

Théorème 4.5.25 (inversion d'une fonction) Une fonction f continue et strictement monotone d'un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est bijective de I dans $f(I)$ et sa fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ existe, elle est continue et suit la monotonie de f .

Preuve :

f est surjective de I sur $f(I)$, et comme f est strictement monotone alors f est injective donc bijective sur $f(I)$, alors f^{-1} existe et elle suit la monotonie de f ; en effet, on suppose que f est strictement croissante et soient $y_1, y_2 \in f(I)$; tel que $y_1 < y_2$, alors

$$y_1 \neq y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2),$$

car f^{-1} est injective aussi; d'où

$$\exists x_1, x_2 \in I; \text{ tels que } f^{-1}(y_1) = x_1, f^{-1}(y_2) = x_2$$

donc $x_1 \neq x_2$. On suppose par l'absurde que $x_1 > x_2$ alors comme f est strictement croissante $f(x_1) > f(x_2)$, ce qui est absurde car $y_1 < y_2$, donc

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2),$$

d'où f^{-1} est strictement croissante.

Comme f est continue sur I alors $f(I)$ est un intervalle, or f^{-1} existe d'où $f^{-1}(f(I)) = I$ est un intervalle donc f^{-1} est continue.

□

4.6 Fonctions trigonométriques inverses

4.6.1 Fonction arcsin

$$\begin{aligned} f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto f(x) = \sin x \end{aligned}$$

f est continue, strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors f est bijective et donc f^{-1} existe, est continue et strictement croissante, et on a $f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$ et

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y &\mapsto f^{-1}(y) = \arcsin y \end{aligned}$$

d'où on a :

$$\left(\begin{array}{l} \arcsin y = x \\ -1 \leq y \leq 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \sin x = y \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right)$$

voir figure 4.1.

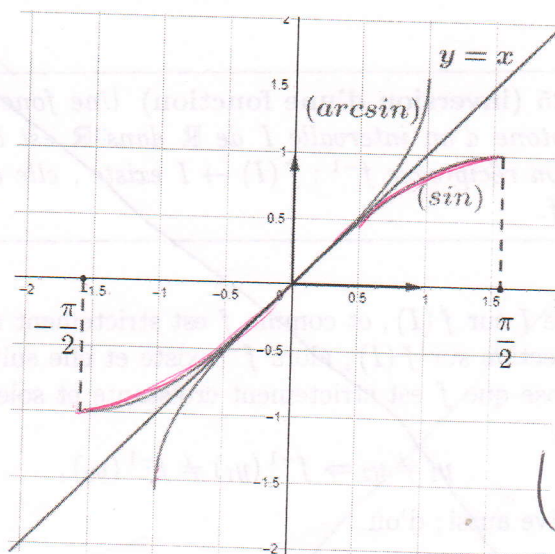


FIGURE 4.1

$$(Arc\ sin\ f(x))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$$

4.6.2 Fonction arccos

$$\begin{aligned} f: [0, \pi] &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto f(x) = \cos x \end{aligned}$$

f est continue, strictement décroissante sur $[0, \pi]$, alors f est bijective et donc f^{-1} existe, est continue et strictement décroissante et on a $f([0, \pi]) = [-1, 1]$ et

$$\begin{aligned} f^{-1}: [-1, 1] &\rightarrow [0, \pi] \\ y &\mapsto f^{-1}(y) = \arccos y \end{aligned}$$

d'où on a :

$$\left(\begin{array}{l} \arccos y = x \\ -1 \leq y \leq 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \cos x = y \\ 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right)$$

voir figure 4.2.

4.6.3 Fonction arctan

$$\begin{aligned} f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\rightarrow]-\infty, +\infty[\\ x &\mapsto f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \end{aligned}$$

f est continue, strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors f est bijective et donc f^{-1} existe, est continue et strictement croissante et on a $f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]-\infty, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} f^{-1}:]-\infty, +\infty[&\rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ y &\mapsto f^{-1}(y) = \arctan y \end{aligned}$$

