

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Mohamed Seddik Benyahia -Jijel-
Faculté des sciences exactes et informatique
Département de Mathématiques



Théorie des graphes

Moussa Ahmia

Enseignant chercheur

**Ce cours s'adresse aux étudiants de Licence Mathématiques Appliquées.
2024-11-14**

Table des matières

Introduction générale	6
1 Définitions et concepts de base	8
1.1 Introduction	8
1.2 Définitions	8
1.2.1 La représentation graphique	9
1.2.2 Notations	13
1.3 Le théorème fondamental des graphes : formule de degré	14
1.4 La représentation matricielle d'un graphe	15
1.4.1 La matrice d'adjacence	15
1.4.2 La matrice d'incidence	16
1.5 Graphes particuliers	18
1.5.1 Sous graphe	18
1.5.2 Graphe partiel	18
1.5.3 Sous graphe partiel	20
1.5.4 Complément d'un graphe	20
1.6 Propriétés des graphes	20
1.6.1 Graphe complet	21
1.6.2 Graphe régulier	21
1.6.3 Graphe symétrique	21
1.6.4 Graphe antisymétrique	22
1.6.5 Graphe transitif	22
1.6.6 Graphe biparti	23
1.6.7 Graphe multiparti	24
1.6.8 Stable et clique	24
1.7 Isomorphisme dans les graphes	25
1.8 Exercices	27
2 Connexité dans les graphes	29
2.1 Chaînes et chemins	29
2.2 Cycles et circuits	32

2.3	Connexité	34
2.3.1	Composantes connexes	34
2.3.2	Graphe k -Connexe	35
2.4	Forte connexité	36
2.4.1	Composantes fortement connexes	36
2.4.2	Graphe réduit	37
2.5	Cocycles et cocircuits	37
2.6	Parcours Eulérien	38
2.7	Parcours Hamiltonien	41
2.8	Exercices	43
3	Les graphes planaires	45
3.1	Définitions et caractérisation	45
3.1.1	Caractérisation des graphes planaires	47
3.2	Graphe dual	51
3.3	Exercices	53
4	Les arbres	55
4.1	Définitions	55
4.2	Caractérisation des arbres	56
4.3	Arbre couvrant minimal	60
4.3.1	Application	62
4.3.2	Algorithme de Prim	62
4.3.3	Algorithme de Kruskal	63
4.4	Exercices	65
5	Cycles et cocycles	66
5.1	Cycles et cocycles dans les graphes orientés	66
5.1.1	Représentation vectorielle d'un cycle et cocycle	66
5.1.2	Base de cycles et base de cocycles	67
5.2	Cycles et cocycles dans les graphes non orientés	72
5.2.1	Représentation vectorielle d'un cycle et cocycle	72
5.2.2	L'orthogonalité entre l'espace des vecteurs cycles et l'espace des vecteurs cocycles	73
5.3	Flots et tensions	73
5.3.1	Définition algébrique des flots	74
5.3.2	Opérations sur les flots	75
5.3.3	Système de générateurs des flots	76
5.3.4	Système de générateurs des tensions	78
5.4	Exercices	81

6 Problèmes de partitionnement	83
6.1 Coloration dans les graphes	83
6.1.1 Coloration des sommets	83
6.1.2 Coloration des arêtes	84
6.2 Couplage dans les graphes	86
6.3 Le transversal dans les graphes	89
6.4 Le recouvrement dans les graphes	91
6.5 Exercices	94
Bibliographie	95

Table des figures

1	Problème des ponts de Königsberg.	6
1.1	Un graphe non orienté avec $E = \{\{B, C\}, \{C, D\}, \{D, A\}, \{A, C\}\}$	9
1.2	Un graphe orienté avec $U = \{(A, B), (A, D), (C, A), (B, C), (B, E)\}$	9
1.3	Un graphe a une boucle et deux arêtes parallèles.	10
1.4	Un graphe non orienté simple avec trois sommets $\{A, B, C\}$	11
1.5	Un multigraphe avec quatre sommets $\{A, B, C, D\}$	11
1.6	Le graphe et son sous graphe.	18
1.7	Le graphe et son sous graphe.	19
1.8	Le graphe et son graphe partiel.	19
1.9	Le graphe et son graphe partiel.	19
1.10	Le graphe et son sous graphe partiel.	20
1.11	Le graphe et son complément.	21
1.12	Deux graphes complets.	21
1.13	Un graphe 2-régulier et un graphe 3-régulier.	21
1.14	Graphe symétrique.	22
1.15	Un graphe antisymétrique.	22
1.16	Un graphe transitif.	23
1.17	Un graphe biparti.	23
1.18	La graphe biparti complet $K_{3,2}$	23
1.19	Deux graphes isomorphes.	26
1.20	Un automorphisme d'un graphe.	27
3.1	Deux graphes homéomorphes.	49
3.2	Graphe avec triangle.	50
3.3	Le graphe primal et son dual.	52
4.1	Un arbre à six sommets.	55
4.2	Une forêt a sept sommets.	57
4.3	Graphe avec point d'articulation.	58
4.4	Arbre couvrant de G	58
4.5	Graphe avec arbre et son corabre	61

4.6	Graphe pondré avec le poid $\omega(G) = 21$	61
4.7	Un arbre couvrant de poids minimum $\omega(T) = 14$	61
4.8	Autre arbre couvrant de poids minimum $\omega(T') = 14$	62
4.9	L'arbre couvrant de poids minimum $\omega(MST) = 14$	63
4.10	L'arbre courant de poids minimum $\omega(F) = 14$	64
5.1	Graphe avec un cycle égal à la somme de deux cycles élémentaires.	68
5.2	Un graphe avec un flot.	74
5.3	Une tension sur un graphe avec 6 sommets.	78
6.1	Graphe a des sommets avec deux couleurs.	83
6.2	K_4 a quatre couleurs.	84
6.3	Graphe a quatre arêtes avec deux couleurs.	85
6.4	Graphe avec deux couplages.	86
6.5	Un couplage maximum et parfait.	87
6.6	Un couplage maximal et non maximum.	87
6.7	Un couplage maximum et non parfait.	87
6.8	Chaîne alternée de longueur impair avec un couplage maximal.	88
6.9	Un transversal dans G	89
6.10	Un graphe contient un couplage maximum E' et un transversal minimum T mais $ E' \neq T $	90
6.11	Un recouvrement.	91

Introduction générale

Prérequis : La logique mathématique, l'algèbre linéaire, le calcul matriciel et l'algorithmique.

Note : Dans ce cours, on se focalise sur les notions de base de la théorie des graphes. Il est dirigé pour les étudiants de troisième années Mathématiques Appliquées, et le contenu donné dans ce cours respecte le Canevas proposé par le ministre de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique. Les références utilisées pour rédiger ce cours sont [Ber, Bon, Die, Dro, Gon, Kau, Lab, Prin].

La théorie des graphes est un domaine très vaste et en perpétuelle évolution, tant au niveau des applications pratiques qu'en termes de recherches fondamentales, formant aujourd'hui un corpus de connaissances majeur.

La théorie des graphes a vu le jour au **XVIII^e** siècle, alors que des chercheurs tentaient de résoudre des problèmes qui étaient considérés comme de simples curiosités mathématiques. En **1736**, Euler [Eu] publia une étude dans laquelle il proposait une solution au célèbre problème des ponts de Königsberg. Ce problème consistait à déterminer s'il était possible de parcourir la ville de manière à traverser chaque pont une seule fois. La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) était traversée par la rivière Pregel et comptait deux îles, C et D , reliées entre elles ainsi qu'aux deux rives, A et B , par sept ponts, comme illustré dans la Figure 1.

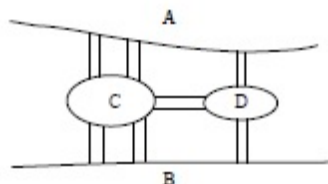


FIGURE 1 – Problème des ponts de Königsberg.

Le problème consistait à partir d'un point donné, tel que A, B, C ou D , à visiter chaque point une seule fois et à revenir au point de départ. Euler [Eu] illustra ce problème à l'aide d'un graphe et démontra qu'il n'existe pas de solution possible.

Deux autres problèmes importants en théorie des graphes ont également été proposés. **Le premier** est la conjecture des quatre couleurs, qui affirme que quatre couleurs suffisent pour colorier toute carte plane de manière à ce que deux régions partageant une frontière commune aient des couleurs différentes. Ce problème est resté sans solution pendant longtemps. Il a fallu attendre jusqu'en **1976-1977** pour que Appel et Haken [AH1, AH2] démontrent ce théorème en réduisant le problème à un nombre fini de cas particuliers et en utilisant un ordinateur pour résoudre chacun de ces cas. **Le second problème** a été introduit par Sir Hamilton [Ham]. En **1856**, il créa un casse-tête constitué d'un dodécaèdre régulier en bois (un polyèdre à 12 faces et 20 sommets), chaque face étant un pentagone régulier. À chaque sommet du dodécaèdre est fixé un clou portant le nom d'une grande ville mondiale. Le défi consiste à enrouler une ficelle de manière à ce qu'elle passe une seule fois par chacun des sommets (villes). Bien que la solution à ce problème soit relativement simple à trouver pour ce casse-tête particulier, aucune condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un tel chemin (appelé **chemin Hamiltonien**) n'a encore été établie pour les graphes en général.

La théorie des graphes est à la fois une discipline théorique et un ensemble d'outils permettant de modéliser une large gamme de problèmes en les réduisant à l'analyse de graphes. Les recherches les plus récentes dans ce domaine sont également menées par des informaticiens, en raison de l'importance croissante de l'aspect algorithmique.

Les domaines d'application des graphes sont diverses justifiant une recherche importante en algorithmique. On peut citer :

- **Les réseaux de communication** : réseaux routiers, de chemin de fer, de téléphone, de relais de télévision, réseaux électriques, réseaux des informations dans une organisation, etc ...
- **La gestion de la production et le problème d'ordonnancement des tâches** : le graphe potentiels-étapes plus connu sous le nom de graphe de **PERT** (**P**rogram **E**volution and **R**esearch **T**asck) est l'outil de résolution de ce type de problème.
- **Les flots dans les réseaux** : l'étude des circuits électriques, **Kirchof** qui a étudié les réseaux électriques, peut être considéré comme un des précurseurs de cette théorie.
- **La chimie, la biologie et l'économie** : la notion de clique (voir chapitre 1) est un exemple de l'implication de la théorie des graphes dans ces disciplines.

Définitions et concepts de base

1.1 Introduction

Les graphes représentent de manière simple et naturelle des relations entre les objets. Les outils mathématiques et les algorithmes mise au point en théorie des graphes permettent de résoudre une multitude de problèmes, tels que les problèmes de cheminement, d'ordonnancement, d'affectation, etc ...

1.2 Définitions

Définition 1.2.1. Un graphe $G = (X, E)$ **non orienté** est défini par les deux ensembles suivants :

- $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ est l'ensemble fini de sommets, $n \geq 1$;
- $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ est l'ensemble fini d'arêtes.

Chaque élément $e_i \in E$ est une paire non ordonnée de sommet, $e_i = \{x, y\}$. x et y sont appelés **extrémités** de e_i .

Comme exemple, voir Figure 1.1.

Définition 1.2.2. Un graphe **orienté** $G = (X, U)$ est défini par les deux ensembles suivants :

- $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ est l'ensemble fini de sommet, $n \geq 1$;
- $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ est l'ensemble fini d'arcs.

Chaque élément $u_i \in U$ est une paire ordonnée de sommet, $u_i = (x, y)$. x est appelé **extrémité initiale** de u_i et y est **extrémité finiale ou terminale**.

Comme exemple, voir Figure 1.2.

Remarque 1.2.1. L'ensemble d'arêtes (resp. d'arcs) U peut être vide.

Définition 1.2.3. L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets du graphe

1.2.1 La représentation graphique

On représente généralement un sommet par un point ou par un cercle. Une arête par un trait et un arc par une flèche qui peuvent être corbé.

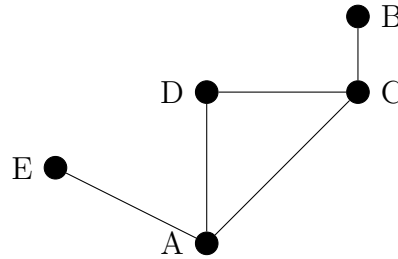


FIGURE 1.1 – Un graphe non orienté avec $E = \{\{B, C\}, \{C, D\}, \{D, A\}, \{A, C\}\}$.

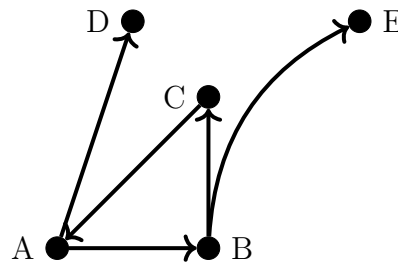


FIGURE 1.2 – Un graphe orienté avec $U = \{(A, B), (A, D), (C, A), (B, C), (B, E)\}$.

Exemple 1.2.1. L'ordre des graphes donnés dans les Figures 1.1 et 1.2 sont 5.

Définition 1.2.4. — Si les deux extrémités d'une arête (resp. d'un arc) sont confondues alors cette arête (resp. cet arc) est appelé **boucle**.

— Si deux arêtes (resp. deux arcs) possèdent les mêmes extrémités, on dit alors qu'ils sont **parallèles**.

Définition 1.2.5. Soit une arête $e = \{x, y\}$ (resp. un arc $u = (x, y)$).

- x et y sont dit sommets **adjacents** ;
- Pour le cas de l'arc u , x est dit **prédécesseur** de y et y est dit **successeur** de x ;
- x et y sont **incidents** de l'arête e (resp. de l'arc u), l'arête e (resp. l'arc u) est aussi incident(e) aux sommets x et y ;
- Deux arêtes (resp. deux arcs) sont dits adjacents s'ils ont une extrémité commune.

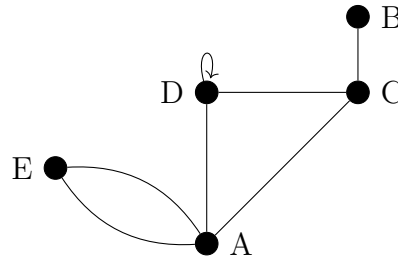


FIGURE 1.3 – Un graphe a une boucle et deux arêtes parallèles.

Exemple 1.2.2. Pour la Figure 1.2, on a :

- A et B sont adjacents ;
- A est prédécesseur de B et D , B et D sont des successeurs de A ;
- B et E sont incidents à l'arc (B, E) ;
- Les arcs (B, E) et (B, C) sont adjacents.

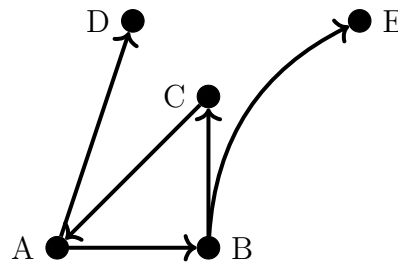
Définition 1.2.6. Soit $x \in X$ un sommet du graphe orienté $G = (X, U)$. On définit :

- $\Gamma^+(x) = \text{Succ}(x) = \{y \in X / (x, y) \in U\}$ appelé **ensemble des successeurs** de x ;
- $\Gamma^-(x) = \text{Succ}(x) = \{y \in X / (y, x) \in U\}$ appelé **ensemble des prédécesseurs** de x .

Définition 1.2.7. Soit $x \in X$ un sommet du graphe G (orienté ou non). On appelle **voisin** de x tout sommet $y \in X$ différent de x et qui est adjacent à x . Ainsi on définit l'ensemble V comme suit :

- $V(x) = \{y \in X - \{x\} / \{x, y\} \in E\}$ pour les graphes non orientés ;
- $V(x) = V^+(x) \cup V^-(x)$ où $V^+(x) = \{y \in X - \{x\} / \{x, y\} \in U\}$ et $V^-(x) = \{y \in X - \{x\} / \{y, x\} \in U\}$ pour les graphes orientés ;
- $V^+(x)$ (resp. $V^-(x)$) est appelé **ensemble des voisins externes** (resp. **ensemble des voisins internes**) de x .

Exemple 1.2.3. Soit le graphe suivant :



On a

$$\Gamma^+(A) = \{B, D\} \text{ et } \Gamma^-(A) = \{C\},$$

$$V^+(A) = \{B, D\} \text{ et } V^-(A) = \{C\}, \text{ ainsi } V(A) = \{B, C, D\}.$$

Définition 1.2.8. — Un graphe non orienté est dit **simple** s'il ne contient ni boucle ni arêtes parallèles ;

— Un graphe orienté est dit **simple** s'il ne contient pas de boucles et entre tout couple de sommets $x, y \in X$ il y a au plus un arc ayant x comme extrémité initiale et y comme extrémité terminale.

Comme exemple, voir la Figure 1.4.

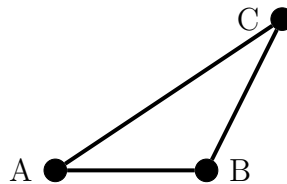


FIGURE 1.4 – Un graphe non orienté simple avec trois sommets $\{A, B, C\}$.

