

EXAMEN DE MATHÉMATIQUE 3

Exo1 : Intégrales Multiples (Doubles) 5pts

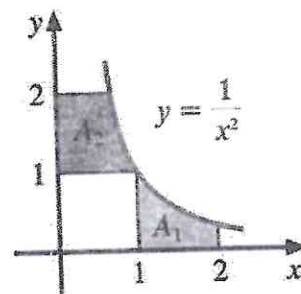
A. Calculer les intégrales doubles des fonctions suivantes

$$f(x, y) = 5x + y^2 \quad \text{sur } A_2$$

$$g(x, y) = 3x + 4y \quad \text{sur } A_1$$

$$h(x, y) = |3x - 3| \quad \text{sur } A_1 \cup A_2$$

$$k(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{sur } D = \{(x, y) | 3 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$$



Exo2 : Suites Numériques et Séries de fonctions (4pts)

A. Étudier la nature des suites numériques ci-dessous :

$$U_n = \frac{(3n-2)! 4^{2n} 5^{3n}}{(2n-1)! n! 7^{4n}}$$

$$U_n = \frac{(3n)! n! 5^{4n}}{(4n-1)! 3^{2n} 2^{3n}}$$

$$U_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$$

B. Étudie la convergence normale de la série de fonction :

$$f_n(x) = \frac{3 + \sin(2^n x)}{4^n}$$

Exo3 : Intégrales Impropres (4pts)

A. Déterminer les valeurs de $(\alpha \text{ et } \beta)$ pour que l'intégrale ci-dessous converge :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t^\beta} dt$$

B. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$\int_{-\infty}^1 \frac{e^{\cos(x)}}{x} dx$$

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x(x+2)} dx$$

Exo4 : Equations différentielles (7pts)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y' - \frac{2}{t}y = t^2$$

$$xy' - 2y = \frac{x^2}{\ln(x)}$$

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x, \text{ avec } y(0) = 1 \text{ et } y(1) = 0.$$

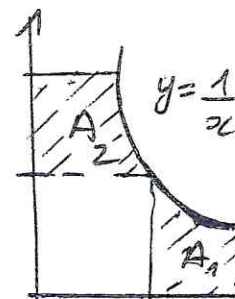
Solution d'examen de Mathématiques

Exo 1 5pts

1) calcul de l'intégrale de $f(x,y) = 5x^2 + y^2$ sur A_2

alors $\int_1^2 \int_0^{\frac{1}{y}} 5x + y^2 dx dy = \int_1^2 \left[\frac{5x^2}{2} + y^2 x \right]_0^{\frac{1}{y}} dy$

$$= \int_1^2 \left[\frac{5}{2} \frac{1}{y} + y^{\frac{3}{2}} \right] dy = \left[\frac{5}{2} \ln(y) + \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right]_1^2 = \boxed{\frac{5}{2} \ln(2) + \frac{2}{5} 2^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5}}$$



2) calcul de l'intégrale de $g(x,y) = 3x + 4y$ sur A_1

$$\int_1^2 \int_0^{\frac{1}{x^2}} 3x + 4y dy dx = \int_1^2 \left[3xy + 2y^2 \right]_0^{\frac{1}{x^2}} dx = \int_1^2 \left[\frac{3}{x} + \frac{2}{x^4} \right] dx$$

$$= \left[3 \ln(x) + \frac{2}{-3} x^{-3} \right]_1^2 = 3 \ln(2) - \frac{2}{24} + \frac{2}{3} = \boxed{3 \ln(2) + \frac{7}{12}}$$

