes tous strictement positifs. On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n}=\frac{x}{n+1}$ $\boxed{0.25}$. On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1$. $\boxed{0.25}$ $\boxed{0.25}$

La série est convergente (on retrouve le fait que le terme général $u_n=\frac{x^n}{n!}(x\in\mathbb{R}_+^*)$ tend vers 0). $\boxed{0.25}$

$$\frac{d_{n+1}}{d_n}=\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{4}<1 \text{ donc } \sum_{n\geq 1} d_n \text{ converge.} \quad \boxed{0.25}$$

$\boxed{0.25}$ $\boxed{0.25}$ $\boxed{0.25}$