Définition 1.2.9. — On appelle **multiplicité** d'une arête (resp. d'un arc) $\{x_i, x_j\}$ (resp. (x_i, x_j)), la valeur m_{ij} correspondant au nombre d'arêtes qui relient x_i à x_j ;

— La multiplicité d'un graphe G est le nombre $m(G)$ correspondant au maximum des m_{ij} ;

— Un **multigraphe** est un graphe dans lequel, il existe au moins deux sommets qui possèdent plusieurs arêtes entre eux ;

— Un graphe orienté est dit **p-graphe** si $m(G) = p$.

Exemple 1.2.4. Le graphe donné dans la Figure 1.5 est un multigraphe.

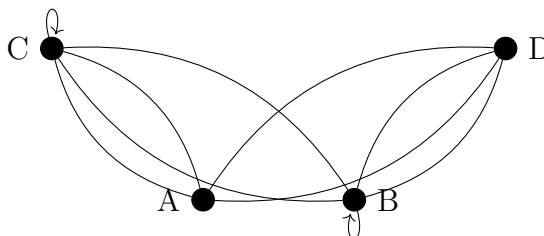
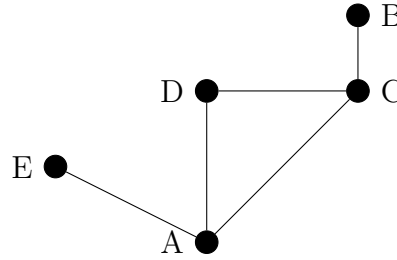


FIGURE 1.5 – Un multigraphe avec quatre sommets $\{A, B, C, D\}$.

Définition 1.2.10. Soit $G = (X, E)$ (resp. $G = (X, U)$) un graphe non orienté (resp. un graphe orienté). À tout sommet $x \in X$, on peut associer une valeur entière positive ou nulle, notée $d_G(x)$, qu'on appelle **degré** de sommet x tel que :

$$d_G(x) = \text{nombre de fois où } x \text{ est une extrémité d'une arête (resp. d'un arc).}$$

Exemple 1.2.5. Pour le graphe de la figure suivante, on a $d_G(A) = d_G(C) = 3$, $d_G(B) = d_G(E) = 1$ et $d_G(D) = 2$.



Théorème 1.2.1. Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté simple d'ordre, $n \geq 1$, avec m arête. Alors, le nombre d'arêtes m du graphe G satisfait la relation suivante :

$$m \leq \frac{n(n-1)}{2}. \quad (1.1)$$

Démonstration. Le cas $n = 1$ est trivial. Pour $n \geq 2$, chaque sommet est entouré par au plus $n - 1$ arêtes, tels que chaque arête est compté deux fois dans les degrés des sommets. Alors, comme il y a n sommets dans le graphe, on aura donc

$$m \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

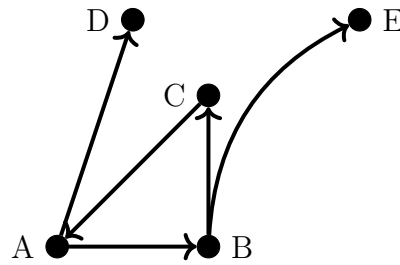
D'où le résultat. □

Définition 1.2.11. Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté.

- On appelle **demi-degré extérieur** d'un sommet $x \in X$, la valeur $d_G^+(x) = |\{u \in U / I(u) = x\}|$ où $I(u)$ est l'extrémité initiale de l'arc u ;
- On appelle **demi-degré intérieur** d'un sommet $x \in X$, la valeur $d_G^-(x) = |\{u \in U / T(u) = x\}|$ où $T(u)$ est l'extrémité terminale de l'arc u ;
- Le **degré** d'un sommet x est $d_G(x) = d_G^+(x) + d_G^-(x)$.

Exemple 1.2.6. Pour la figure suivante, on a

$$d_G^+(A) = |\{\{A, B\}, \{A, D\}\}| = 2 \text{ et } d_G^-(A) = |\{\{C, A\}\}|, \\ d_G(A) = d_G^+(A) + d_G^-(A) = 2 + 1 = 3.$$



Remarque 1.2.2. 1. Pour tout graphe G (orienté ou non), on a $d_G(x) \geq |V(x)|$;
 2. Pour tout graphe non orienté simple, on a $d_G(x) = |V(x)|$.

1.2.2 Notations

- On appelle **degré minimal** d'un graphe G noté par $\delta(G)$, le plus petit degré dans le graphe G , c'est à dire :

$$\delta(G) = \min_{x \in X} \{d_G(x)\}.$$

- On appelle **degré maximal** d'un graphe G noté par $\Delta(G)$, le plus grand degré dans le graphe G , c'est à dire :

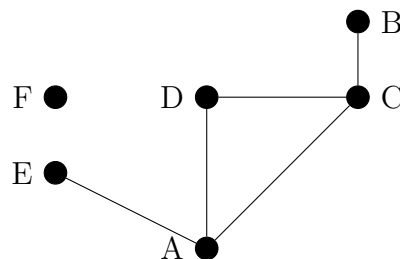
$$\Delta(G) = \max_{x \in X} \{d_G(x)\}.$$

- Si $d_G(x) = 0$, alors x est dit **isolé**.
- Si $d_G(x) = 1$, alors x est dit **pendant**.
- Une arête (resp. un arc) incident(e) à un sommet pendant est aussi dit(e) arête (resp. arc) **pendant(e)**.

Exemple 1.2.7. Pour la figure suivante, on a $d_G(A) = d_G(C) = 3, d_G(B) = d_G(E) = 1, d_G(F) = 0$ et $d_G(D) = 2$. Alors

$$\Delta(G) = \{3, 1, 3, 2, 1, 0\} = 3, \delta(G) = \{3, 1, 3, 2, 1, 0\} = 0.$$

- Le sommet F est **isolé** ;
- Les sommets B et E sont **pendants** ;
- Les arêtes $\{B, C\}$ et $\{A, E\}$ sont **pendantes**.



1.3 Le théorème fondamental des graphes : formule de degré

a) Cas d'un graphe non orienté :

Dans le théorème suivant, on donne une relation entre les degrés des sommets d'un graphe non orienté et le nombre d'arêtes de ce graphe.

Théorème 1.3.1. Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté, on a :

$$\sum_{x \in X} d_G(x) = 2 \times |E|.$$

Démonstration. Chaque arête a exactement deux extrémités. Donc elle est comptée deux fois dans le degré de chaque sommet. Alors, la somme totale des degrés est égale à deux fois le nombre total d'arêtes, ce qui donne le résultat. \square

b) Cas d'un graphe orienté :

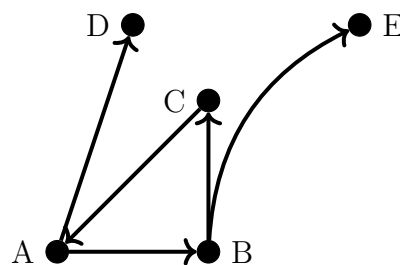
De même manière, on donne dans le théorème suivant une relation entre les degrés des sommets d'un graphe orienté et le nombre d'arcs de ce graphe.

Théorème 1.3.2. Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté, on a :

$$\sum_{x \in X} d_G(x) = 2 \times |U| \quad \text{et} \quad \sum_{x \in X} d_G^+(x) = \sum_{x \in X} d_G^-(x) = |U|.$$

Démonstration. Chaque arc a exactement une extrémité initiale et l'autre finale. Donc cet arc est compté une fois dans les demi-degrés extérieurs de son extrémité initiale et une fois dans les demi-degrés intérieurs de son extrémité finale. Alors, le nombre total d'arcs ayant une extrémité initiale (resp. une extrémité finale) est exactement la somme des demi-degrés extérieurs (resp. demi-degrés intérieurs). \square

Exemple 1.3.1. Soit le graphe suivant :



On a

$$\begin{aligned}
 d_G(A) &= d_G^+(A) + d_G^-(A) = 2 + 1 = 3, & d_G(B) &= d_G^+(B) + d_G^-(B) = 2 + 1 = 3, \\
 d_G(C) &= d_G^+(C) + d_G^-(C) = 1 + 1 = 2, & d_G(D) &= d_G^+(D) + d_G^-(D) = 0 + 1 = 1, \\
 d_G(E) &= d_G^+(E) + d_G^-(E) = 0 + 1 = 1, \\
 d_G(A) + d_G(B) &= d_G(C) + d_G(D) + d_G(E) = 3 + 3 + 2 + 1 + 1 = 10 = 2 \times 5 = 2 \times |U|.
 \end{aligned}$$

Comme conséquence de ces deux derniers théorèmes, on a le corollaire suivant.

Corollaire 1.3.1. *La somme des degrés des sommets de degrés impairs dans un graphe est toujours pair.*

Démonstration. Soit p la somme des degrés des sommets de degré impair et q la somme des degrés des sommets de degré pair. Donc, il est facile de voir que $p + q = \sum_{x \in X} d_G(x) = 2 \times |E|$ (resp. $p + q = \sum_{x \in X} d_G(x) = 2 \times |U|$) qui est pair. Alors, p (i.e. la somme des degrés des sommets de degrés impairs) est pair. \square

1.4 La représentation matricielle d'un graphe

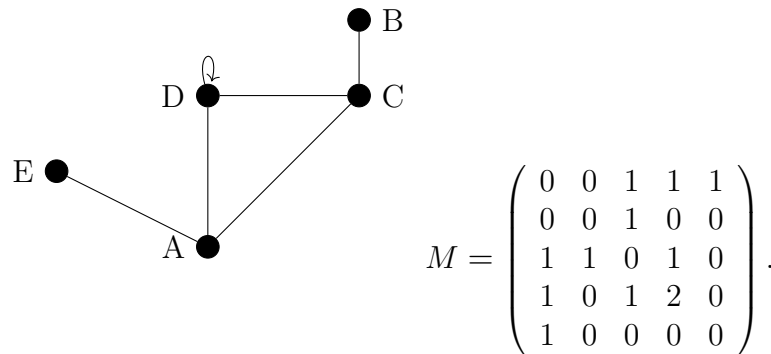
1.4.1 La matrice d'adjacence

À tout graphe G d'ordre n , on associe une matrice de n lignes et n colonnes dont les éléments sont notés M_{ij} .

a) **Cas d'un graphe non orienté :** Pour $G = (X, E)$, on a

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } \{x_i, x_j\} \in E, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 1.4.1. *La matrice d'adjacence du graphe suivant est :*



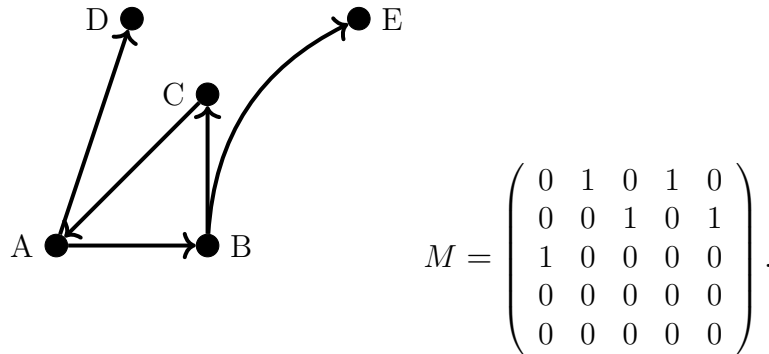
- Propriété 1.4.1.** — La matrice d'adjacence M d'un graphe non orienté est toujours symétrique ;
- La somme d'une ligne k = la somme d'une colonne $k = d_G(k)$;
 - La boucle est comptée deux fois.

b) Cas d'un graphe orienté : Pour $G = (X, U)$, on a M_{ij} représente le nombre d'arcs ayant i comme extrémité initiale et j comme extrémité terminale, tel que :

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (x_i, x_j) \in U \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Propriété 1.4.2.** — Les coefficients de la matrice d'adjacence M d'un graphe orienté simple sont binaires avec la diagonale est complètement des 0 ;
- La somme d'une ligne $i = d_G^+(i)$;
 - La somme d'une colonne $j = d_G^+(j)$.

Exemple 1.4.2. La matrice d'adjacence du graphe suivant est :



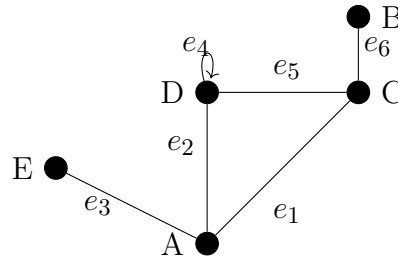
1.4.2 La matrice d'incidence

À tout graphe d'ordre n avec m arêtes (resp. m arcs), on associe une matrice de n lignes et m colonnes dont les éléments sont notés M_{ij} .

a) Cas d'un graphe non orienté : Pour $G = (X, E)$, on a M_{ij} représente le nombre de fois où le sommet i est incident à l'arête j , tel que

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si le sommet } i \text{ est incident à l'arête } j, \\ 2, & \text{si l'arête } j \text{ est une boucle sur le sommet } i, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 1.4.1. Si deux colonnes k et j sont identiques dans la matrice d'incidence, alors les arêtes k et j sont parallèles.



La matrice d'incidence du graphe ci-dessus est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

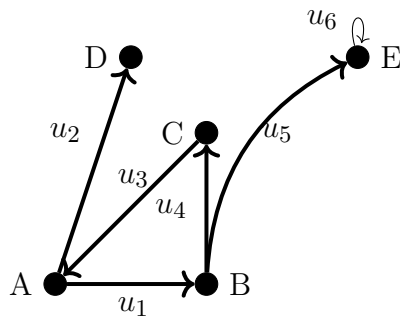
b) Cas d'un graphe orienté : Pour $G = (X, U)$, l'élément M_{ij} de la matrice d'incidence M en ligne i et colonne j vaut

$$M_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{si l'arête } j \text{ sort du sommet } i, \\ 1, & \text{si l'arête } j \text{ entre dans le sommet } i, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 1.4.2. — Une colonne nulle représente une boucle. Dans ce cas, toute boucle dans un graphe G est détectée mais son emplacement ne peut pas être précisé à partir de la matrice d'incidence.

— La somme des éléments de n'importe quelle colonne dans la matrice d'incidence est toujours nulle.

Exemple 1.4.3. La matrice d'incidence du graphe suivant est :



$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.5 Graphes particuliers

Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté (resp. $G = (X, U)$ un graphe orienté).

1.5.1 Sous graphe

Soit $A \subset X$ un sous ensemble de sommets de X . Notons E_A (resp. U_A) l'ensemble d'arêtes (resp. des arcs) de G ayant leurs deux extrémités dans A , c'est à dire :

$$E_A = \{e = \{x, y\} / x \in A \text{ et } y \in A\},$$

$$U_A = \{u = (x, y) / x \in A \text{ et } y \in A\}.$$

Définition 1.5.1. Un **sous graphe** de G engendré par l'ensemble de sommets A est le graphe $G_A = (A, E_A)$ (resp. $G_A = (A, U_A)$).

Exemple 1.5.1. A) Pour le graphe de la Figure 1.6, on a

$$X = \{A, B, C, D, E, F\} \text{ et } E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}.$$

Soit $A = \{A, D, E, F\} \subset X$, alors $G_A = (A, E_A)$ où

$$E_A = \{e = \{x, y\} / x \in A \text{ et } y \in A\} = \{e_2, e_3\}.$$

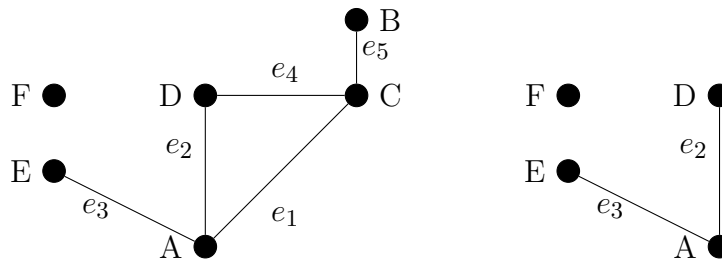


FIGURE 1.6 – Le graphe et son sous graphe.

B) Pour le graphe de la Figure 1.7, on a $X = \{A, B, C, D, E\}$ et $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$.

Soit $A = \{A, B, E\} \subset X$, alors $G_A = (A, U_A)$ où

$$U_A = \{u = (x, y) / x \in A \text{ et } y \in A\} = \{u_1, u_5, u_6\}.$$

1.5.2 Graphe partiel

Soit $V \subset E$ (resp. $V \subset U$) un sous ensemble d'arêtes (resp. d'arcs).

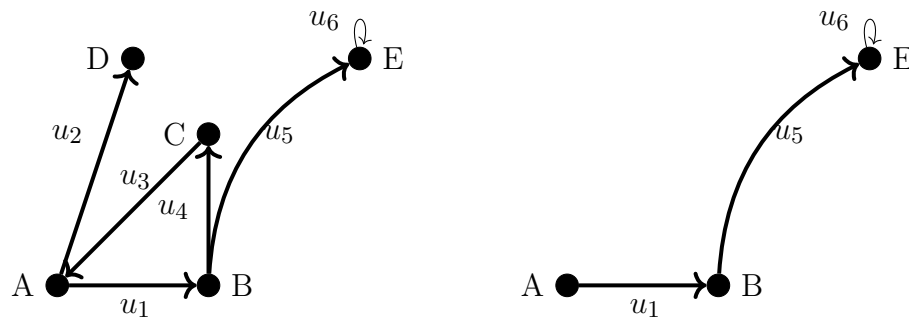


FIGURE 1.7 – Le graphe et son sous graphe.