3) Calcul de $h(x,y) = |3x-3|$ sur $A_1 \cup A_2$

$$\int_1^2 \int_0^{\frac{1}{y}} (3-3x) dx dy + \int_1^2 \int_{\frac{1}{x^2}}^{\frac{1}{y}} (3x-3) dy dx$$

$$= \int_1^2 \left[3x - \frac{3}{2} x^2 \right]_0^{\frac{1}{y}} dy + \int_1^2 \left[\frac{3}{2} y^2 - 3y \right]_{\frac{1}{x^2}}^{\frac{1}{y}} dx$$

$$= \int_1^2 \left[3y^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} y^{-1} \right] dy + \int_1^2 \left[\frac{3}{2} x - 3 \right] \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \left[6y^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} \ln(y) \right]_1^2 + \left[3 \ln(x) + \frac{3}{x} \right]_1^2$$

$$= 6\sqrt{2} - \frac{3}{2} \ln(2) - 6 + 3 \ln(2) + \frac{3}{2} - 3$$

$$= \boxed{\frac{3}{2} \ln(2) + 6\sqrt{2} - \frac{15}{2}}$$

4) Appliquant le jacobien en coordonnées polaires

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \quad 3 \leq \rho^2 \leq 4$$

$$\sqrt{3} \leq \rho \leq 2$$

$$x \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_D x^2 + y^2 dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\sqrt{3}}^2 \rho^2 \rho d\rho d\theta = \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{\sqrt{3}}^2 \bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\left(4 - \frac{9}{4} \right) \pi = \boxed{\frac{7\pi}{4}}$$

1,5 pts Ex 02 Etude de la nature des suites numériques
 A. étude de la nature pour $U_n = \frac{(3n-2)! 4^{2n} 5^{3n}}{(2n-1)! n! 7^{4n}}$

En appliquant le critère de d'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{U_{n+1}}{U_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(3n+1)! 4^{2n+2} 5^{3n+3}}{(2n+1)! (n+1)! 7^{4n+4}} \times \frac{(2n-1)! n! 7^{4n}}{(3n-2)! 4^{2n} 5^{3n}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(3n+1)(3n)(3n-1)}{(2n+1)(2n)(n+1)} \frac{4^2 \times 5^3}{7^4} \right) = \frac{9 \times 4^2 \times 5^3}{4 \times 7^4}$$

$$= \frac{4500}{2401} \approx 1,78 > 1$$

la série est divergente

même critère

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{U_{n+1}}{U_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(3n+3)! (n+1)! 5^{4n+4}}{(4n+3)! 3^{2n+2} 2^{3n+3}} \times \frac{(4n-1)! 3^{2n} 2^{3n}}{(3n)! n! 5^{4n}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(n+1)}{(4n+3)(4n+2)(4n+1)(4n)} \times \frac{5^4}{3^2 2^3} \right)$$

$$= \frac{3^3 \times 5^4}{4^4 3^2 2^3} = \frac{1875}{2048} \approx 0,91 < 1 \quad \text{la série converge}$$

La série $U_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$ série alternée donc par le critère de Leibniz on calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} = +\infty$ donc

La série Diverge

B. la convergence normale de $f_n(x) = \frac{3 + \sin(2^n x)}{4^n}$

$$f_n(x) = \frac{3 + \sin(2^n x)}{4^n} \leq \frac{3+1}{4^n} = \frac{1}{4^{n-1}} = \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} = a_n$$

a_n est une suite géométrique de base $q = \frac{1}{4}$ donc elle est convergente

Cà d $f_n(x)$ converge normalement vers a_n

exo 3 U4.00
A. Détermination de (a et b) pour que $\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$ converge

borne +∞

$$b > 0 \Rightarrow \frac{t^{a-1}}{1+t^b} \approx \frac{t^{a-1}}{t^b} = \frac{1}{t^{(b-a+1)}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{d'après Riemann} \\ \text{converge pour} \\ (b-a+1) > 1 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{a < b}$$

$$b = 0 \Rightarrow \frac{t^{a-1}}{1+t^0} = \frac{t^{a-1}}{2} = \frac{1}{2} t^{(1-a)}$$

d'après Riemann converge pour $(1-a) > 1 \Rightarrow \boxed{a < 0}$

$$b < 0 \Rightarrow \frac{t^{a-1}}{1+t^b} = \frac{t^{a-1}}{1} = \frac{1}{t^{(1-a)}} \quad \text{converge pour } (1-a) > 1 \quad \text{donc } \boxed{a < 0}$$

borne 0

$$b > 0 \Rightarrow \frac{t^{a-1}}{1+t^b} = t^{a-1} = \frac{1}{t^{(1-a)}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{d'après Riemann} \\ \text{converge pour} \\ (1-a) < 1 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{a > 0}$$