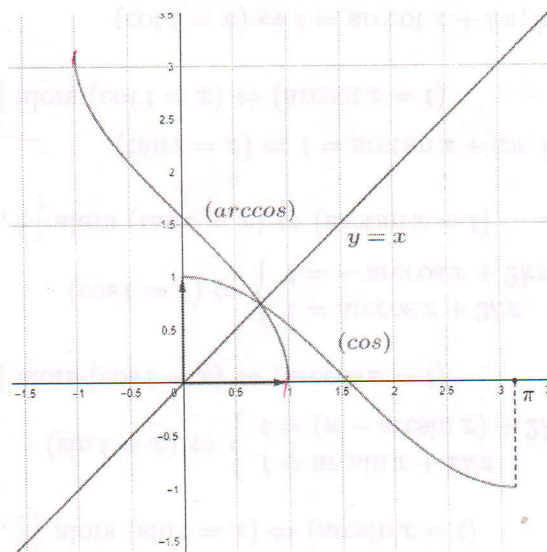


FIGURE 4.2

d'où on a :

$$\left(\begin{array}{l} \arctan y = x \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \tan x = y \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{array} \right)$$

voir figure 4.3.

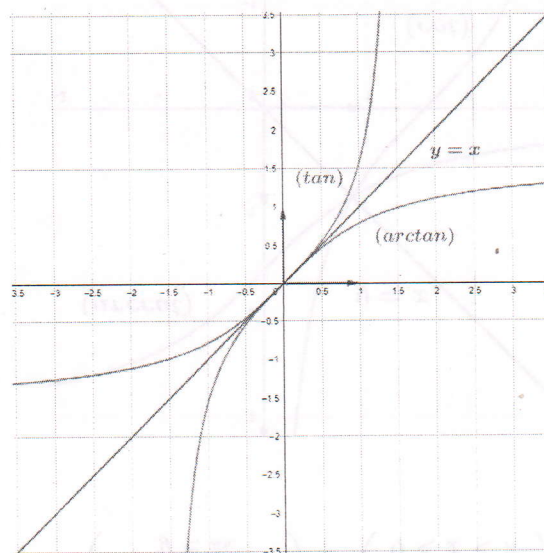
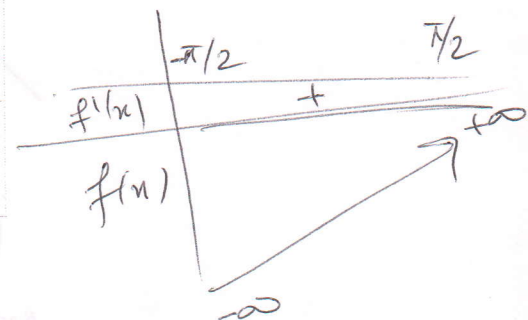


FIGURE 4.3



4.6.4 Fonction arccot

$$\begin{array}{lcl} f :]0, \pi[& \rightarrow &]-\infty, +\infty[\\ x & \mapsto & f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \end{array}$$

f est continue, strictement décroissante sur $]0, \pi[$, alors f est bijective et donc f^{-1} existe, est continue et strictement croissante et on a $f([0, \pi]) =]-\infty, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} f^{-1} :]-\infty, +\infty[&\rightarrow]0, \pi[\\ y &\mapsto f^{-1}(y) = \operatorname{arccot} y \end{aligned}$$

d'où on a :

$$\left(\begin{array}{l} \operatorname{arccot} y = x \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \cot x = y \\ 0 < x < \pi \end{array} \right)$$

voir figure 4.4.

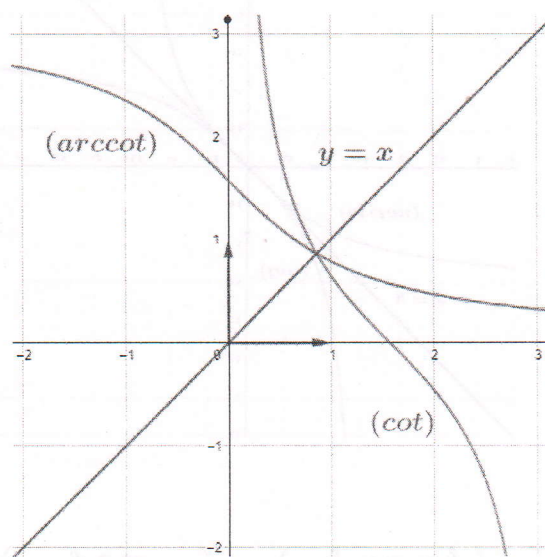


FIGURE 4.4

Propriétés 12 : $\forall x \in [-1, 1]; \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Remarques :