Définition 1.5.2. Un **graphe partiel** de G engendré par l'ensemble d'arêtes (resp. d'arcs) V est le graphe $G_V = (X, V)$.

Exemple 1.5.2. A) Pour la figure suivante :

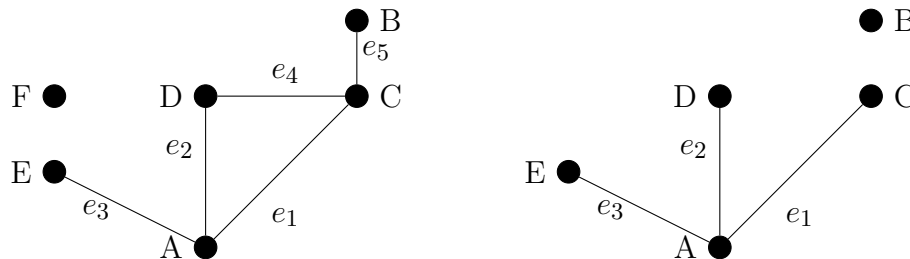


FIGURE 1.8 – Le graphe et son graphe partiel.

On a le graphe non orienté $G = (X, E)$ tel que

$$X = \{A, B, C, D, E, F\} \text{ et } E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}.$$

Et $V = \{e_1, e_2, e_3\} \subset E$, alors le graphe partiel de G est $G_V = (X, V)$.

B) Pour la figure suivante :

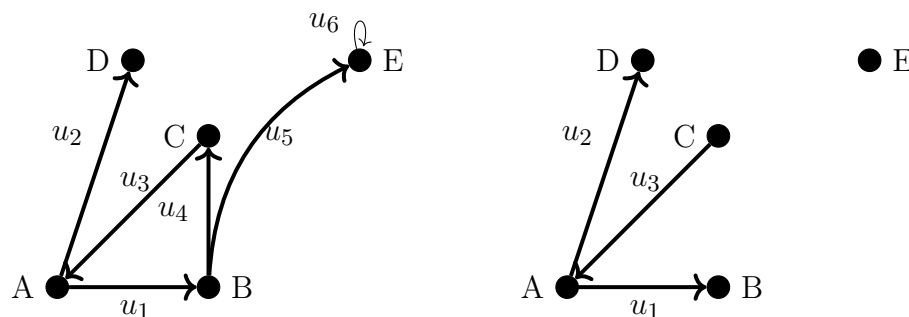


FIGURE 1.9 – Le graphe et son graphe partiel.

On a le graphe orienté $G = (X, U)$ tel que

$$X = \{A, B, C, D, E\} \text{ et } U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}.$$

Et $V = \{u_1, u_2, u_3\} \subset U$, alors le graphe partiel de G est $G_V = (X, V)$.

1.5.3 Sous graphe partiel

Soit $A \subseteq X$ un sous ensemble de sommets de X et $V \subseteq E$ (resp. $V \subseteq U$) un sous ensemble d'arêtes de E (resp. d'arcs de U).

Définition 1.5.3. Un **sous graphe partiel** de G engendré par l'ensemble de sommets A et l'ensemble d'arêtes (resp. d'arcs) V est le graphe $G_{A,V} = (A, V_A)$ où V_A est l'ensemble d'arêtes (resp. d'arcs) de V qui ont leurs deux extrémités dans A .

Exemple 1.5.3. Pour la figure suivante, on a le graphe $G = (X, E)$ non orienté tel que

$$X = \{A, B, C, D, E, F\} \text{ et } E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\},$$

$A = \{A, C, D, F\} \subset X$ et $V = \{e_1, e_2, e_3\} \subset E$, alors le sous graphe partiel de G est $G_{A,V} = (A, V_A)$ où $V_A = \{e_1, e_2\}$.

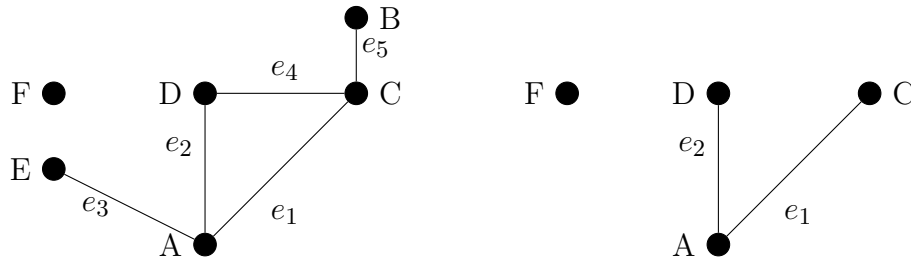


FIGURE 1.10 – Le graphe et son sous graphe partiel.

1.5.4 Complément d'un graphe

Définition 1.5.4. Le **graphe complémentaire** de $G = (X, E)$ (resp. $G = (X, U)$) noté $\overline{G} = (X, \overline{E})$ (resp. $\overline{G} = (X, \overline{U})$), est le graphe ayant le même ensemble de sommets X et tel que deux sommets distincts de \overline{G} soient adjacents si et seulement si s'ils ne sont pas adjacents dans G , c'est à dire :

$$\begin{aligned}\overline{E} &= \{\{x, y\} \in X \times X / \{x, y\} \notin E\}, \\ \overline{U} &= \{\{x, y\} \in X \times X / (x, y) \notin U\}.\end{aligned}$$

1.6 Propriétés des graphes

Soit $G = (X, E)$ (resp. $G = (X, U)$) un graphe non orienté (resp. orienté).

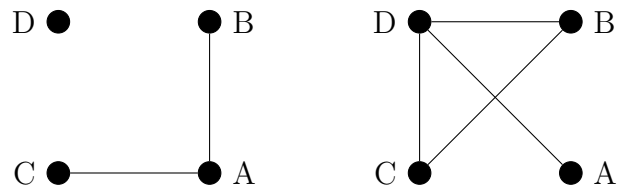


FIGURE 1.11 – Le graphe et son complément.

1.6.1 Graphe complet

Propriété 1.6.1 (Cas non orienté). G est **complet** si et seulement si $\forall x \neq y \in X, \{x, y\} \in E$.

Propriété 1.6.2 (Cas orienté). G est **complet** si et seulement si $\forall x \neq y \in X, (x, y) \in U$.

Notation : Un graphe simple complet d'ordre n est noté K_n .

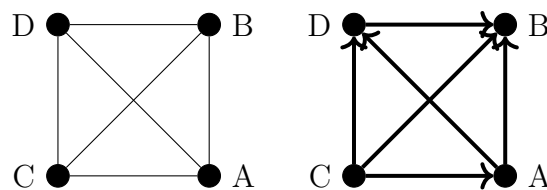


FIGURE 1.12 – Deux graphes complets.

1.6.2 Graphe régulier

Propriété 1.6.3. Soit k un entier strictement positif. G est k -**régulier** si $\forall x \in X$ on a $d_G(x) = k$. En d'autres termes $\delta(G) = \Delta(G) = k$.

Exemple 1.6.1. Le graphe à gauche est 2-régulier et le graphe à droite est 3-régulier.

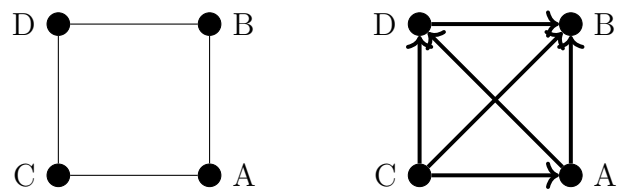


FIGURE 1.13 – Un graphe 2-régulier et un graphe 3-régulier.

1.6.3 Graphe symétrique

Cette propriété est spécifique aux graphes orientés.

Propriété 1.6.4. G est **symétrique** si et seulement si $\forall x, y \in X, (x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \in U$.

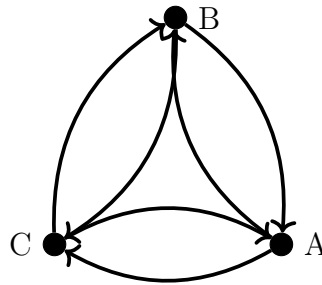


FIGURE 1.14 – Graphe symétrique.

1.6.4 Graphe antisymétrique

Cette propriété est spécifique aux graphes orientés.

Propriété 1.6.5. G est **antisymétrique** si et seulement si $\forall x, y \in X, (x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \notin U$.

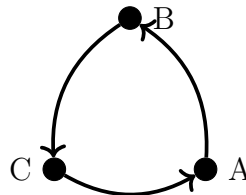


FIGURE 1.15 – Un graphe antisymétrique.

1.6.5 Graphe transitif

Cette propriété est spécifique aux graphes orientés.

Propriété 1.6.6. G est **transitif** si et seulement si $\forall x, y, z \in X, (x, y) \in U$ et $(y, z) \in U \Rightarrow (x, z) \in U$.

Exemple 1.6.2. Le graphe suivant est transitif.

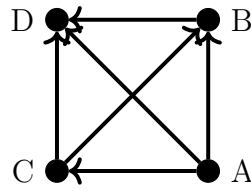


FIGURE 1.16 – Un graphe transitif.

1.6.6 Graphe biparti

Propriété 1.6.7. G est **biparti** si et seulement si l'ensemble de ses sommet X admet une partition en deux sous ensembles X_1 et X_2 avec $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ et $X_1 \cup X_2 = X$. Tels que

- Dans le cas **non orienté** : $\forall \{x, y\} \in E$ on a $(x \in X_1 \text{ et } y \in X_2)$ ou $(x \in X_2 \text{ et } y \in X_1)$;
- Dans le cas **orienté** : $\forall (x, y) \in U \Rightarrow x \in X_1 \text{ et } y \in X_2$.

Exemple 1.6.3. Le graphe suivant est biparti.

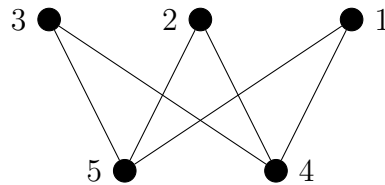
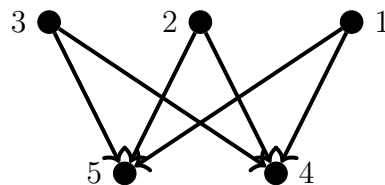


FIGURE 1.17 – Un graphe biparti.

Propriété 1.6.8. G est **biparti complet** si et seulement si $\forall x \in X_1$ et $\forall y \in X_2 \Rightarrow \{x, y\} \in E$ (resp. $(x, y) \in U$).

Notation : Un graphe simple et biparti complet $G = (X_1 \cup X_2, E)$ (resp. $G = (X_1 \cup X_2, U)$), avec $|X_1| = p$ et $|X_2| = q$, est noté $K_{p,q}$.

Exemple 1.6.4. Le graphe suivant est $K_{3,2}$.

FIGURE 1.18 – La graphe biparti complet $K_{3,2}$.

1.6.7 Graphe multiparti

Propriété 1.6.9. G est **multiparti** si et seulement si l'ensemble de ses sommets X admet une partition en p sous ensembles X_1, \dots, X_p avec $X_i \cap X_j = \emptyset$ ($i \neq j$) et $\cup_{i=1}^p X_i = X$. Tels que

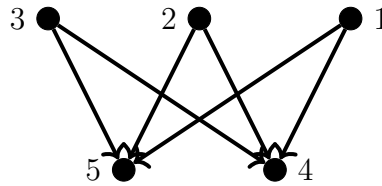
- Dans le cas **non orienté** : $\forall \{x, y\} \in E$ on a $(x \in X_k \text{ et } y \in X_{k+1})$ ou $(x \in X_{k+1} \text{ et } y \in X_k)$, avec $1 \leq k \leq p-1$;
- Dans le cas **orienté** : $\forall (x, y) \in U \Rightarrow x \in X_k \text{ et } y \in X_{k+1}$, avec $1 \leq k \leq p-1$.

1.6.8 Stable et clique

Propriété 1.6.10. On appelle **stable** dans G un sous ensemble de sommets $S \subseteq X$ où le sous graphe engendré par S est formé de sommets isolés (ne contient aucune arête (resp. aucun arc)).

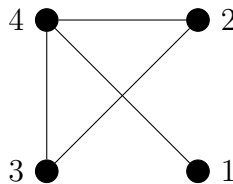
Remarque 1.6.1. Chaque partition d'un graphe biparti est un stable.

Exemple 1.6.5. Dans le graphe suivant $S_1 = \{1, 2, 3\}$ et $S_2 = \{4, 5\}$ sont des stables.



Propriété 1.6.11. On appelle **clique** dans G un sous ensemble de sommets $C \subseteq X$ où le sous graphe engendré par C est un graphe complet.

Exemple 1.6.6. Dans le graphe suivant $C = \{2, 3, 4\}$ est une clique.



Proposition 1.6.1. Si S est le plus grand stable dans G , alors

- (i) $|S| \leq$ le nombre de cliques dans G ;
- (ii) $|S| =$ le nombre minimal de cliques dans G .

Démonstration. (i) Soit S un ensemble stable maximal dans le graphe G (c'est à dire la plus grande stable), soit $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ une partition de l'ensemble X en cliques maximales.

Puisque S est un ensemble stable maximal, il ne contient aucune arête. Cela signifie que chaque clique C_i de \mathcal{C} , S doit contenir au plus un sommet de C_i . Si S contenait deux sommets d'une même clique C_i , cela contredirait la définition d'un stable, car les sommets d'une clique sont tous adjacents les uns aux autres.

Par conséquent, le nombre de sommets dans S est au plus le nombre de cliques dans la partitions \mathcal{C} . Cela peut être formellement écrit $|S| \leq |\mathcal{C}|$.

Donc, $|S| \leq$ le nombre de cliques dans G .

(ii) Soit $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ une partition de l'ensemble X en cliques minimales.

1) On montre que $|S| \leq |\mathcal{C}|$: Soit S un ensemble stable maximal de G . Chaque sommet de S doit appartenir à une clique distincte dans \mathcal{C} . En effet, si deux sommets non adjacents appartiennent à la même clique, alors ils seraient adjacents dans cette clique, ce qui contredit leur indépendance. Par conséquent le nombre de clique dans \mathcal{C} doit être au moins égal à la taille d'un ensemble stable maximal. Donc, $|S| \leq |\mathcal{C}|$.

2) On montre que $|\mathcal{C}| \leq |S|$: Inversement, chaque clique C_i contient des sommets qui peuvent appartenir à un ensemble stable maximal. Puisque chaque sommet de G doit appartenir à au moins une clique dans \mathcal{C} , on peut associer chaque clique à un sommet unique dans un ensemble stable. Cela signifie que le nombre de cliques dans \mathcal{C} doit être au plus à la taille d'un ensemble stable maximal. Donc, $|\mathcal{C}| \leq |S|$.

Puisque nous avons $|S| \leq |\mathcal{C}|$ et $|\mathcal{C}| \leq |S|$, il en découle que $|S| = |\mathcal{C}|$.

□

De même façons, on établit les résultats suivants.

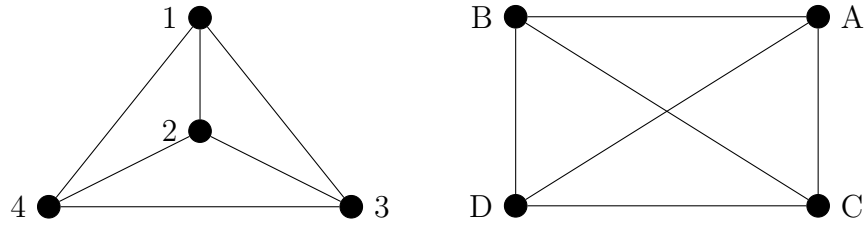
Proposition 1.6.2. *Si C est le plus grand clique dans G , alors*

- (i) $|C| \leq$ le nombre de stables dans G ;
- (ii) $|C| =$ le nombre minimal de stables dans G .

1.7 Isomorphisme dans les graphes

Définition 1.7.1 (Cas non orienté). *Soient deux graphes non orientés $G_1 = (X_1, E_1)$ et $G_2 = (X_2, E_2)$. On dit que G_1 et G_2 sont **isomorphes**, et on note $G_1 \equiv G_2$, si et seulement si $\exists \varphi : X_1 \rightarrow X_2$ une bijection telle que $\forall x, y \in X_1, e = \{x, y\} \in E_1 \Rightarrow \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E_2$.*

Exemple 1.7.1. *Dans la figure suivante, on a deux graphes isomorphes ont quatre sommets.*



Définition 1.7.2 (Cas orienté). Soient deux graphes orientés $G_1 = (X_1, U_1)$ et $G_2 = (X_2, U_2)$. On dit que G_1 et G_2 sont **isomorphes**, et on note $G_1 \equiv G_2$, si et seulement si $\exists f : X_1 \rightarrow X_2$ et $\exists g : U_1 \rightarrow U_2$ deux bijections telles que $\forall u = (x, y) \in U_1 \Rightarrow g(u) = (f(x), f(y)) \in U_2$.

Exemple 1.7.2. Dans la Figure 1.19, on a un deux graphes isomorphes ont cinq sommets.

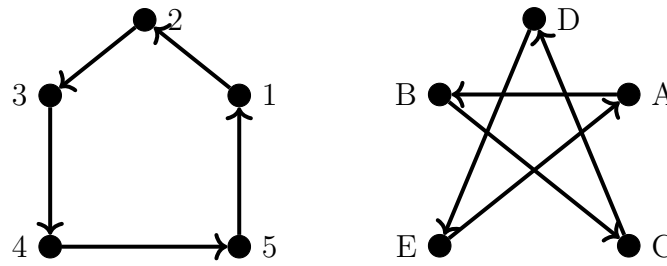


FIGURE 1.19 – Deux graphes isomorphes.