$$b = 0 \Rightarrow \frac{t^{a-1}}{1+t^0} = \frac{t^{a-1}}{2} \quad \text{même conclusion}$$

$$b < 0 \Rightarrow \frac{t^{a-1}}{1+t^b} \approx \frac{t^{a-1}}{t^b} = \frac{1}{t^{(b-a+1)}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{d'après Riemann} \\ \text{converge à} \\ (b-a+1) < 1 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{a > b}$$

conclusion

$a + \infty$	$m b > 0$	$a < b$
	$m b < 0$	$a < 0$
$a = 0$	$m b > 0$	$a > 0$
	$m b < 0$	$a > b$

B. Nature des intégrales :

borne 0 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$ converge $\boxed{a = \frac{1}{2}}$ Riemann

borne +∞ $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ converge $\boxed{a = \frac{3}{2}}$ Riemann

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\cos(x)}}{x} dx \quad \text{singularité à } (0) \quad \text{intégrale Riemann } \alpha=1$$

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x(x+2)} dx = \int_{-1}^0 \frac{(\frac{1}{2})}{x} dx - \int_{-1}^0 \frac{(\frac{1}{2})}{(x+2)} dx$$

diverge à (0) Riemann $\alpha=1$

Exo 4 0,75pts Equations différentielles

$$y' - \frac{2}{t} y = t^2$$

$$A(t) = \int -\frac{2}{t} dt = -2 \ln(t)$$

$$y(t) = C e^{2 \ln(t)} + e^{2 \ln(t)} \int t^2 e^{-2 \ln(t)} dt$$

$$= C t^2 + t^2 \int \frac{t^2}{t^2} dt = \boxed{C t^2 + t^3 = y(t)}$$

$$x y' - 2y = \frac{x^2}{\ln(x)} \Rightarrow y' - \frac{2}{x} y = \frac{x}{\ln(x)}$$

$$A(x) = \int -\frac{2}{x} dx = -2 \ln(x)$$

$$y = C e^{2 \ln(x)} + e^{2 \ln(x)} \int \frac{x}{\ln(x)} e^{-2 \ln(x)} dx$$

$$y(x) = C x^2 + x^2 \int \frac{1}{x \ln(x)} dx = \boxed{C x^2 + x^2 \ln(\ln(x)) = y(x)}$$

$$y'' + 2y' + 4y = x e^x \quad \text{avec } y(0)=1 \text{ et } y(1)=0$$

$$(EC) \quad r^2 + 2r + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 16 = -12$$

$$r_1 = -1 - i\sqrt{3}$$

$$r_2 = -1 + i\sqrt{3}$$

$$y_H = e^{-x} (C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x)) \quad \text{solution homogène}$$

La solution particulière y_p avec second membre $x e^x$

donc $y_p(x) = e^x(ax+b)$ 0,5

$$y_p'(x) = e^x(ax+b+a) \quad 0,25$$

$$y_p''(x) = e^x(ax+b+2a) \quad 0,25$$

en remplaçant dans l'équation diff nous aurons

$$e^x(7ax + 7b + a4) = x e^x \Rightarrow \begin{cases} 7a = 1 \\ 7b + 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{7} \\ b = -\frac{4}{49} \end{cases} \quad 0,5$$

finallement $y_p(x) = e^x\left(\frac{x}{7} - \frac{4}{49}\right)$ 0,25

la solution globale sera $y = y_H + y_p = e^{-x}(C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x)) + e^x\left(\frac{x}{7} - \frac{4}{49}\right)$ 0,25

conditions initiales $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y(0) = C_1 - \frac{4}{49} = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{53}{49} \end{cases} \quad 0,25$$

$$y(1) = e^{-1}(C_1 \cos(\sqrt{3}) + C_2 \sin(\sqrt{3})) + e\left(\frac{3}{49}\right) = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{\sin(\sqrt{3})} \left(-\frac{3e^2}{49} - \frac{53}{49} \cos(\sqrt{3}) \right) \quad 0,25$$

Fin