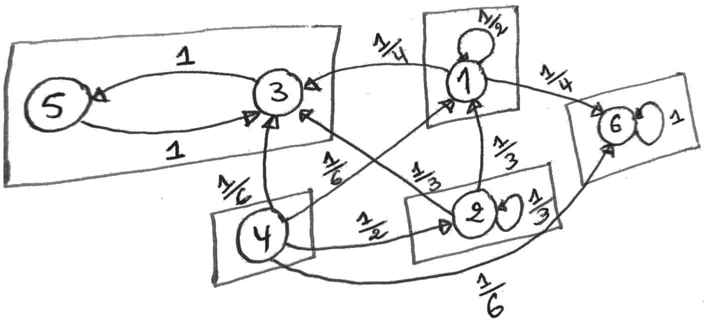
MESI - Examen Final - Corrigé Type

Exercice 1 (5 *pts*)

Graphe de transition :



1. La chaîne est **réductible** parce qu'il existe certains états qui peuvent être inaccessibles depuis d'autres. ***(0.75 pts)***

   Les classes d'équivalence dans cette chaîne de Markov sont : {1}, {2}, {3, 5}, {4}, {6} ***(1.25 pts)***

2. ***États transitoires et récurrents*** :

   États transitoires = {1, 2, 4} ***(0.75 pts)***

   États récurrents = {3, 5, 6} ***(0.75 pts)***

3. ***Période de chaque état :***

   $d(3) = 2$ $d(5) = 2$ $d(6) = 1$ ***(0.75 pts)***

   $d(1) = /$ $d(2) = /$ $d(4) = /$ ***(0.75 pts)***

   Note : Les états 1, 2, et 4 n'ont pas de période parce que, partant d'une de ces états, il existe une probabilité non nulle de ne jamais y revenir.

Exercice 2 (7 *pts*)

1. **Période complète ou incomplète** :

   a) $Z_i = (13Z_{i-1} + 13)\ mod\ 16$: ***Période complète*** ***(0.50 pts)***

   b) $Z_i = (12Z_{i-1} + 13)\ mod\ 16$: ***Période incomplète*** ***(0.50 pts)***

   c) $Z_i = (13Z_{i-1} + 12)\ mod\ 16$ *:* ***Période incomplète*** ***(0.50 pts)***

   d) $Z_i = (Z_{i-1} + 12)\ mod\ 13$: ***Période incomplète*** ***(0.50 pts)***

e) $Z_i = Z_{i-1} \, mod \, 16$: ***Période incomplète*** ***(0.50 pts)***

2. **Test de séquences basé sur la médiane** :

$$S = \{0.12, 0.45, 0.23, 0.67, 0.34, 0.89, 0.56, 0.78, 0.43, 0.65\}$$

Hypothèses de test

- H_0: La suite est aléatoire et les runs sont dus au hasard. ***(0.25 pts)***
- H_1: La suite n'est pas aléatoire, et le nombre de runs indique une dépendance. ***(0.25 pts)***

La suite ordonnée : $S = \{0.12, 0.23, 0.34, 0.43, 0.45, 0.56, 0.65, 0.67, 0.78, 0.89\}$ ***(0.25 pts)***

La mediane : $Me = (0.45 + 0.56)/2 = 0.505$ ***(0.50 pts)***

La séquence transformée : $-, -, -, +, -, +, +, +, -, +$ ***(0.50 pts)***

- $R = 6$ ***(0.25 pts)***
- Le nombre de valeurs positives (+): $n_1 = 5$ ***(0.25 pts)***
- Le nombre de valeurs négatives (-) : $n_2 = 5$ ***(0.25 pts)***

La moyenne μ_R et la variance σ_R^2 du nombre de runs attendus sous H_0 ***(1.50 pts)***:

$$\mu_R = \frac{2n_1n_2}{n} + 1 = \frac{2*5*5}{10} + 1 = 6$$

$$\sigma_R^2 = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n)}{(n)^2(n-1)} = \frac{2*5*5(2*5*5-10)}{(10)^2(10-1)} = 2.22 \qquad \sigma_R = \sqrt{2.22} = 1.49$$

Donc:

$$Z = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} = \frac{6-6}{1.49} = 0$$

Au seuil $\alpha = 0.10$, la valeur critique de la loi normale centrée réduite est 1.645.