Proposition 1.7.1. Soient deux graphes isomorphes $G_1 = (X_1, E_1) \equiv G_2 = (X_2, E_2)$ (resp. $G_1 = (X_1, U_1) \equiv G_2 = (X_2, U_2)$), alors $|X_1| = |X_2|$ et $|E_1| = |E_2|$ (resp. $|U_1| = |U_2|$) et $\forall x \in X_1$ de degré $d_{G_1}(x)$, $\exists y \in X_2$ de degré $d_{G_2}(y) = d_{G_1}(x)$.

Remarque 1.7.1. La réciproque n'est pas toujours vraie. On peut trouver deux graphes non isomorphes ayant le même nombre de sommets et le même nombre d'arêtes (resp. d'arcs).

Définition 1.7.3. Soit $G = (X, E)$ (resp. $G = (X, U)$) un graphe non orienté (resp. orienté). Un **automorphisme** de G est un isomorphisme de G dans G .

Proposition 1.7.2. Soit $G = (X, E)$ un graphe simple non orienté et φ un automorphisme de G . Alors, $\forall x \in X$ on a $d_G(x) = d_G(\varphi(x))$.

Exemple 1.7.3. Dans la figure suivante, on a un automorphisme d'un graphe a quatre sommets.

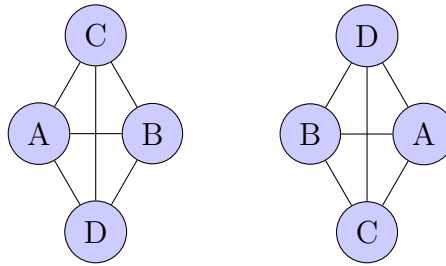


FIGURE 1.20 – Un automorphisme d'un graphe.

1.8 Exercices

Exercice 1.1. *Un tournoi d'échecs oppose 6 personnes. Chaque joueur doit affronter tous les autres.*

1. Construire un graphe représentant toutes les parties possibles
2. Quel type de graphe obtenez-vous ?
3. Si chaque joueur ne joue qu'un match par jour, combien de jours faudra-t-il pour terminer le tournoi.
4. Aidez-vous du graphe pour proposer un calendrier des matches.

Exercice 1.2. *Trois enseignants E_1, E_2 et E_3 devront donner Dimanche prochain un certain nombre de séances de cours pour trois groupes C_1, C_2 et C_3 :*

E_1 enseigne C_1 pendant deux heures et C_2 pendant une heure ;

E_2 enseigne C_1 pendant une heure, C_2 pendant une heure et C_3 pendant une heure ;

E_3 enseigne C_1 pendant une heure, C_2 pendant une heure et C_3 pendant deux heures.

1. Proposer un graphe pour représenter cette situation ? Quel est le type de graphe ?
2. Donner le nombre minimal des créneaux horaires ? En utilisant les graphes, proposer un emploi du temps

Exercice 1.3. 1. Dessiner un graphe non orienté complet à 4 sommets.

2. Quel est le degré des sommets de ce graphe ?
3. Combien d'arêtes possède-t-il ?
4. Généralisez ces résultats à un graphe simple complet ayant n sommets.

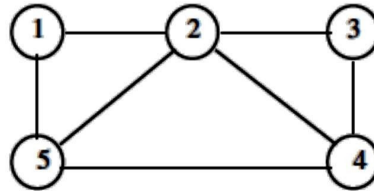
Exercice 1.4. *On considère le graphe orienté $G = (X, U)$ tel que*

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, U = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)\}$$

1. Tracer le graphe G .
2. Quels sont les arcs incidents aux sommets 1 et 2.
3. Ce graphe possède-t-il une boucle ?

4. Donner le demi-degré extérieur de 2 et le demi-degré intérieur de 4.
5. Donner les sommets prédécesseurs de 4 et les sommets successeurs de 2.
6. Donner un graphe partiel, sous-graphe et sous-graphe partiel de ce graphe.

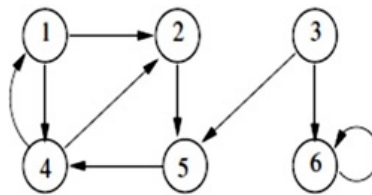
Exercice 1.5. I) Donnez les représentations par matrice d'adjacence et d'incidence du graphe non orienté suivant :



1. Quel est le degré minimal et maximal du graphe précédent.
2. Donner le complément du graphe précédent.

II)

Donner les représentations par matrice d'adjacence et d'incidence du graphe orienté suivant :



1. Quel est le degré minimal et maximal du graphe précédent.
2. Donner le complément du graphe précédent.

Exercice 1.6. Montrez qu'un graphe simple a un nombre pair de sommets de degré impair.

Exercice 1.7. On s'intéresse aux graphes 3-réguliers.

1. Construisez de tels graphes ayant 4, 5, 6, puis 7 sommets.
2. Qu'en déduisez-vous ? Prouvez-le !

Exercice 1.8. Montrer que :

- (i) $|C| \leq$ le nombre de stables dans G ;
- (ii) $|C| =$ le nombre minimal de stables dans G .

Connexité dans les graphes

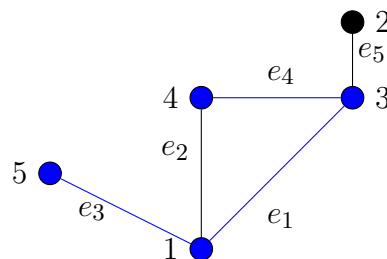
La connexité est un concept fondamental en théorie des graphes, elle se réfère à la capacité de se déplacer d'un sommet à un autre en suivant les arêtes (resp. les arcs) du graphe. Elle est une propriété essentielle qui joue un rôle central dans l'analyse et la compréhension des structures de graphes, ayant des implications profondes en théorie des graphes et dans leurs applications pratiques.

2.1 Chaînes et chemins

Définition 2.1.1. On appelle **chaîne** dans un graphe $G = (X, E)$ (resp. $G = (X, U)$) non orienté (resp. orienté) une suite alternée de sommets et d'arêtes (resp. d'arcs) $\mu = x_0 e_1 x_1 \cdots x_{k-1} e_k x_k$ (resp. $\mu = x_0 u_1 x_1 \cdots x_{k-1} u_k x_k$) telle que $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}$ (resp. $u_i = (x_i, x_{i+1})$) pour $1 \leq i \leq k$.

- On dit que cette chaîne est de longueur k relie x_0 à x_k .

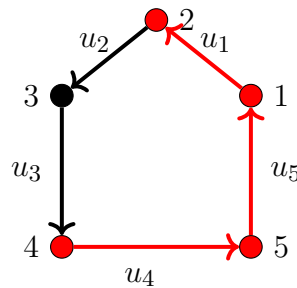
Exemple 2.1.1. Dans le graphe suivant, $\mu = 5e_31e_3e_44$ est une chaîne (en bleu) de longueur 3.



Définition 2.1.2. On appelle **chemin** dans un graphe orienté $G = (X, U)$ une suite alternée de sommets et d'arcs $\gamma = x_0 u_1 x_1 \cdots x_{k-1} u_k x_k$ telle que $u_i = (x_i, x_{i+1})$ pour $1 \leq i \leq k$.

- On dit que ce chemin est de longueur k relie x_0 à x_k .

Exemple 2.1.2. Dans le graphe suivant, $\gamma = 4u_45u_51u_12$ est un chemin (en rouge) dans longueur 3.



Définition 2.1.3. On dit qu'une **chaîne simple** (resp. **chemin simple**) si toutes les arêtes (resp. tous les arcs) sont distinct(e)s, c'est à dire elle (resp. il) ne parcourt pas deux fois la même arête (resp. le même arc).

Exemple 2.1.3. La chaîne $\mu = 5e_31e_13e_44$ de l'Exemple 2.2.3 et le chemin $\gamma = 4u_45u_51u_12$ de l'Exemple 2.1.2 sont simples.

Définition 2.1.4. On dit qu'une chaîne est **élémentaire** (resp. un chemin est **élémentaire**) si tous les sommets les composent sont distincts, c'est à dire elle (resp. il) ne parcourt pas deux fois le même sommet (sauf pour le sommet de départ et d'arrivée qui est le même pour le cas d'un cycle (voir la définition d'un cycle)).

Exemple 2.1.4. La chaîne $\mu = 5e_31e_13e_44$ de l'Exemple 2.2.3 et le chemin $\gamma = 4u_45u_51u_12$ de l'Exemple 2.1.2 sont élémentaires.

Propriété 2.1.1. Toute chaîne (resp. tout chemin) élémentaire est simple. L'inverse c'est pas toujours vrai.

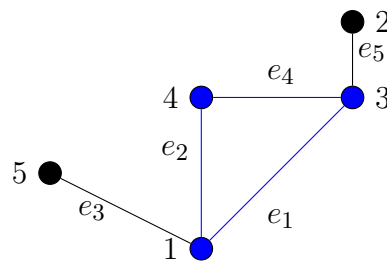
Démonstration. • Pour prouver que toute chaîne élémentaire est simple, supposons le contraire : que nous avons une chaîne élémentaire qui n'est pas simple. Cela signifierait qu'il existe au moins un sommet s_i (où $1 < i < k$) qui apparaît au moins deux fois dans la chaîne. Disons qu'il apparaît pour la première fois à la position i et pour la deuxième fois à la position j (où $i < j$). Alors la chaîne peut être écrite comme suit :

$$s_1 \cdots s_i \cdots s_j \cdots s_k$$

Puisque $s_i = s_j$, il existe une sous chaîne de la forme $s_i \cdots s_j = s_i$. Cependant, cela implique que cette sous-chaîne contient une boucle (un cycle (voir la définition d'un cycle)), ce qui signifie que certaines arêtes de cette sous-chaîne sont utilisées plus d'une fois, ce qui contredit la définition d'une chaîne élémentaire où chaque arête doit être utilisée exactement une fois.

Par conséquent, notre supposition que la chaîne élémentaire n'est pas simple est fausse. Ainsi, toute chaîne élémentaire doit être simple.

- Pour montrer que l'inverse n'est pas toujours vrai, il suffit de donner un contre exemple.



La chaîne $\mu = 1e_13e_4e_21$ est une chaîne simple car elle visite les sommets 1, 3 et 4 de manière distincte avant de revenir à 1.

Cependant, ce n'est pas une chaîne élémentaire car elle ne visite pas tous les sommets de manière distincte (elle revient à 1 sans couvrir tous les sommets du graphe).

Ainsi, nous avons montré qu'une chaîne simple d'un graphe n'est pas toujours élémentaire, en utilisant l'exemple du graphe ci-dessus.

□

Définition 2.1.5. On appelle **distance** entre deux sommets x et y noté $d(x, y)$ la longueur de la plus petite chaîne les reliant.

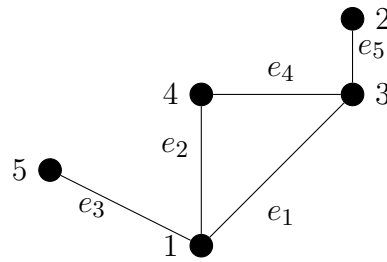
Définition 2.1.6. On appelle **diamètre** d'un graphe la plus longue des distances entre deux sommets, noté $\text{diam}(G)$.

Exemple 2.1.5. Pour le graphe suivant, on a

$$d(1, 2) = 2, d(1, 3) = 1, d(1, 4) = 1, d(1, 5) = 2, d(2, 3) = 1, d(2, 4) = 2, d(2, 5) = 3, d(3, 4) = 1, d(3, 5) = 2, d(4, 5) = 2.$$

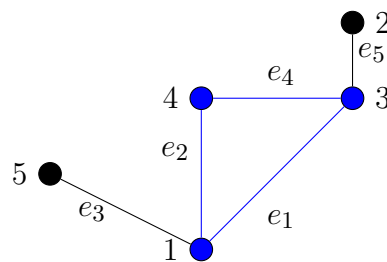
Alors

$$\begin{aligned} \text{diam}(G) &= \max\{d(1, 2), d(1, 3), d(1, 4), d(1, 5), d(2, 3), d(2, 4), d(2, 5), d(3, 4), d(3, 5), d(4, 5)\} \\ &= 3. \end{aligned}$$



Définition 2.1.7. Une chaîne (resp. un chemin) dont les sommets de départ et de fin sont les mêmes est appelé(e) **chaîne fermée** (resp. **chemin fermé**).

Exemple 2.1.6. La chaîne $\mu = 1e_13e_4e_21$ (en bleu) du graphe suivant est fermée.



2.2 Cycles et circuits

Définition 2.2.1. On appelle **cycle** dans un graphe non orienté $G = (X, E)$, toute chaîne fermée simple $\mu = x_0e_1x_1 \cdots x_{k-1}e_kx_k$ tel que $x_0 = x_k$ pour $k > 0$.

- On dit que ce cycle est de longueur k .

Exemple 2.2.1. La chaîne $\mu = 1e_13e_4e_21$ de l'Exemple 2.1.6 est un cycle.

Proposition 2.2.1. Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté.

- (i) Si le degré minimum de G $\delta(G) > 2$, alors G contient un cycle.
- (ii) Si G est simple et $\delta(G) \geq k \geq 2$, alors G comporte un cycle de longueur k .

Démonstration. (i) Considérons une chaîne $\mu = x_1 \cdots x_k$ maximale (c'est à dire si on ajoute un sommet elle ne reste plus une chaîne). Cela signifie que les sommets x_1 et x_k ont chacun des voisins qui ne sont pas dans μ (sinon, nous pourrions prolonger la chaîne μ).

Considérons le sommet x_k (extrémité de la chaîne). Puisque le degré de x_k est au moins 3 et qu'il est relié à au moins deux autres sommets dans μ (endehors de x_{k-1}), il doit y avoir une arête de x_k à un sommet précédent dans la chaîne (car sinon la chaîne ne serait pas maximale).

Si x_k a une arête vers un sommet x_i (où $1 \leq i < k$), cela forme un cycle $x_i \cdots x_k e_k x_i$.

La longueur de ce cycle est au moins 3 car il inclut au moins trois sommets distincts (par hypothèse, le degré minimum est > 2). Par conséquent G contient un cycle.

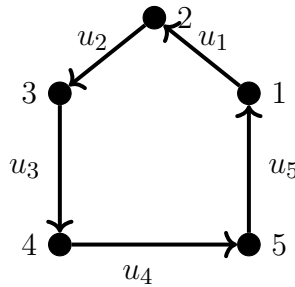
(ii) Une preuve similaire à celle de (i).

□

Définition 2.2.2. On appelle **circuit** dans un graphe orienté $G = (X, U)$, tout chemin fermé simple $\gamma = x_0 u_1 x_1 \cdots x_{k-1} u_k x_k$ tel que $x_0 = x_k$ pour $k > 0$.

- On dit que ce circuit est de longueur k .

Exemple 2.2.2. Le chemin $\gamma = 1u_12u_23u_34u_45u_51$ du graphe suivant est un circuit de longueur 5.



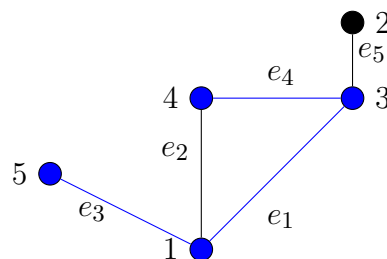
Définition 2.2.3. On dit qu'un cycle (resp. un circuit) est **élémentaire** si tous les sommets qui les composent sont distincts sauf le sommet de départ qu'il est aussi de fin.

Remarque 2.2.1. — La longueur d'un cycle ou d'un circuit est aussi égale au nombre de sommets qui les composent.

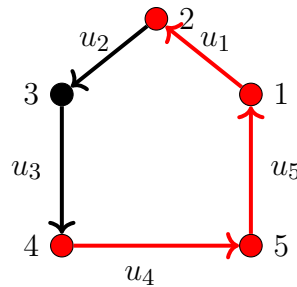
— Une boucle est un cycle (resp. circuit) élémentaire de longueur 1.

Définition 2.2.4. Une chaîne (resp. un chemin) sans cycle (resp. sans circuit) est une chaîne (resp. est un chemin) qui ne contient pas deux fois le même sommet.

Exemple 2.2.3. A) Dans le graphe non orienté suivant, $\mu = 5e_31e_13e_44$ est une chaîne sans cycle.



B) Dans le graphe orienté suivant, $\gamma = 4u_45u_51u_12$ est un chemin sans circuit.

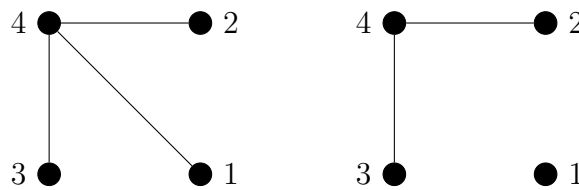


2.3 Connexité

On commence tout d'abord par la définition de la connexité dans les graphes orientés ou non.

Définition 2.3.1. Un graphe est dit **connexe** s'il existe une chaîne (resp. un chemin) joignant chaque paire de sommet x et y ($x \neq y$).

Exemple 2.3.1. Le graphe à gauche est connexe mais le graphe à droite n'est plus.

