

Contrôle continu 2 en: Mécanique des milieux continus

Exercice 1 :

L'état des contraintes en un point M d'un milieu continu est donné dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par le tenseur :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

1. Déduire les composantes du vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{e}_1)$ et $\vec{T}(M, \vec{e}_2)$ à partir du tenseur σ (M).

2. Représenter dans le plan physique (x_1, x_2) les composantes du tenseur σ (M).

3. Soit les vecteurs unitaire $\vec{n}$ et $\vec{t}$ ayant respectivement les composantes $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Calculer les composantes de vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$

b) Calculer la contrainte normale σ_n

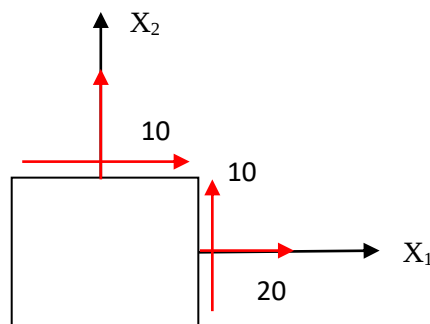
c) Calculer la contrainte tangentielle τ_n .

4. Déterminer les contraintes principales et les directions principales correspondantes.

Solution :

1. $\vec{T}(M, \vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{T}(M, \vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$ (1pt)

2.



3.

a) $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \{\vec{T}\} = [\sigma]\{n\} = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = 30 MPa$

$$\text{c) } \tau_n = \vec{t} \cdot \vec{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ MPa}$$

4. Les contraintes principales et les directions principales correspondantes :

$$\det(\sigma - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 20 - \lambda & 10 & 0 \\ 10 & 20 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (20 - \lambda)(20 - \lambda)(-\lambda) - 10(-10\lambda)$$

$$= -\lambda((20 - \lambda)^2 - 100) = -\lambda(10 - \lambda)(30 - \lambda) = 0$$

D'où : $\lambda=0, \lambda=10, \lambda=30 \rightarrow \sigma_1 = 30 ; \sigma_2 = 10 ; \sigma_3 = 0$

Les directions principales :

$$\text{Pour } \sigma_1 = 30 : \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Pour } \sigma_2 = 10 : \begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Pour } \sigma_3 = 0 : \begin{bmatrix} 20 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$