1. Si $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ alors $(\sin t = x) \Leftrightarrow (\arcsin x = t)$

Sinon

$$(\sin t = x) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \arcsin x + 2k\pi \\ t = (\pi - \arcsin x) + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

2. Si $t \in [0, \pi]$ alors $(\cos t = x) \Leftrightarrow (\arccos x = t)$

Sinon

$$(\cos t = x) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \arccos x + 2k\pi \\ t = -\arccos x + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

3. Si $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ alors $(\tan t = x) \Leftrightarrow (\arctan x = t)$

Sinon

$$(\tan t = x) \Leftrightarrow t = \arctan x + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

4. Si $t \in]0, \pi[$ alors $(\cot t = x) \Leftrightarrow (\operatorname{arccot} x = t)$

Sinon

$$(\cot t = x) \Leftrightarrow t = \operatorname{arccot} x + k\pi ; k \in \mathbb{Z}.$$

2.

$$\log_a x = \frac{\ln b}{\ln a} \log_b x; \forall x > 0.$$

En particulier pour $a = e$ et $b = 10$; on a $\ln x = \ln 10 \log x$.

$$3. \forall x, y \in]0, +\infty[: \log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y.$$

$$4. \forall x, y \in]0, +\infty[: \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y.$$

$$5. \forall x, y \in]0, +\infty[: \log_a \left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a y; \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$6. \forall x \in]0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N} : \log_a (x^n) = n \log_a x.$$

7. La fonction \log_a est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ pour $a > 1$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ pour $0 < a < 1$.

4.7.4 Fonction puissance

Définition 4.7.4 Soient a un réel strictement positif et différent de 1 et x un réel quelconque, la fonction a puissance x ou fonction exponentielle de base a est la fonction notée a^x et définie par

$$a^x = e^{x \ln a},$$

c'est la fonction réciproque de la fonction \log_a (logarithme de base a).

Propriétés 16 Soient a et b deux réels strictement positifs, x et y deux réels quelconques :

$$1. a^x > 0; \ln a^x = x \ln a.$$

$$2. 1^x = 1, a^{x+y} = a^x a^y, a^{-x} = \frac{1}{a^x}, a^{y-x} = \frac{a^y}{a^x}.$$

$$3. (ab)^x = a^x b^x, (a^x)^y = a^{xy}.$$

4. La fonction exponentielle de base a est strictement croissante sur \mathbb{R} pour $a > 1$ et strictement décroissante sur \mathbb{R} pour $0 < a < 1$.

5. Il existe aussi la fonction définie par x^a pour $a \in \mathbb{R}_+^*$.

4.8 Fonctions hyperboliques et leurs inverses

4.8.1 Fonction cosinus hyperbolique

$$\begin{aligned} f : [0, +\infty[&\rightarrow [1, +\infty[\\ x &\mapsto f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

$D_f = \mathbb{R}$, f est paire.

f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ alors f^{-1} existe et est continue et strictement croissante et on a $f([0, +\infty[) = [1, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} f^{-1} : [1, +\infty[&\rightarrow [0, +\infty[\\ y &\mapsto f^{-1}(y) = \operatorname{argch} y \text{ (argument cosinus hyperbolique)} \end{aligned}$$

d'où on a :

$$\left(\begin{array}{l} \operatorname{argch} y = x \\ 1 \leq y \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \operatorname{ch} x = y \\ 0 \leq x \end{array} \right)$$

voir figure 4.6

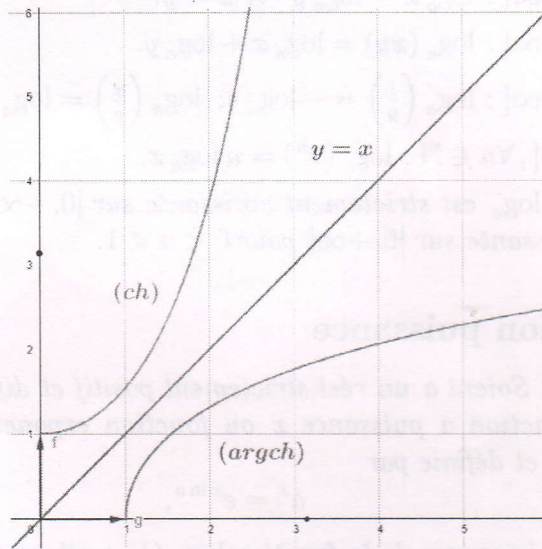


FIGURE 4.6

4.8.2 Fonction sinus hyperbolique

$$\begin{array}{ll} f:]-\infty, +\infty[& \rightarrow]-\infty, +\infty[\\ x & \mapsto f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