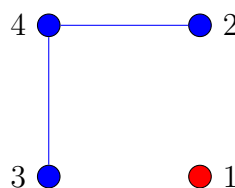


2.3.1 Composantes connexes

Considérons $G = (X, E)$ (resp. $G = (X, U)$) un graphe non orienté (resp. orienté).

Définition 2.3.2. Soit $S \subseteq X$ et G_S est le sous graphe engendré par S . On dit que G_S est une **composante connexe** de G si G_S est connexe maximale (c'est à dire, si on ajoute $x \notin S$, G_S ne serait plus connexe).

Exemple 2.3.2. Le graphe suivant contient deux composantes connexes, où la première composante a l'ensemble de sommets $S_1 = \{2, 3, 4\}$ et la deuxième composante a l'ensemble de sommets $S_2 = \{1\}$.



Remarque 2.3.1. — Le sous graphe engendré par un sommet isolé est considéré comme une composante connexe.

— Un graphe contient une seule composante connexe est dit **connexe**.

Conséquence 2.3.1. Soit G un graphe, l'ajout d'une arête a pour conséquence :

1. Soit diminuer le nombre de composantes connexes.
2. Soit créer un nouveau cycle dans le graphe.

Proposition 2.3.1. Soit G un graphe non orienté a n sommets et m arêtes. Si G est connexe alors $m \geq n - 1$.

Démonstration. On montre la propriété de la proposition par récurrence sur n . Pour $n = 1$, c'est clair.

Supposons la propriété est vraie pour tout graphe d'ordre $n > 1$ et considérons un graphe connexe G d'ordre $n + 1$. Nous considérons deux cas :

Cas 1 : Il existe une arête e telle que $G \setminus e$ n'est plus connexe. Alors $G \setminus e$ a exactement deux composantes connexes. En effet si $e = \{x, y\}$ et $G \setminus e$ n'est pas connexe, alors on peut partitionner les sommets de G en deux parties : les sommets reliés à x par une chaîne ne passant pas par e et les sommets reliés à y par une chaîne ne passant pas par e . Ce sont les deux composantes connexes de $G \setminus e$.

Soient alors c_1, c_2 les deux composantes connexes de $G \setminus e$. L'ordre n_i de c_i , pour $i = 1, 2$, est au plus n et $n_1 + n_2 = n + 1$.

Par hypothèse de récurrence, c_i a au moins $n_i - 1$ arêtes. Donc $G \setminus e$ a au moins $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n + 1 - 2 = n - 1$ arêtes. Donc G a au moins n arêtes.

Cas 2 : Il existe une arête e telle que $G \setminus e$ connexe : soit $k > 1$ le plus petit entier tel qu'il existe k arêtes e_1, \dots, e_k vérifiant $G \setminus \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ connexe et $G \setminus \{e_1, \dots, e_k\}$ n'est pas connexe. Alors $G \setminus \{e_1, \dots, e_k\}$ a deux composantes connexes et a au moins $n - 1$ arêtes.

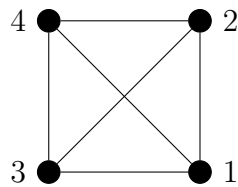
Donc G a au moins $n - 1 + k \geq n + 1 > n$ arêtes. □

2.3.2 Graphe k -Connexe

Considérons $G = (X, E)$ (resp. $G = (X, U)$) un graphe non orienté (resp. orienté).

Définition 2.3.3. Le graphe G est dit k -**connexe** si et seulement si G est connexe d'ordre $n \geq k + 1$ et il n'existe pas d'ensemble $S \subset X$ de cardinal $k - 1$ tel que le sous graphe engendré par $X \setminus S$ n'est pas connexe. C'est à dire, supprimant moins de k sommets, le graphe sera toujours connexe.

Exemple 2.3.3. Le graphe suivant est 3-connexe, car il faut supprimer au moins trois sommets pour le déconnecter.

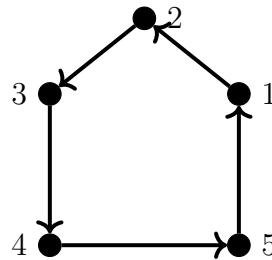


2.4 Forte connexité

Dans cette section, les graphes sont toujours orientés.

Définition 2.4.1. Un graphe orienté $G = (X, U)$ est **fortement connexe** s'il existe entre chaque paire de sommets $x, y \in X$ ($x \neq y$) un chemin de x à y ($x\sigma y$) et un chemin de y à x ($y\gamma x$).

Exemple 2.4.1. Le graphe suivant est fortement connexe.

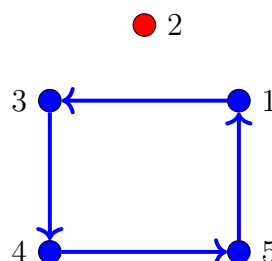


2.4.1 Composantes fortement connexes

Considérons $G = (X, U)$ un graphe orienté.

Définition 2.4.2. Soit $S \subseteq X$ et G_S est le sous graphe engendré par S . On dit que G_S est une **composante fortement connexe** de G si G_S est fortement connexe maximale (c'est à dire, si on ajoute $x \notin S$, G_S ne serait plus fortement connexe).

Exemple 2.4.2. Le graphe suivant contient deux composantes fortement connexes, où la première composante a l'ensemble de sommets $S_1 = \{1, 3, 4, 5\}$ et la deuxième composante a l'ensemble de sommets $S_2 = \{2\}$.



2.4.2 Graphe réduit

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté.

Définition 2.4.3. On appelle **graphe réduit** de G le graphe $G_R = (X_R, U_R)$ défini comme suit :

- $X_R = \{\text{Les composantes fortement connexes } c_i \text{ forment l'ensemble des sommets}\};$
- $U_R = \{(c_i, c_j) / i \neq j \text{ et } \exists x \in c_i \text{ et } \exists y \in c_j \text{ tels que } (x, y) \in U\}.$

Remarque 2.4.1. — Un graphe contient une seule composante fortement connexe est dit **fortement connexe**.

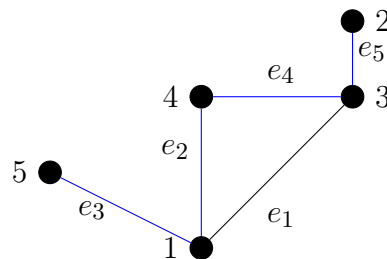
- Le graphe réduit d'un graphe ne possède pas de circuits.

2.5 Cocycles et cocircuits

Définition 2.5.1. Soit $G = (X, E)$ un graphe **non orienté**, soit $S \subseteq X$. On appelle **cocycle** dans G associé à S l'ensemble d'arêtes noté $\omega(S)$ ayant exactement une extrémité dans S , c'est à dire :

$$\omega(S) = \{e = \{x, y\} \in E / (x \in S \text{ et } y \notin S) \text{ ou } (x \notin S \text{ et } y \in S)\}.$$

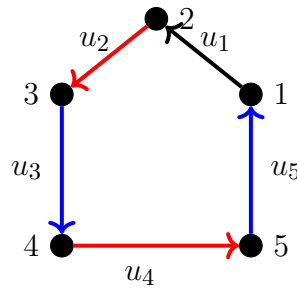
Exemple 2.5.1. Le cocyle (en bleu) de $S = \{1, 3\}$ dans le graphe suivant est $\omega(S) = \{e_2, e_3, e_4, e_5\}$.



Définition 2.5.2. Soit $G = (X, U)$ un graphe **orienté**, soit $S \subseteq X$. On appelle **cocycle** dans G associé à S l'ensemble d'arcs noté $\omega(S)$ ayant exactement une extrémité (soit initiale ou terminale) dans S , c'est à dire :

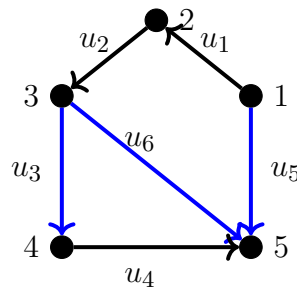
$$\begin{aligned} \omega(S) &= \omega^+(S) \cup \omega^-(S) \text{ où } \omega^+(S) = \{u = (x, y) \in U / x \in S \text{ et } y \notin S\} \text{ et} \\ \omega^-(S) &= \{u = (x, y) \in U / x \notin S \text{ et } y \in S\} \end{aligned}$$

Exemple 2.5.2. Le cocycle de $S = \{3, 5\}$ du graphe suivant est $\omega(S) = \omega^+(S) \cup \omega^-(S) = \{u_2, u_3, u_4, u_5\}$ où $\omega^+(S) = \{u_3, u_5\}$ (en bleu) et $\omega^-(S) = \{u_2, u_4\}$ (en rouge).



Définition 2.5.3. Soit $G = (X, U)$ un graphe **orienté**, soit $S \subseteq X$ tel que $\omega(S)$ un cocycle. On dit que $\omega(S)$ est un **cocircuit** dans G associé à S , si tous les arcs de $\omega(S)$ sont dans le même sens.

Exemple 2.5.3. Le cocircuit (en bleu) de $S = \{4, 5\}$ du graphe suivant est $\omega(S) = \{u_3, u_5, u_6\}$.



Proposition 2.5.1. Un graphe est fortement connexe si et seulement si $\forall S \subset X$ on a $\omega^+(S) \neq \emptyset$ ou $\omega^-(S) \neq \emptyset$.

2.6 Parcours Eulérien

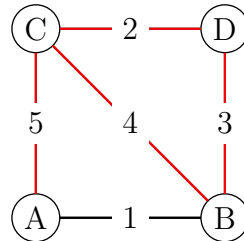
Ce parcours est nommé d'après le mathématicien Euler [Eu], qui a résolu le célèbre problème des ponts de Königsberg en **1736**, marquant ainsi la naissance de la théorie des graphes. Ce concept est fondamental en théorie des graphes et a des applications diverses, notamment en logistique, en réseau de communication et en biologie moléculaire.

Définition 2.6.1. Un **parcours Eulérien** est une chaîne (resp. un chemin) qui traverse chaque arête (resp. chaque arc) exactement une seule fois.

Remarque 2.6.1. Le parcours Eulérien peut être un cycle (resp. un circuit) s'il commence et se termine au même sommet. Dans ce cas, ce parcours s'appelle **cycle Eulérien** (resp. **circuit Eulérien**).

Définition 2.6.2. Soit $G = (X, E)$ (resp. $G = (X, U)$) un graphe non orienté (resp. orienté) à m arêtes (resp. m arcs). Une chaîne simple (resp. un chemin simple) ou cycle simple (resp. circuit simple) de longueur m est appelé **Eulérien**(ne).

Exemple 2.6.1. La chaîne en rouge dans le graphe suivant est Eulérienne.



Théorème 2.6.1. [Euler] Soit G un graphe non orienté connexe. G a une chaîne Eulérienne **si et seulement si** G a **zéro ou deux** sommets de degré impair.

Démonstration. On commence par la condition nécessaire \Rightarrow ?

Lorsque l'on parcourt une chaîne Eulérienne, chaque fois que l'on entre dans un sommet par une arête, on doit en sortir par une autre arête. Donc, excepté pour les sommets de départ et d'arrivée (si différents), le degré de chaque sommet doit être pair pour que l'on puisse toujours quitter le sommet après y être entré.

Alors, si le graphe a une chaîne Eulérienne, il doit y avoir zéro ou deux sommets avec un degré impair :

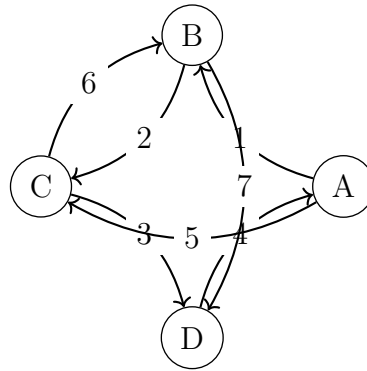
- Zéro sommet de degré impair signifie que tous les sommets ont un degré pair, ce qui permet de commencer et de terminer la chaîne au même sommet.
- Deux sommets de degré impair signifie que la chaîne doit commencer à un de ces sommets et se terminer à l'autre.

On passe à la condition suffisante \Leftarrow ? On distingue deux cas.

- Cas où G a zéro sommets de degré pair :
 - Si tous les sommets ont un degré pair, alors G a un cycle Eulérien (un cycle qui passe par chaque arête exactement une fois et revient au point de départ).
- Cas où G a deux sommets de degré impair :
 - Soit x et y les deux sommets de degré impair.
 - Ajoutons une arête fictive (x, y) , ce qui rend tous les sommets de G de degré pair, formant ainsi un graphe G' .
 - Le graphe G' a un circuit Eulérien (car tous les sommets de G' ont un degré pair).
 - En retirant l'arête fictive (x, y) de ce circuit, nous obtenons une chaîne Eulérienne dans G qui commence à x et se termine à y .

□

Exemple 2.6.2. Le graphe suivant forme un chemin Eulérien.



Conséquence 2.6.1. — Un graphe G admet une chaîne Eulérienne d'un sommet x à un autre sommet y si et seulement si $d_G(x)$ et $d_G(y)$ sont impair $\forall z \neq x$ et y de G , on a $d_G(z)$ est pair.

— Un graphe G admet une cycle Eulérien si et seulement si $\forall x$ sommet de G , on a $d_G(x)$ pair.

Proposition 2.6.1. Un graphe $G = (X, U)$ admet un circuit Eulérien **si et seulement si** $\forall x \in X, d_G^+(x) = d_G^-(x)$. Dans ce cas, le graphe G est appelé **pseudo-symétrique**.

Démonstration. — **On commence par la condition nécessaire \Rightarrow ?**

Supposons que G admet un circuit Eulérien. Pour un sommet x dans un circuit Eulérien :

- Chaque fois qu'une arête est entrée dans x (contribuant à $d_G^-(x)$), il doit y avoir une arête qui en sort (contribuant à $d_G^+(x)$) pour que le circuit puisse continuer.
- Comme le circuit revient au sommet de départ, le nombre d'arêtes entrant dans chaque sommet doit être égal au nombre d'arêtes en sortant.

Ainsi, $\forall x \in X, d_G^+(x) = d_G^-(x)$.

— **On passe à la condition suffisante \Leftarrow ?** Supposons maintenant que $\forall x \in X, d_G^+(x) = d_G^-(x)$.

Nous utiliserons le Théorème 3.1.3 pour les graphes orientés, qui stipule qu'un graphe orienté connexe admet un circuit Eulérien si et seulement si chaque sommet a un degré entrant égal à son degré sortant.

- Premièrement, nous devons vérifier que G est connexe. Si ce n'est pas le cas, nous ne pourrions pas trouver un circuit Eulérien.
- Si G est connexe, et que $\forall x \in X, d_G^+(x) = d_G^-(x)$, alors le Théorème 3.1.3 garantit l'existence d'un circuit Eulérien.

Pour construire explicitement ce circuit eulérien, nous pouvons utiliser l'algorithme suivant :

1. Choisir un sommet de départ x_0 et suivre une arête sortante non marquée pour commencer à construire un cycle.
2. Continuer à suivre les arêtes non marquées jusqu'à revenir au sommet de départ x_0 .

3. Si toutes les arêtes du graphe sont marquées, alors le cycle trouvé est un circuit Eulérien.
4. Sinon, il existe encore des arêtes non marquées. Choisir un sommet x du cycle trouvé avec des arêtes non marquées sortantes et répéter le processus en fusionnant ce nouveau cycle dans le cycle existant.
5. Répéter jusqu'à ce que toutes les arêtes soient marquées et le circuit Eulérien soit construit.

Ainsi, nous avons montré que G admet un circuit Eulérien si et seulement si $\forall x \in X, d_G^+(x) = d_G^-(x)$. \square

2.7 Parcours Hamiltonien

Le parcours Hamiltonien est un concept central en théorie des graphes. Il porte le nom du mathématicien britannique William Rowan Hamilton [**Ham**], qui a introduit cette notion au 19^{ième} siècle. Ces parcours ont des applications dans divers domaines, notamment la conception de circuits, les problèmes d'itinéraire, et les algorithmes d'optimisation, illustrant leur importance en mathématiques et en informatique.

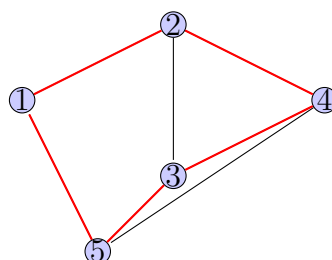
Définition 2.7.1. Un **parcours Hamiltonien** est une chaîne (resp. un chemin) qui passe chaque sommet exactement une seule fois.

Remarque 2.7.1. Le parcours Hamiltonien peut être un cycle (resp. un circuit) s'il commence et se termine au même sommet. Dans ce cas, ce parcours s'appelle **cycle Hamiltonien** (resp. **circuit Hamiltonien**).

Définition 2.7.2. Soit G un graphe d'ordre n . Une chaîne (resp. un chemin) élémentaire de longueur $n - 1$ est appelé **chaîne Hamiltonienne** (resp. **chemin Hamiltonien**).

Remarque 2.7.2. Un cycle (resp. un circuit) élémentaire de longueur n est appelé **cycle Hamiltonien** (resp. **circuit Hamiltonien**).

Exemple 2.7.1. Le chemin en rouge du graphe suivant est un **chemin** (et même **circuit**) **Hamiltonien**.



