

Examen de : Mécanique des milieux continus

Exercice 1 : (10pts)

1/ la signification physique des composantes du tenseur des contraintes (1pt).

2/ l'état des contraintes en M pour $\alpha = 0$ (0.75pt).

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{bmatrix} : \text{Traction suivant l'axe z.}$$

$$3/ \text{ Pour } \alpha = 1 : [\sigma] = \begin{bmatrix} 7 & 36 & 0 \\ 36 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{bmatrix} \quad (0.25\text{pt})$$

$$\vec{n}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} ; \{\vec{T}_1\} = [\sigma]\{n_1\} = \begin{bmatrix} 7 & 36 & 0 \\ 36 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24.06 \\ 34.68 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (0.5 \text{ pt})$$

$$\sigma_n = \vec{n}_1 \cdot \vec{T}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 24.06 \\ 34.68 \\ 0 \end{Bmatrix} = 38.18 \quad (0.5\text{pt})$$

$$\vec{\tau}_n = \vec{T}_1 - \sigma_n \vec{n}_1 = \begin{Bmatrix} -9 \\ 15.59 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \|\vec{\tau}_n\| = 18 \quad (0.5\text{pt})$$

$$\vec{n}_2 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} ; \{\vec{T}_2\} = [\sigma]\{n_2\} = \begin{bmatrix} 7 & 36 & 0 \\ 36 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 19.65 \\ 28.31 \\ 40.41 \end{Bmatrix} \quad (0.5\text{pt})$$

$$\sigma_n = \vec{n}_2 \cdot \vec{T}_2 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 19.65 \\ 28.31 \\ 40.41 \end{Bmatrix} = 48.78 \quad (0.5 \text{ pt})$$

$$; \vec{\tau}_n = \vec{T}_2 - \sigma_n \vec{n}_2 = \begin{Bmatrix} -14.85 \\ 8.39 \\ 12.2 \end{Bmatrix} ; \|\vec{\tau}_n\| = 21 \quad (0.5\text{pt})$$

4/ Les contraintes principales et les directions principales correspondantes :

$$\det(\sigma - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 7\alpha - \lambda & 36\alpha & 0 \\ 36\alpha & 7\alpha - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 70 - \lambda \end{vmatrix} = (70 - \lambda)(-29\alpha - \lambda)(43\alpha - \lambda) = 0$$

D'où : $\lambda=70, \lambda=-29\alpha, \lambda=43\alpha \rightarrow \sigma_1 = 70 ; \sigma_2 = 43\alpha ; \sigma_3 = -29\alpha$ (1.5 pt)

Les directions principales :

$$\text{Pour } \sigma_1 = 70 : \begin{bmatrix} 7\alpha - 70 & 36\alpha & 0 \\ 36\alpha & 7\alpha - 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow V_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (0.5 \text{ pt})$$

$$\text{Pour } \sigma_2 = 43\alpha : \begin{bmatrix} -36\alpha & 36\alpha & 0 \\ 36\alpha & -36\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow V_2 = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix} \quad (0.5 \text{ pt})$$

$$\text{Pour } \sigma_3 = -29\alpha : \begin{bmatrix} 36\alpha & 36\alpha & 0 \\ 36\alpha & 36\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow V_3 = \begin{Bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (0.5 \text{ pt})$$

5/ La partie sphérique et le déviateur du tenseur.

$$[\sigma] = \sigma_m I + S ; \text{ Avec } \begin{cases} \text{tr}(S) = 0 \\ \sigma_m = \frac{I_1}{3} ; \sigma_m = \frac{70+14\alpha}{3} \end{cases}$$

$$\text{La partie sphérique : } \sigma_m I = \begin{bmatrix} \frac{70+14\alpha}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{70+14\alpha}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{70+14\alpha}{3} \end{bmatrix} \quad (1 \text{ pt})$$

$$\text{Le tenseur déviateur : } S = [\sigma] - \sigma_m I = \begin{bmatrix} \frac{7\alpha-70}{3} & 36\alpha & 0 \\ 36\alpha & \frac{7\alpha-70}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{140-14\alpha}{3} \end{bmatrix} \quad (1 \text{ pt})$$

Exercice 2 : (5pt)

1/ le tenseur de déformations et de rotations :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\theta y(1 - 3x) ; \frac{\partial u}{\partial y} = \theta(1 - x)(1 + 3x) ; \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ; \frac{\partial v}{\partial x} = -\theta(1 - x)(1 + 3x) \quad (2pts)$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 2\theta y(1 - 3x) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1pt)$$

$$[w] = \begin{bmatrix} 0 & \theta(1 - x)(1 + 3x) \\ \theta(1 - x)(1 + 3x) & 0 \end{bmatrix} \quad (1pt)$$

2/ Les points qui ne subissent pas des déformations $\varepsilon=0$, donc : $2\theta y(1 - 3x) = 0 \rightarrow y = 0$ et $x = \frac{1}{3}$ (1pt)

Exercice 3 :

$$1/ \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 ; \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 4.2MPa \quad (1.5pt)$$

2/ Le tenseur de déformation :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1+0.3}{200000} ((1 - 0.3)12 - 0.3 \times 2) = 5.07 \times 10^{-5} \quad (1pt)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1+0.3}{200000} ((1 - 0.3)2 - 0.3 \times 12) = -1.43 \times 10^{-5} \quad (1pt)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+0.3}{200000} \times 10 = 6.5 \times 10^{-5} \quad (1pt)$$

$$D'où : [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 5.07 & 6.5 \\ 6.5 & -1.43 \end{bmatrix} \quad (0.5pt)$$