$D_f = \mathbb{R}$, f est impaire.

f est continue et strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$ alors f^{-1} existe et est continue et strictement croissante et on a $f(]-\infty, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$ et

$$\begin{array}{ll} f^{-1}:]-\infty, +\infty[& \rightarrow]-\infty, +\infty[\\ y & \mapsto f^{-1}(y) = \operatorname{argsh} y \text{ (argument sinus hyperbolique)} \end{array}$$

d'où on a :

$$\left(\begin{array}{l} \operatorname{argsh} y = x \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \operatorname{sh} x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

voir figure 4.7

4.8.3 Fonction tangente hyperbolique

$$\begin{array}{ll} f:]-\infty, +\infty[& \rightarrow]-1, +1[\\ x & \mapsto f(x) = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array}$$

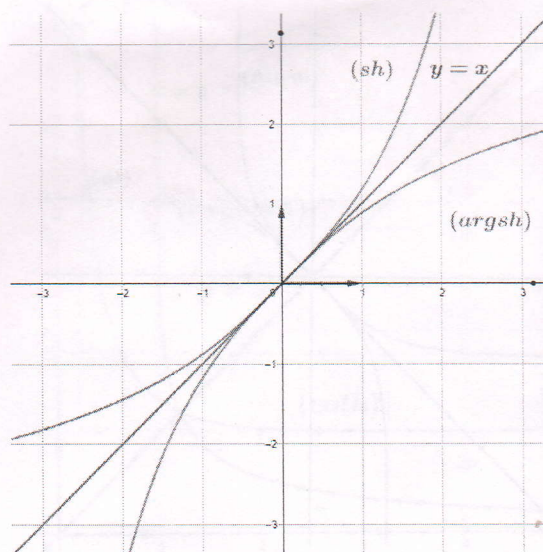


FIGURE 4.7

$D_f = \mathbb{R}$, f est impaire.

f est continue et strictement croissante sur $] -\infty, +\infty[$ alors f^{-1} existe et est continue et strictement croissante et on a $f(]-\infty, +\infty[) =]-1, +1[$ et

$$\begin{aligned} f^{-1}:]-1, +1[&\rightarrow]-\infty, +\infty[\\ y &\mapsto f^{-1}(y) = \operatorname{argth} y \text{ (argument cosinus hyperbolique)} \end{aligned}$$

d'où on a :

$$\left(\begin{array}{l} \operatorname{argth} y = x \\ -1 < y < 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \operatorname{th} x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

voir figure 4.8

4.8.4 Fonction cotangente hyperbolique

$$\begin{aligned} f:]0, +\infty[&\rightarrow]1, +\infty[\\ x &\mapsto f(x) = \operatorname{coth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \end{aligned}$$

$D_f = \mathbb{R}^*$, f est impaire.

f est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ alors f^{-1} existe et est continue et strictement décroissante et on a $f(]0, +\infty[) =]1, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} f^{-1}:]1, +\infty[&\rightarrow]0, +\infty[\\ y &\mapsto f^{-1}(y) = \operatorname{argcoth} y \text{ (argument cosinus hyperbolique)} \end{aligned}$$

d'où on a :

$$\left(\begin{array}{l} \operatorname{argcoth} y = x \\ y > 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \operatorname{coth} x = y \\ x > 0 \end{array} \right)$$