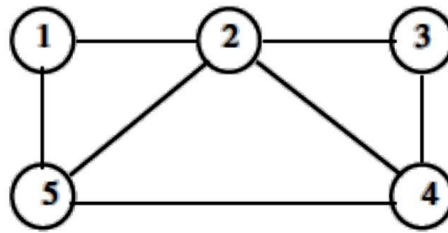
Théorème 2.7.1. *Si $G = (X, E)$ est un graphe Hamiltonien, alors tout ensemble de sommets $S \subset X$, on a le nombre de composantes connexes de sous graphe de G induit par l'ensemble $X - S$ est inférieur ou égal à $|S|$.*

Démonstration. G est un graphe Hamiltonien, ce qui signifie qu'il existe un cycle Hamiltonien C dans G qui visite chaque sommet exactement une fois, c'est à dire C est un cycle qui inclut tous les sommets de G .

Chaque sommet de S peut au plus séparer le cycle C en deux composantes connexes distinctes lorsqu'il est retiré. Donc, la suppression de k sommets (où $k = |S|$) peut créer au maximum k nouvelles composantes. Considérons la suppression d'un sommet x de S , il peut séparer le cycle en deux parties au plus. Et lorsque nous supprimons un autre sommet de S , il peut de nouveau séparer une ou deux des composantes actuelles en au plus deux nouvelles composantes. Cela signifie que chaque sommet supplémentaire retiré peut augmenter le nombre de composantes connexes d'au plus 1. Donc, après avoir retiré tous les sommets de S , le nombre total de composantes connexes résultantes est au plus $|S|$. \square

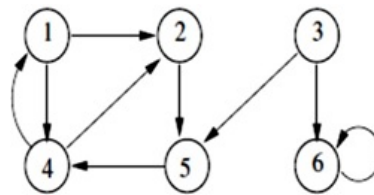
2.8 Exercices

Exercice 2.1. I) Considérons le graphe non orienté suivant :



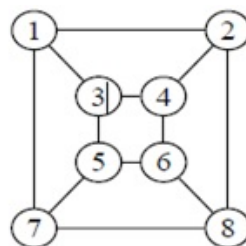
1. Donner un ensemble stable et un ensemble clique.
2. Donner une chaîne simple et une chaîne élémentaire.
3. Donner un cycle élémentaire et un cycle simple.
4. Donner un cocycle.

II) Considérons le graphe orienté suivant :

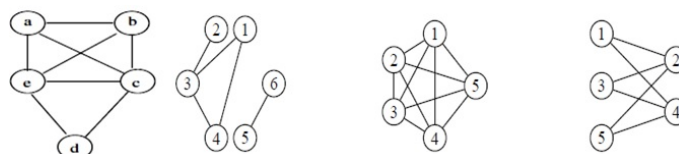


1. Donner un chemin élémentaire et un chemin non élémentaire.
2. Donner un circuit élémentaire et un circuit non élémentaire.
3. Donner un cocircuit.

Exercice 2.2. I) Montrer que le graphe suivant est biparti :



II) Les graphes suivants sont-ils Eulériens :



III) Dessinez un graphe d'ordre au moins 5 qui est :

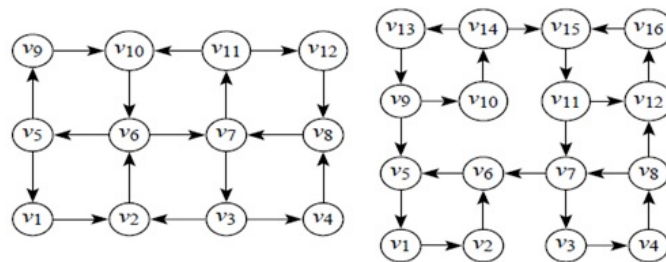
1. Hamiltonien et Eulérien.
2. Hamiltonien et non Eulérien.
3. Non Hamiltonien et Eulérien.
4. Non Hamiltonien et non Eulérien.

Exercice 2.3. 1. Soit G un graphe non Eulérien. Est-il toujours possible de rendre G Eulérien en lui rajoutant un sommet et quelques arêtes ?

2. Quels sont les graphes de diamètre 1 ?

3. Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté et non connexe. Montrer que son complémentaire $\overline{G} = (X, (X \times X) \setminus E)$ est connexe.

Exercice 2.4. Les graphes ci-dessous sont-ils fortement connexes ? Sinon, donnez leurs composantes fortement connexes et leur graphe réduit.



Les graphes planaires

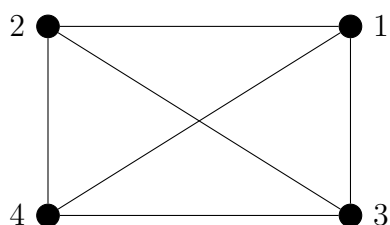
Les graphes planaires sont un domaine fascinant de la théorie des graphes, avec des applications diverses allant de l'informatique à la topologie et même en géométrie combinatoire.

3.1 Définitions et caractérisation

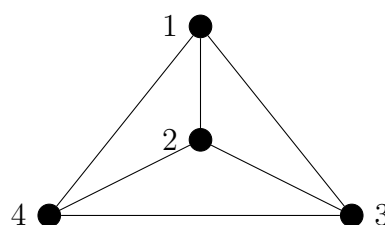
Définition 3.1.1. Soit $G = (X, E)$ (resp. $G = (X, U)$) un graphe, on dit que G est **planaire** s'il peut être dessiné sur un plan de telle manière que ses arêtes (resp. ses arcs) ne se croisent pas, sauf éventuellement aux sommets.

Définition 3.1.2. Soit $G = (X, E)$ un graphe planaire. Le graphe G est dit **planaire topologique** noté R , lorsque on rend sa représentation planaire (c'est à dire les arêtes ne se croisent pas).

Exemple 3.1.1. A) Le graphe complet à quatre sommets K_4 sous la forme de la figure (a) n'est pas planaire, mais K_4 sous la forme de la figure (b) est planaire.

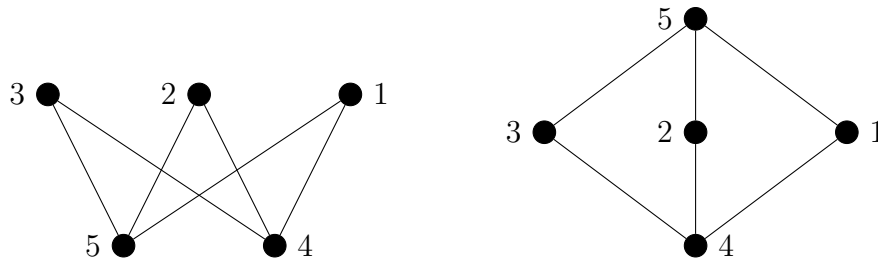


(a) G



(b) R

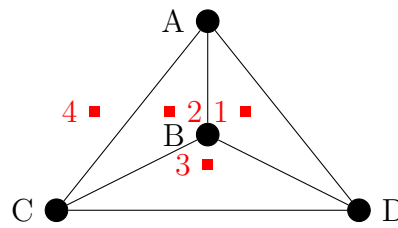
B) Le graphe biparti $K_{3,2}$ sous la forme de gauche n'est pas planaire, mais $K_{3,2}$ sous la forme de droite est planaire..



Définition 3.1.3. Soit G un graphe planaire topologique. Une **face** notée F est une région maximale du plan délimitée par un ensemble d'arêtes (resp. d'arcs) de G , et qu'en contient aucune.

- Le degré de F noté $\deg(F)$ est le nombre d'arêtes (resp. d'arcs) qui bordent F .

Exemple 3.1.2. Le graphe K_4 a quatre faces chacune est bordée par trois arêtes, c'est à dire le degré de chaque face est trois.



Théorème 3.1.1. [Formule d'Euler] Soit G un graphe planaire topologique connexe d'ordre n avec m arêtes et f faces. Alors, on a

$$n - m + f = 2.$$

Démonstration. On montre le théorème par induction. Pour $m = 1$, on a deux sommets et une face alors la formule $n - m + f = 2 - 1 + 1 = 2$ est vérifiée. Supposons que la formule est vraie pour $m \geq 1$. Et on montre qu'elle reste vraie pour $m + 1$.

Ajoutons une arête à un graphe planaire connexe à m arêtes. Cela peut se faire de deux manières :

1. **Ajout d'une arête sans créer de cycle :** cela augmente le nombre de sommets de X de 1 et le nombre d'arêtes de E de 1, mais le nombre de faces f rest le même. Ainsi, la formule devient $(n + 1) - (m + 1) + f = n - m + f$, ce qui toujours égal à 2.
2. **Ajout d'une arête créant un cycle :** cela augmente le nombre d'arêtes de E de 1, mais ne change pas le nombre de sommets de X . Cependant le nombre de faces f augmente de 1, car un cycle est créé. Ainsi, la formule devient $n - (m + 1) + (f + 1) = n - m + f$, ce qui toujours égal à 2.

Par induction, nous avons prouvé que pour tout graphe planaire connexe, la formule d'Euler $n - m + f = 2$ est vraie. □

Exemple 3.1.3. On considère un graphe planaire connexe à 20 sommets de degré 3.

Question : Déterminer le nombre de faces de ce graphe.

Démonstration. On a $n = 20$, alors $m = \frac{n \times d_G(x)}{2} = \frac{20 \times 3}{2} = 30$.

Donc le nombre de faces est : $f = m - n + 2 = 30 - 20 + 2 = 12$. □

Théorème 3.1.2. Soit G un graphe planaire topologique connexe avec m arêtes. Alors, on a

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \deg(f) = 2m,$$

où \mathcal{F} est l'ensemble des faces de G .

Démonstration. Le degré de chaque face $f \in \mathcal{F}$ est le nombre d'arêtes entourées par cette face, et chaque arête est comptée deux fois dans le degré des faces puisqu'elle apparaît sur le pourtour de deux faces exactement. Alors, la somme totale de degrés des faces égal à deux fois le nombre d'arêtes. □

Propriété 3.1.1. Si f est le nombre de faces d'un graphe planaire à m arêtes. Alors, $f \leq \frac{2m}{3}$.

Démonstration. Soit g_i le nombre d'arêtes entourées la face i , alors d'après le théorème précédent on a : $\sum_{i=1}^f g_i = 2m$.

Puisque chaque face est bordée par au moins trois arêtes, alors $g_i \geq 3$ pour tout i .

En combinant ces observations, on obtient : $\sum_{i=1}^f g_i \geq 3f$. Et comme $\sum_{i=1}^f g_i = 2m$, on obtient $2m \geq 3f$, ce qui donne :

$$f \leq \frac{2m}{3}.$$

□

D'après la propriété précédente, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 3.1.1. Si $G = (X, E)$ est un graphe planaire simple, alors $\exists x \in X$ tel que $d_G(x) \leq 5$.

3.1.1 Caractérisation des graphes planaires

Propriété 3.1.2. Soit G un graphe planaire topologique connexe avec n sommets et m arêtes. Si la plus petite face comporte p arêtes, alors $m \leq \frac{p(n-2)}{p-2}$.

Démonstration. Soit G un graphe planaire topologique avec n sommets, m arêtes et f faces tels que le pourtour de chaque face contient au moins p arêtes. D'après la **formule d'Euler** on a $f = m - n + 2$.

En faisant la somme des nombres d'arêtes autour de chaque face, on obtient exactement le double du nombre d'arêtes (Théorème 3.1). En effet, chaque arête est comptée à double puisqu'elle apparaît sur le pourtour de deux faces exactement.

Comme le pourtour de chaque face contient au moins p arêtes, on a : $2m \geq pf$. En utilisant la **formule d'Euler**, cette dernière inégalité se réécrit comme suit : $2m \geq p(m - n + 2)$ cela implique $m \leq \frac{p(n-2)}{p-2}$. \square

Propriété 3.1.3. Soit $G = (X, E)$ graphe est planaire connexe avec n sommets et m arêtes. Alors, on a $m \leq 3(n - 2)$.

Démonstration. Soit G un graphe planaire connexe avec n sommets et m arêtes. Considérons R la représentation planaire topologique de G . Soit p le plus petit nombre d'arêtes sur le pourtour d'une face de R . Chaque face contient au moins 3 arêtes sur son pourtour, on aura donc $p \geq 3$ et la Propriété 3.1.2 nous montre que $m \leq \frac{p(n-2)}{p-2} \leq 3(n - 2)$. \square

Propriété 3.1.4. Soit $G = (X_1, X_2, E)$ un graphe est biparti avec m arêtes, $|X_1| = p$ et $|X_2| = q$. Alors, on a $m \leq 2(p + q - 2)$.

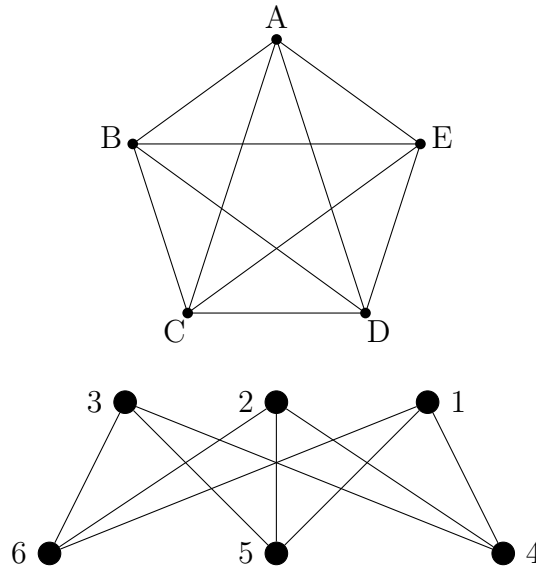
Démonstration. Pour tout graphe planaire, le nombre de faces f est donné par l'inégalité de la Propriété 3.1.1 en termes du nombre d'arêtes : $f \leq \frac{2m}{3}$. Cependant, pour un graphe biparti, chaque face doit être formée d'au moins quatre arêtes (car il n'y a pas de cycles impairs). Donc, on a en fait : $f \leq \frac{m}{2}$. La **formule d'Euler** pour le cas du graphe biparti est : $(p + q) - m + f = 2$. Comme $f \leq \frac{m}{2}$ nous pouvons substituer cette inégalité dans l'équation $(p + q) - m + \frac{m}{2} \geq 2$, ce qui implique $(p + q) - \frac{m}{2} \geq 2$. Après la simplification, on trouve : $m \leq 2(p + q - 2)$, d'où le résultat. \square

Corollaire 3.1.2. Le graphe complet K_5 n'est pas planaire.

Démonstration. Le graphe K_5 n'est pas planaire, car le nombre d'arêtes $m = 10 > 3(n - 2) = 9$ ne satisfait pas la Propriété 3.1.3. \square

Corollaire 3.1.3. Le graphe complet biparti $K_{3,3}$ n'est pas planaire.

Démonstration. Le graphe $K_{3,3}$ n'est pas planaire, car le nombre d'arêtes $m = 9 > 2(2 + 3 - 2) = 6$ ne satisfait pas la Propriété 3.1.4. \square



Remarque 3.1.1. Les deux graphes non planaires les plus simples sont K_5 et $K_{3,3}$.

Définition 3.1.4. La **subdivision** d'une arête $e = \{x, y\}$ d'un graphe $G = (X, E)$ consiste à remplacer cette arête par deux nouvelles arêtes $e_1 = \{x, z\}$ et $e_2 = \{z, y\}$ où z est un nouveau sommet n'appartenant pas à X .



- Le graphe obtenu est alors $G' = (X \cup \{z\}, E \cup \{e_1, e_2\} \setminus e)$.

Définition 3.1.5. Deux graphes sont **homéomorphes** s'ils peuvent être obtenus par une suite finie de subdivisions à partir d'un même graphe.

En particulier, si un graphe G' résulte de subdivisions d'arêtes de G , alors G et G' sont **homéomorphes**.

Exemple 3.1.4. Les deux graphes suivants sont homéomorphes.

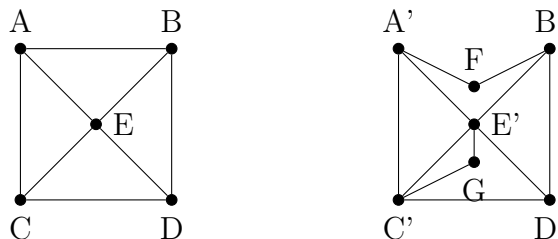


FIGURE 3.1 – Deux graphes homéomorphes.

Définition 3.1.6. Un **mineur** d'un graphe est obtenu par une succession d'opérations de suppression et de fusion de sommets.

Exemple 3.1.5. Le graphe à gauche est un mineur du graphe à droite de l'exemple précédent.

Définition 3.1.7. On dit qu'un graphe G d'ordre $n \geq 2$ est avec **triangle**, s'il existe un sous graphe complet d'ordre 3.

Exemple 3.1.6. Le graphe suivant est avec un triangle.

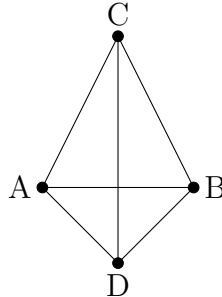


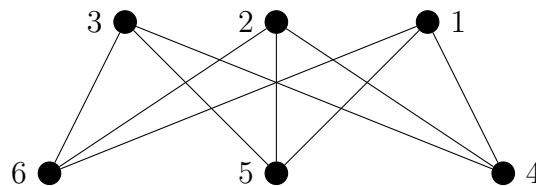
FIGURE 3.2 – Graphe avec triangle.