Comme $|Z| = 0 < 1.645$, **on ne peut pas rejeter l'hypothèse H_0 d'indépendance** ***(0.50 pts)***, ce qui signifie qu'il n'y a pas de preuve statistiquement significative de **dépendance** dans la suite de nombres pour ce test de runs.

Exercice 3 (8 pts)

1. **Matrice de transition**: ***(0.5 pts)***

$$P = \begin{array}{c} \\ C \\ P \\ S \\ A \\ D \end{array} \begin{pmatrix} C & P & S & A & D \\ 0.2 & 0 & 0.7 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15 & 0.2 & 0.65 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les états absorbants sont : **Diplômé** (D) et **Abandon** (A). ***(0.5 pts)***

2. **Si un étudiant est actuellement en cours** :

$$P^2 = \begin{array}{c} \\ C \\ P \\ S \\ A \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C & P & S & A & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & 0.245 & 0.26 & 0.455 \\ 0.1 & 0 & 0.395 & 0.31 & 0.195 \\ 0 & 0 & 0.0225 & 0.23 & 0.7475 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$ ***(1 pts)***

$$P^3 = \begin{array}{c} \\ C \\ P \\ S \\ A \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C & P & S & A & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.008 & 0 & 0.06475 & 0.313 & 0.61425 \\ 0.02 & 0 & 0.12925 & 0.399 & 0.45175 \\ 0 & 0 & 0.003375 & 0.2345 & 0.762125 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$ ***(1 pts)***

i. La probabilité que l'étudiant obtienne son diplôme dans 2 ans = $\mathbf{0.455}$ ***(0.25 pts)***

ii. La probabilité que l'étudiant soit en stage dans 2 ans = $\mathbf{0.245}$ ***(0.25 pts)***

iii. La probabilité que l'étudiant ait abandonné d'ici 3 ans = $\mathbf{0.313}$ ***(0.25 pts)***

3. **Probabilités d'absorption par l'état D**

Les matrices Q et R sont donnés par:

$$R = \begin{array}{c} \\ C \\ P \\ S \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.65 \end{pmatrix} \end{array} \quad et \quad Q = \begin{array}{c} \\ C \\ P \\ S \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & P & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.7 \\ 0.5 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.15 \end{pmatrix} \end{array}$$

Alors, la matrice $N = (I - Q)^{-1}$ est donné par :

$$I - Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.7 \\ 0.5 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & -0.7 \\ -0.5 & 1 & -0.3 \\ 0 & 0 & 0.85 \end{pmatrix}$$

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.25 & 0 & 1.029 \\ 0.625 & 1 & 0.868 \\ 0 & 0 & 1.176 \end{pmatrix}$$ ***(1 pts)***

$$B = N \cdot R = \begin{pmatrix} 1.25 & 0 & 1.029 \\ 0.625 & 1 & 0.868 \\ 0 & 0 & 1.176 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.331 & 0.669 \\ 0.436 & 0.564 \\ 0.235 & 0.765 \end{pmatrix}$$ ***(1 pts)***

Selon la matrice B, la probabilité qu'un étudiant suivant des cours actuellement obtienne finalement son diplôme = 0.669 ***(0.25 pts)***

4. **Probabilités d'absorption par l'état A**

Selon la matrice B, la probabilité qu'un étudiant effectuant actuellement un stage abandonne finalement = 0.235 ***(0.25 pts)***

5. **<u>Temps moyen qu'un étudiant passe dans le système</u>**

- Depuis **l'état C** : $1.25 + 0 + 1.029 \; = \; 2.297$ ans ***(0.25 pts)***
- Depuis **l'état P** : $0.625 + 1 + 0.868 \; = \; 2{,}493$ ans ***(0.25 pts)***
- Depuis **l'état S** : $0 + 0 + 1.176 \; = \; 1.176$ ans ***(0.25 pts)***

6. **<u>La distribution finale (à long terme) des étudiants entre diplômés et abandons</u>** :

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.331 & 0.669 \\ 0.436 & 0.564 \\ 0.235 & 0.765 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.314 & 0.686 \end{pmatrix}$$

La distribution finale : **31%** abondons et **69%** diplômés ***(1 pts)***