voir figure 4.9

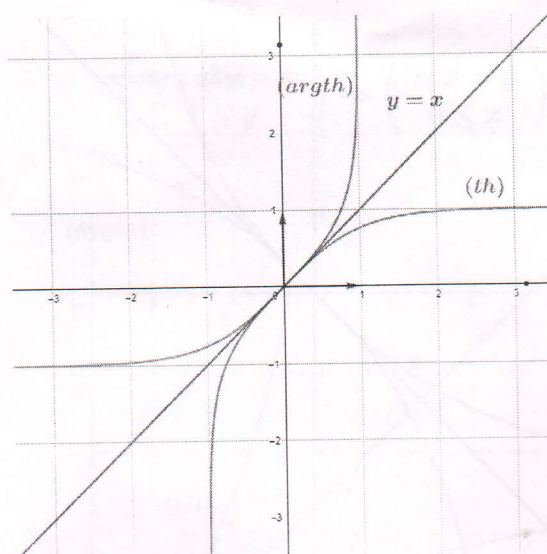


FIGURE 4.8

Propriétés 17 1. $chx + shx = e^x$.

2. $chx - shx = e^{-x}$.

3. $ch^2x - sh^2x = 1$.

4. $1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$.

5. $ch(x+y) = chx \cdot chy + shx \cdot shy$.

6. $sh(x+y) = shx \cdot chy + chx \cdot shy$.

Expression sous forme logarithmique.

Les fonctions réciproques des fonctions hyperboliques s'expriment à l'aide de la fonction logarithme népérien, comme suit

$$\arg thx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \forall x \in]-1, 1[.$$

$$\arg coth x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{x-1} \right), \forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

$$\arg shx = \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\arg chx = \ln \left(x + \sqrt{x^2-1} \right), \forall x \geq 1.$$

Preuve :

1. Soit $x \in]-1, 1[$, on pose $\arg thx = y$

$$\begin{aligned} \arg thx = y &\Leftrightarrow th y = x \Leftrightarrow \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - e^{-2y}}{1 + e^{-2y}} = x \Leftrightarrow 1 - e^{-2y} = x(1 + e^{-2y}) \\ &\Leftrightarrow e^{-2y}(1+x) = 1-x \\ &\Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow 2y = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \\ &\Leftrightarrow y = \arg thx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right). \end{aligned}$$

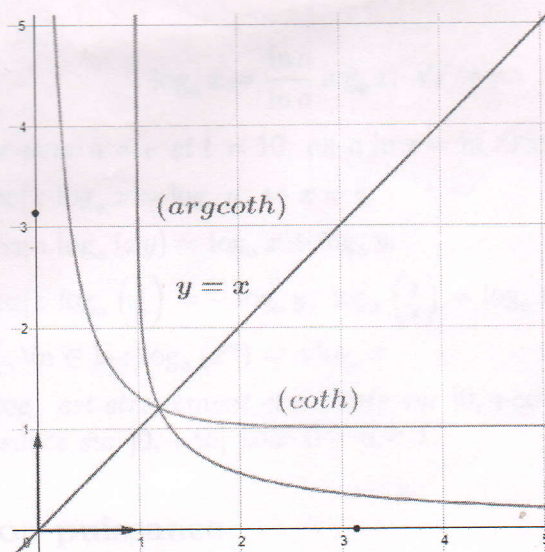


FIGURE 4.9

2. Soit $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, on pose $\arg \coth x = y$

$$\begin{aligned} \arg \coth x = y &\Leftrightarrow \coth y = x \Leftrightarrow \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} = x \\ &\Leftrightarrow \frac{1 + e^{-2y}}{1 - e^{-2y}} = x \Leftrightarrow 1 + e^{-2y} = x(1 - e^{-2y}) \\ &\Leftrightarrow e^{-2y}(1 + x) = x - 1 \\ &\Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{x-1} \Leftrightarrow 2y = \ln \left| \frac{1+x}{x-1} \right| \\ &\Leftrightarrow y = \arg th x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{x-1} \right). \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $\arg sh x = y$

$$\arg sh x = y \Leftrightarrow sh y = x$$

et on a

$$e^y = sh y + chy \text{ et } chy = \sqrt{sh^2 y + 1}$$

alors

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow y = \arg sh x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right).$$

4. Soit $x \geq 1$, on pose $\arg ch x = y$

$$\arg ch x = y \Leftrightarrow chy = x$$

et on a

$$e^y = chy + sh y \text{ et } sh y = \sqrt{ch^2 y - 1}$$

alors

$$e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow y = \arg ch x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right).$$

□