Propriété 3.1.5. Soit G graphe planaire connexe d'ordre $n \geq 4$ et a m arêtes. Si G est sans triangle, alors $m \leq 2(n - 2)$.

Démonstration. Étant donné un graphe planaire connexe avec $n \geq 4$ sommets, m arêtes et sans triangle. On peut considérer une représentation planaire topologique R de G . Alors R a n sommets et m arêtes et ne comporte pas de triangles. Le plus petit nombre p d'arêtes sur le pourtour d'une face de R est ≥ 4 .

La Propriété 3.1.2 valable pour tout p nous montre donc que $m \leq \frac{p(n-2)}{p-2} = 2(n-2)$. \square

Exemple 3.1.7. Le graphe $K_{3,3}$ est sans triangle et n'est pas planaire, car le nombre d'arêtes $m = 9 > 2(6 - 2) = 8$ ne satisfait pas la propriété précédente.



Le théorème de Wagner [Wag] est un résultat important en théorie des graphes, qui caractérise les graphes planaires de manière topologique.

Théorème 3.1.3. [Théorème de Wagner] Un graphe est planaire **si et seulement** s'il ne contient pas de sous-graphe mineur isomorphe à K_5 ou $K_{3,3}$. Autrement dit, tout graphe non planaire contient une **copie** d'au moins un de ces deux derniers graphes.

Le théorème suivant de Kuratowski [Kura] en 1930 est un résultat fondamental en théorie des graphes. Il établit une caractérisation des graphes planaires à l'aide de sous-graphes particuliers, à savoir K_5 et $K_{3,3}$.

Théorème 3.1.4 (Théorème de Kuratowski). *Un graphe est planaire **si et seulement** s'il ne contient pas de sous-graphe homéomorphe à K_5 ou $K_{3,3}$.*

Démonstration. — **On commence par la condition nécessaire \Rightarrow ?** Supposons que G est planaire simple, et on sait que K_5 et $K_{3,3}$ ne sont pas planaires. Un homéomorphisme de K_5 et $K_{3,3}$ impliquerait ajouter des sommets sur les arêtes sans introduire de nouvelles arêtes entre les sommets de K_5 ou $K_{3,3}$, donc ces sous graphes resteront non planaires.

Puisque G est planaire, il ne peut pas contenir un sous graphe homéomorphe à K_5 ou $K_{3,3}$.

— **On passe à la condition suffisante \Leftarrow ?** Supposons que G n'est pas planaire. Par le **Théorème de Wagner** il doit contenir une subdivision d'un graphe non planaire, qui contient un sous-graphe qui est une subdivision de K_5 ou $K_{3,3}$. Contradiction, car G ne contient ni sous-graphe homéomorphe à K_5 ni à $K_{3,3}$.

Donc, G doit être planaire par contraposée du **Théorème de Wagner**. □

Le théorème de Whitney [Whit], énoncé par Hassler Whitney en **1931**, est un résultat fondamental en théorie des graphes qui concerne la 3-connexité et la planarité des graphes.

Théorème 3.1.5 (Théorème de Whitney). *Un graphe 3-connexe planaire possède une unique représentation topologique planaire à isomorphisme près, c'est-à-dire que toute autre représentation plane de ce graphe peut être obtenue par des opérations locales de modification (flips) sans quitter le plan.*

Propriété 3.1.6. *Tout graphe 3-connexe contient un sous graphe homéomorphe à K_5 ou $K_{3,3}$ est planaire.*

Démonstration. Pour un graphe 3-connexe G , il est bien connu que si G est non planaire, alors selon le **Théorème de Whitney**, G contient nécessairement un sous-graphe homéomorphe à K_5 ou $K_{3,3}$.

En résumé, si un graphe 3-connexe est non planaire, il contient un sous-graphe homéomorphe à K_5 ou $K_{3,3}$. Si un graphe 3-connexe est planaire, alors il n'a pas de sous graphe homéomorphe à K_5 ou $K_{3,3}$. □

3.2 Graphe dual

Tout d'abord, un graphe planaire est appelé aussi **primal**.

Définition 3.2.1. Soit G un graphe primal. On appelle **dual** de G tout graphe obtenu de la façon suivante :

- Dans toute face du primal, on dessine un sommet du dual ;
- Pour toute arête séparant deux faces du primal, on dessine une arête joignant les deux sommets correspondants du dual (et qui traverse l'arête correspondante du primal).

Exemple 3.2.1. Dans la figure suivante, on a le primal (en noir) avec son dual (en rouge).

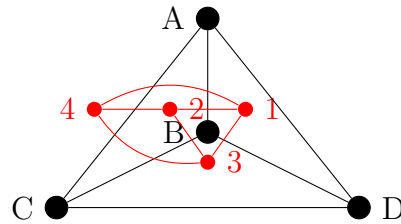


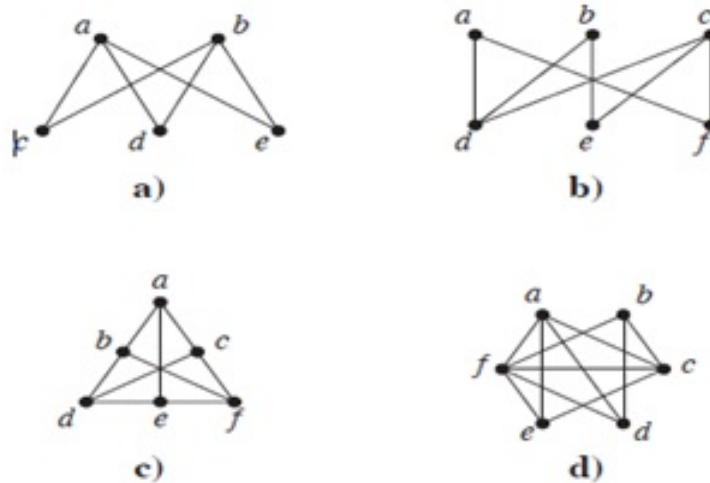
FIGURE 3.3 – Le graphe primal et son dual.

3.3 Exercices

Exercice 3.1. Pouvez-vous raccorder cinq maisons à deux réseaux utilitaires (gaz et eau) sans que les canalisations ne se croisent ?

Exercice 3.2. On considère un graphe planaire connexe à 6 sommets, chacun de degré 4. Déterminer le nombre de faces de sa représentation planaire.

Exercice 3.3. Déterminer si les graphes suivants sont des graphes planaires. Si oui, donner leur représentation planaire topologique et leur graphe dual, déterminer le nombre de faces et le degré de chaque face ainsi que la somme des degrés de toutes les faces.



Exercice 3.4. Contrôler si chacun des graphes suivants vérifie la formule d'Euler.

$s = 4$ $f = 4$ $a = 6$	$s =$ $f =$ $a =$	$s =$ $f =$ $a =$

$s =$ $f =$ $a =$	$s =$ $f =$ $a =$	$s =$ $f =$ $a =$

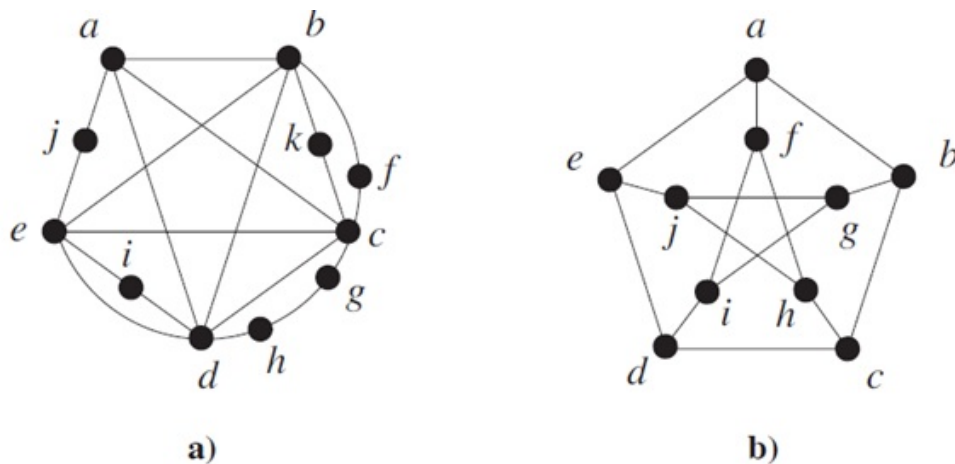
Exercice 3.5. Un circuit imprimé doit comprendre 370 liaisons reliant certaines paires de points (toutes différentes) choisies parmi 125 sommets. Peut-on dessiner ce circuit sur une seule plaque ? (Justifier)

Exercice 3.6. Soit G un graphe planaire et m le nombre d'arêtes de G . Montrer que

$$\sum_{f \in F} \deg(f) = 2m,$$

avec F est l'ensemble des faces.

Exercice 3.7. Les graphes suivants sont-ils des graphes planaires ?



Indication : Dans le deuxième graphe, je vous suggère de vous concentrer sur les sommets f, d, j et e, i, h .

Ce deuxième graphe admet le nom de graphe de Petersen, ce mathématicien Danois le présenta en 1891 et il est souvent utilisé pour illustrer des propriétés dans la théorie des graphes.

Les arbres

Les arbres sont une structure fondamentale en théorie des graphes en raison de leurs propriétés uniques et de leurs applications étendues. Ils fournissent des bases pour des concepts plus complexes en graphes et algorithmes, et sont omniprésents dans les applications pratiques de l'informatique et des mathématiques.

4.1 Définitions

Définition 4.1.1. Un **arbre** est un graphe non orienté connexe sans cycle.

Exemple 4.1.1. Dans la figure suivante, on a un arbre à 6 sommets.

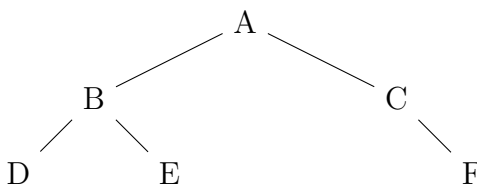


FIGURE 4.1 – Un arbre à six sommets.

D'après la définition précédente, l'arbre satisfait les propriétés suivantes.

- Propriété 4.1.1.**
1. **Acyclique** : Il n'y a pas de chemin fermé dans l'arbre (aucun cycle);
 2. **Connexe** : Il y a un chemin entre chaque paire de sommets;
 3. **Unique chemin** : Entre chaque paire de sommets dans un arbre, il existe un et un seul chemin.

Remarque 4.1.1. — L'arbre est acyclique maximale, c'est à dire l'ajout d'une arête à l'arbre créer un cycle (l'arbre ne serait plus acyclique).

- L'arbre est connexe minimale, c'est à dire la suppression d'une arête d'arbre le déconnecte, le séparant en deux sous-arbres.

Définition 4.1.2. Soit T un arbre.

- On appelle **feuille** dans T tout sommet de degré 1 ;
- On appelle **noeud interne** dans T tout sommet de degré ≥ 2 .

Proposition 4.1.1. Tout arbre T avec n sommets a exactement $n - 1$ arêtes.

Démonstration. On montre la propriété donnée dans la proposition par induction sur n . La propriété est vraie pour $n = 1$, car si l'arbre a seulement un sommet, donc le nombre d'arête est $n - 1 = 1 - 1 = 0$.

Supposons que l'arbre de n sommets a exactement $n - 1$ arêtes. Et on montrons que s'il a $n + 1$ sommets, alors il contient n arêtes.

Prenons l'arbre avec $n + 1$ sommets. Un arbre est par définition une structure connexe et acyclique. Si nous enlevons une arête de cet arbre, le résultat sera un graphe avec $n + 1$ sommets et n arêtes, qui se compose de deux arbres distincts (car l'arbre original était connexe et acyclique).

Par l'hypothèse d'induction, chaque sous arbre avec m sommets a $m - 1$ arêtes. Si nous notons les tailles de ces deux sous-arbres m_1 et m_2 où $m_1 + m_2 = n + 1$, alors chaque sous arbre a $m_1 - 1$ et $m_2 - 1$ arêtes respectivement. Donc, le nombre total d'arêtes est $(m_1 - 1) + (m_2 - 1) = m_1 + m_2 - 2 = n + 1 - 2 = n - 1$.

Ainsi, un arbre avec $n + 1$ sommets a exactement n arêtes. □

Définition 4.1.3. On appelle **arbre binaire** tout arbre a des noeuds ont au plus deux enfants.

Exemple 4.1.2. L'arbre de l'Exemple 4.1.1 est binaire.

Remarque 4.1.2. Ce type d'arbre est couramment utilisé en informatique pour représenter des structures de données comme les arbres de recherche binaires.

Définition 4.1.4. Une **forêt** est un graphe non orienté sans cycle.

Exemple 4.1.3. Dans la Figure 4.2, on a une forêt a sept sommets.

4.2 Caractérisation des arbres

D'après la Définition 4.1.1, les arbres satisfont les équivalences suivantes.

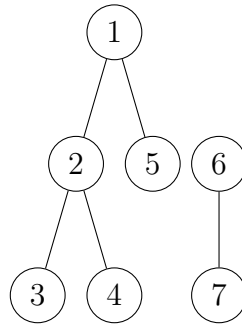


FIGURE 4.2 – Une forêt a sept sommets.

Théorème 4.2.1. *Pour un graphe T d'ordre n , il y a une équivalence entre les propriétés suivantes :*

- (1) T est un arbre ;
- (2) T est un graphe connexe à $n - 1$ arêtes ;
- (3) T est connexe, et la suppression de toute arête le déconnecte ;
- (4) T est acyclique à $n - 1$ arêtes ;
- (5) T est acyclique et l'ajout de toute arête le rend cyclique (avec cycle).

Démonstration. Pour montrer ces équivalences, le plus simple est d'établir une série d'implications.

(1) \Rightarrow (2) : Comme T est un arbre alors par définition il est connexe et sans cycle, et comme il y a n sommet donc par Proposition 4.1.1 il possède $n - 1$ arêtes.

(2) \Rightarrow (3) : La suppression d'une arête de T connexe nous donne un sommet isolé, donc T ne sera pas connexe.

(3) \Rightarrow (4) : Par **absurde** si T possède un cycle, la suppression d'une arête de ce cycle ne déconnecte pas T (**Contradiction**). Par suit T est acyclique. Puisqu'il est aussi connexe, il possède $n - 1$ arêtes par Proposition 4.1.1.

(4) \Rightarrow (5) : L'ajout d'une arête à T donne un graphe à n arêtes qu'il ne peut pas être acyclique.

(5) \Rightarrow (1) : Considérons deux sommets x et y de T . S'il existe l'arête $\{x, y\}$, alors c'est un chemin de x à y , sinon ajoutons cette arête à T nous créons alors un cycle de la forme (x, a, \dots, z, y, x) . Ceci montre l'existence du chemin (x, a, \dots, z, y) entre x et y dans T . Par définition T est donc un graphe connexe, et comme il est sans cycle, alors T est un arbre. \square

Définition 4.2.1. *On appelle **isthme** une arête e telle que le nombre de composantes connexes de $G - e >$ le nombre de composantes connexes de G .*

Remarque 4.2.1. *Il est clair que toute arête d'un arbre est un isthme, car sa suppression engendre exactement deux composantes connexes.*

Définition 4.2.2. On appelle **point d'articulation** tout sommet dont sa suppression augmente le nombre de composantes connexes (perte de connexité).

Définition 4.2.3. On appelle **arbre couvrant** tout graphe partiel de G qui est un arbre.

Proposition 4.2.1. L'existence d'arbre couvrant de G implique que G est connexe.

Démonstration. Supposons qu'il existe un arbre couvrant T dans un graphe G . Cet arbre contient tous les sommets de G (car il est partiel) et connexe.

Puisque T est connexe et un graphe partiel de G , il existe un chemin entre n'importe quelle paire de sommets de G à travers T .

Par conséquent, G est connexe car il existe un chemin entre chaque paire de sommets dans G . \square

Exemple 4.2.1. A) Le graphe suivant a le sommet A comme point d'articulation.

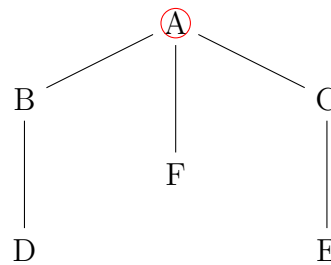


FIGURE 4.3 – Graphe avec point d'articulation.

B) Le graphe partiel en bleu du graphe suivant est un arbre couvrant.

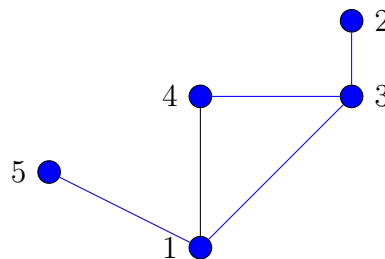


FIGURE 4.4 – Arbre couvrant de G .

Propriété 4.2.1. Un graphe partiel T d'un graphe connexe G est un arbre couvrant de G si et seulement s'il est connexe minimal.

Démonstration. Soit G un graphe connexe à n sommets et m arêtes.

A) \Rightarrow ? Supposons que T est un arbre couvrant de G , alors il est connexe et a $n - 1$ arêtes.

Donc, si nous supprimons une arête de T , nous obtenons un graphe déconnecté (puisque une arête de T est une connexion essentielle).

Inversement, si nous ajoutons une arête à T , il va créer un cycle, car T est acyclique.

