

MESI - Examen Final

(Durée: 01 heure et 30 minutes - Documents et appareils électroniques non autorisés)

Exercice 1 (5 pts)

Soit une chaîne de Markov définie par sa matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. La chaîne est-elle réductible ? Si oui, justifiez en identifiant ses classes de communication (classes d'équivalence).
2. Déterminez les états transitoires, récurrents de la chaîne.
3. Trouvez la période de chaque état.

Exercice 2 (7 pts)

1. Sans calculer les Z_i , déterminez lesquels des générateurs congruentiels linéaires suivants ont une période complète :

a) $Z_i = (13Z_{i-1} + 13) \bmod 16$

b) $Z_i = (12Z_{i-1} + 13) \bmod 16$

c) $Z_i = (13Z_{i-1} + 12) \bmod 16$

d) $Z_i = (Z_{i-1} + 12) \bmod 13$

e) $Z_i = Z_{i-1} \bmod 16$

2. Considérons une suite S de 10 nombres pseudo-aléatoires générée par un PRNG P_x :

$$S = \{0.12, 0.45, 0.23, 0.67, 0.34, 0.89, 0.56, 0.78, 0.43, 0.65\}$$

- ✧ Effectuez un test de séquences (runs test) basé sur la médiane pour vérifier si les éléments de la suite générée sont indépendants au seuil de signification $\alpha = 0.10$ (valeur critique = 1.645).

Exercice 3 (8 pts)

Dans un programme de certification professionnelle, les étudiants suivent des cours, peuvent faire une pause dans leurs études, participent à des stages, et finalement obtiennent leur diplôme ou abandonnent.

Le système donc comprend 5 états : en cours (C), en pause (P), en stage (S), abandon (A), et diplômé (D).

Si un étudiant abandonne, il n'est jamais réadmis au programme.

Parmi les étudiants qui suivent actuellement des cours, 70 % ont un stage l'année suivante, 20 % continuent à suivre des cours l'année suivante et 10 % ont abandonné d'ici l'année suivante.

Parmi les étudiants qui effectuent actuellement un stage, 65 % obtiennent leur diplôme l'année suivante ; 20 % abandonnent d'ici l'année suivante et 15 % terminent encore leur stage l'année suivante.

Parmi les étudiants qui sont actuellement en pause (P), 50 % reprennent leurs études et retournent suivre des cours (C) l'année suivante, 30 % choisissent de faire un stage (S), et 20 % abandonnent le programme (A).

1. Écrivez la matrice de transition et indiquez quels sont les états absorbants.
2. Si un étudiant est actuellement en cours, trouvez :
 - i. La probabilité que l'étudiant obtienne son diplôme dans 2 ans.
 - ii. La probabilité que l'étudiant soit en stage dans 2 ans.
 - iii. La probabilité que l'étudiant ait abandonné d'ici 3 ans.
3. Trouvez la probabilité qu'un étudiant suivant des cours actuellement obtienne finalement son diplôme.
4. Trouvez la probabilité qu'un étudiant effectuant actuellement un stage abandonne finalement.
5. Calculez le temps moyen qu'un étudiant passe dans le système (depuis son entrée en cours jusqu'à ce qu'il obtienne son diplôme ou abandonne) en fonction de son état initial.
6. Considérons la distribution initiale suivante des étudiants : 40% en cours, 20% en pause, 40% en stage. Calculer la distribution finale (à long terme) des étudiants entre diplômés et abandons ?