Donc T est connexe minimal.

B) \Leftarrow ? Supposons T est connexe minimal.

T est une sous partie de G , donc T doit inclure tous les sommets de G sinon il serait possible d'ajouter des sommets à T tout en maintenant la connexité, ce qui contredit la minimalité.

T est minimalement connexe, donc chaque arête est essentielle à la connexité de T . Si nous ajoutons une arête à T , nous créerions un cycle, ce qui signifie que T est acyclique.

Puisque T est connexe et acyclique avec n sommet, il doit avoir exactement $n - 1$ arêtes (car c'est une caractéristique d'un arbre).

Ainsi, T est un arbre couvrant de G . □

Propriété 4.2.2. *Un graphe partiel T d'un graphe connexe G est un arbre couvrant de G si et seulement s'il est acyclique maximal.*

Démonstration. Soit G un graphe connexe a n sommets et m arêtes.

A) \Rightarrow ? Supposons que T est acyclique maximal.

Supposons que T acyclique et n'est pas connexe, alors nous pouvons ajouter des arêtes entre les composantes connexes sans introduire de cycles dans T , ce qui contredirait l'hypothèse que T est acyclique maximal.

Par conséquent, pour qu'un sous-graphe acyclique soit maximal, il doit être connexe. Sinon, on pourrait ajouter des arêtes et former un graphe plus grand tout en restant acyclique, ce qui contredirait la maximalité.

B) \Leftarrow ? Étant donné que T est acyclique maximal, il contient suffisamment de sommets pour être un arbre couvrant si et seulement si il couvre tous les sommets de G .

Si T ne couvrirait pas tous les sommets de G , nous pourrions ajouter les sommets manquants pour créer un arbre couvrant tout en restant acyclique, ce qui est en contradiction avec la maximalité de T .

Donc, pour qu'un sous-graphe acyclique soit maximal et acyclique, il doit inclure tous les sommets de G . □

Théorème 4.2.2 (Théorème de Cayley [Cayl]). *Le nombre d'arbres que l'on peut construire sur n sommets est égal à n^{n-2} .*

Définition 4.2.4. Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté et $E' \subseteq E$. On dit que le graphe partiel $G' = (X, E')$ est un **coarbre** de G si E' ne contient aucun cocycle de G alors que $E' \cup \{e\}$ en contient pour tout $e \in E \setminus E'$.

- On note W_e le cocycle obtenu en rajoutant e à E' .

Définition 4.2.5. Soit G un graphe non orienté et T un arbre dans G . Un **coarbre** T' associé à l'arbre T est le graphe partiel complémentaire de T par rapport à G

Proposition 4.2.2. $G' = (X, E')$ est un arbre de G **si et seulement si** $G'' = (X, E \setminus E')$ est un **coarbre**.

Démonstration. Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté.

A) On commence par \Rightarrow ? Supposons que $G' = (X, E')$ est un arbre. Cela implique que G' est connexe et sans cycles.

Comme G' est sans cycle, E' ne contient pas d'arêtes formant un cycles. Donc toute arête dans $E \setminus E'$ ne fait pas partir de E' et ne contribue pas à la formation d'un cycle dans G' . Et comme G' est connexe, cela signifie qu'il existe un chemin entre tout paire de sommets de G' . Par conséquent, G'' n'ajoute pas de connexité supplémentaire. Si une arête de $E \setminus E'$ est ajouté à G' , cela créait un cycle, mais G' est simple G sans les arêtes de E' , donc G' reste acyclique.

Ainsi, G'' est sans cycles, ce qui en fait un **coarbre**.

B) On passe à \Leftarrow ? Supposons que $G'' = (X, E \setminus E')$ est un **coarbre**. Alors G'' est sans cycle, aucune arête de $E \setminus E'$ ne peut former un cycle. Par conséquent, G' ne peut contenir un cycle, car si G' contient un cycle, ce cycle existerait aussi dans G , et comme $E \setminus E'$ est sans cycle, G' doit aussi être sans cycle.

Nous devons montrer que G' est connexe. Si G' n'était pas connexe, il y aurait deux composantes connexes disjointes dans G' . Les arêtes de $E \setminus E'$ ne peuvent pas reconnecter ces composantes sans former un cycle, ce qui est contradictoire avec le fait que G'' est sans cycle. Par conséquent, G' doit être aussi connexe.

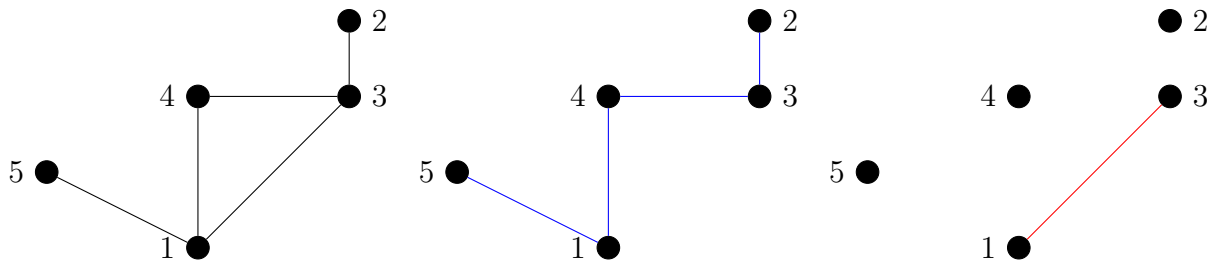
Ainsi, G' est connexe et sans cycles, ce qui en fait un arbre. □

Exemple 4.2.2. Le graphe de la Figure 4.5 a un arbre (en bleu) et son **coarbre** (en rouge).

4.3 Arbre couvrant minimal

Les arbres couvrants minimaux sont fondamentaux en théorie des graphes et en informatique en raison de leurs nombreuses applications pratiques, notamment :

1. **Réseaux de communication :** Concevoir des réseaux (comme les réseaux téléphoniques, les réseaux informatiques) de manière à minimiser le coût de l'installation des câbles.

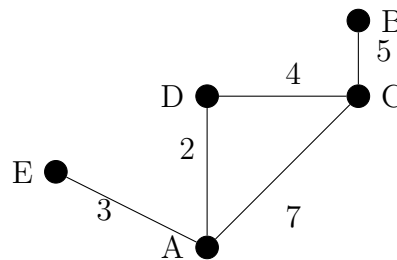
FIGURE 4.5 – Graphe avec **arbre** et son **corabre**.

2. **Transport et logistique** : Optimiser les itinéraires pour minimiser les coûts de transport.
3. **Économie d'énergie** : Minimiser les pertes d'énergie dans les réseaux électriques.

Définition 4.3.1. Un graphe **pondéré** ou **valué** $G = (X, E, \omega)$ est un graphe où un entier est affecté à chaque arête de G s'appelle **poids** ou **coût**.

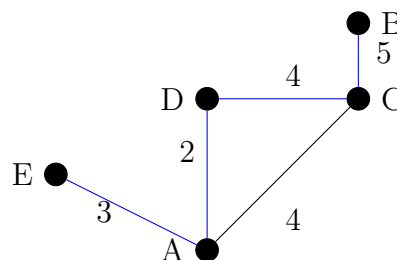
- Le poids du G noté $\omega(G)$ est la somme des poids de ses arêtes.

Exemple 4.3.1. Le poids du graphe suivant est $\omega(G) = 21$.

FIGURE 4.6 – Graphe pondré avec le poids $\omega(G) = 21$.

Définition 4.3.2. Soit $G = (X, E, \omega)$ un graphe pondéré. On appelle **arbre couvrant de poids minimum** (resp. ou **maximum**) noté **MST** ou **ACPM**, tout arbre couvrant dont la somme de poids de ses arêtes est minimal (ou maximal).

Exemple 4.3.2. L'arbre couvrant T en blue est de poids minimum $\omega(T) = 14$.

FIGURE 4.7 – Un arbre couvrant de poids minimum $\omega(T) = 14$.

Remarque 4.3.1. *L'arbre couvrant de poids minimum n'est pas forcément unique. Sauf, si les poids de ses arêtes sont deux à deux distincts.*

Exemple 4.3.3. *Dans l'exemple précédent, il y a un autre arbre couvrant de poids minimum T' (dessiné en rouge) $\omega(T') = 14$.*

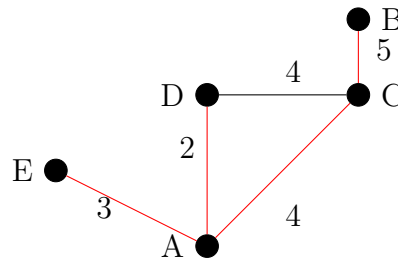


FIGURE 4.8 – Autre arbre couvrant de poids minimum $\omega(T') = 14$.

4.3.1 Application

Soit le graphe G qui représente le réseau des rues d'une ville que l'on cherche à cabler. Pour cabler de façon optimale (c'est à dire avec un coût minimum) cette ville, il faut trouver un graphe connexe tel que chaque sommet doit avoir accès au réseau et le coût de câblage doit être minimum.

En effet le coût d'installation d'un câble peut dépendre de la rue choisie par exemple présence d'obstacles (tramway, monuments historique...etc). Ce coût est modélisé par la pondération ω qui est positive. Tout ça implique qu'une solution optimale d'un tel problème soit nécessairement un arbre.

Problématique : On veut connecter des sommets de la façon la plus économique.

Ce problème admet une solution car l'ensemble d'arbres couvrants est fini, il admet au moins un élément de coût minimum.

Tout le problème est de trouver le **MST** sans énumérer tous les arbres couvrants. Pour ce faire on va utiliser deux algorithmes :

1. Algorithme de Prim [**Pri**] en **1957** ;
2. Algorithme de Kruskal [**Krus**] en **1956**.

Il en existe autres algorithmes : algorithme de **Tarjan**, algorithme de **Borokual** (1956) et algorithme de **Solin**.

4.3.2 Algorithme de Prim

Principe : L'idée principale est de maintenir un sous graphe partiel connexe. À chaque étape connecter un nouveau sommet au sous graphe partiel existant par l'arête de poids minimum sortant du graphe partiel (au départ le graphe partiel sera n'importe quel sommet).

Cet algorithme va faire grossir un arbre jusqu'à qu'il couvre tous les sommets du graphe.

Posons $G = (X, E)$ un graphe connexe, on applique l'algorithme comme suit.

Algorithme de Prim

1. Poser $P = \{s\}$, où s est un sommet quelconque de X .
2. Poser $MST = \{\}$ ensemble d'arêtes de l'arbre.
3. **Tant que** ($|P| < |X|$) faire
 Chercher $\{u, v\}$ l'arête de poids minimum ayant $u \in P$ et $v \in X \setminus P$;
 Mettre $P = P \cup v$;
 Mettre $MST = MST \cup (\{u, v\})$.
4. **Fin tant que**.

Exemple 4.3.4. On applique l'algorithme Prim sur le graphe suivant :

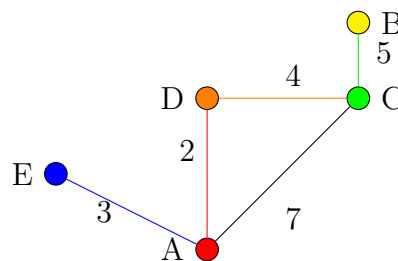


FIGURE 4.9 – L'arbre couvrant de poids minimum $\omega(MST) = 14$.

- (1) On pose $P = \{A\}$ et $MST = \{\}$;
- (2) **Prim** $\implies P = \{A, D\}$ et $MST = \{\{A, D\}\}$;
- (3) **Prim** $\implies P = \{A, D, E\}$ et $MST = \{\{A, D\}; \{A, E\}\}$;
- (4) **Prim** $\implies P = \{A, D, E, C\}$ et $MST = \{\{A, D\}; \{A, E\}; \{D, C\}\}$;
- (5) **Prim** $\implies P = \{A, D, E, C, B\}$ et $MST = \{\{A, D\}; \{A, E\}; \{D, C\}; \{C, B\}\}$.

Alors, l'arbre couvrant de poids minimum est $MST = \{\{A, D\}; \{A, E\}; \{D, C\}; \{C, B\}\}$, son poids est $\omega(MST) = 2 + 3 + 4 + 5 = 14$.

Théorème 4.3.1. L'algorithme de Prim construit un arbre couvrant minimal de poids minimum sur tout graphe connexe.

4.3.3 Algorithme de Kruskal

Principe : Il se base sur la caractérisation des arbres comme des graphes acycliques maximaux. On maintient l'absence de cycle.

Cet algorithme va ajouter et fur et à mesure des arêtes en s'assurant que le graphe partiel reste à chaque étape une forêt. Il s'arrête quand la forêt devient un arbre.

Posons $G = (X, E)$ un graphe connexe, on applique l'algorithme comme suit.

Algorithme de Kruskal

1. Tri er l'ensemble d'arêtes de G dans l'ordre croissant selon leurs poids.
2. Poser $F = \{\}$ ensemble d'arêtes de l'arbre.
3. **Pour** chaque élément e de E et tant que $(|F| < |X| - 1)$ **faire**
 Si $F \cup e$ ne forme pas un cycle **alors**
 Mettre $F = F \cup e$
 Fin si
4. **Fin pour.**

Exemple 4.3.5. On applique l'algorithme Prim sur le graphe ci-dessus. On a les poids des arêtes en ordre croissant sont : $\omega(\{A, D\}) = 2, \omega(\{A, E\}) = 3, \omega(\{A, C\}) = 4, \omega(\{D, C\}) = 4, \omega(\{C, B\}) = 5$.

- (1) On pose $F = \{\}$;
- (2) **Kruskal** $\implies F = \{\{A, D\}\}$;
- (3) **Kruskal** $\implies F = \{\{A, D\}; \{A, E\}\}$;
- (4) **Kruskal** $\implies F = \{\{A, D\}; \{A, E\}; \{A, C\}\}$;
- (5) **Kruskal** \implies On peut pas ajouter l'arête $\{D, C\}$, car il forme un cycle ;
- (6) **Kruskal** $\implies F = \{\{A, D\}; \{A, E\}; \{A, C\}; \{C, B\}\}$.

Alors, l'arbre couvrant de poids minimum est $F = \{\{A, D\}; \{A, E\}; \{A, C\}; \{C, B\}\}$, son poids est $\omega(F) = 2 + 3 + 4 + 5 = 14$.

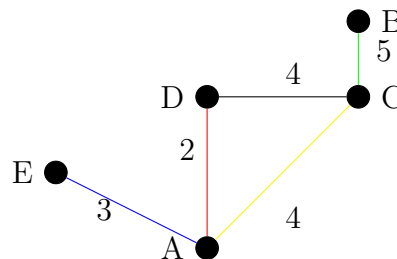
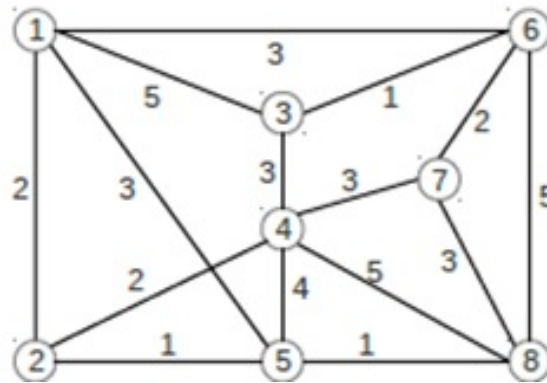


FIGURE 4.10 – L'arbre couvrant de poids minimum $\omega(F) = 14$.

4.4 Exercices

Exercice 4.1. 1. Soit le graphe pondéré suivant :



Trouver l'arbre couvrant minimal par deux méthodes différentes.

2. Montrer que tout arbre fini avec au moins deux sommets comporte au moins deux sommets pendants.
3. Combien d'arbres différents existe-t-il avec 5 sommets ? avec 6 sommets ?
4. Montrer que la moyenne des degrés des sommets d'un arbre est strictement inférieure à 2.

Exercice 4.2. Soit $G = (X, E)$ un graphe, on a n le nombre de sommets.

1. Montrer par récurrence sur n que si le graphe est connexe alors il comporte au moins $n - 1$ arêtes.
2. Montrer que si G a tous les sommets de degré supérieur ou égal à deux alors s'il possède un cycle. En déduire, qu'un graphe acyclique admet un sommet de degré 0 ou 1.
3. Montrer par récurrence sur n , le nombre de sommets, que si G est acyclique alors il possède au plus $n - 1$ arêtes.

Exercice 4.3 (Théorème de Cayley [Cayl]). Montrer que le nombre d'arbres que l'on peut construire sur n sommets est égal à n^{n-2} .

Exercice 4.4. Un centre d'un graphe G est un sommet u tel que $\max\{d(u, v) : v \in X\}$ est aussi petit que possible.

1. Soit T un arbre sur au moins trois sommets, et soit T' l'arbre obtenu en supprimant de T toutes ses feuilles. Montrer que T et T' ont les mêmes centres.
2. En déduire que tout arbre A soit un unique centre, soit deux centres adjacents.

Cycles et cocycles

Parmi les concepts fondamentaux de la théorie des graphes, les cycles et cocycles jouent un rôle crucial dans la compréhension des propriétés structurelles et topologiques des graphes. Ils sont des outils puissants pour analyser les propriétés structurelles et dynamiques des graphes. Ils fournissent des perspectives uniques sur la connectivité, les flux, et la topologie des réseaux, rendant leur étude essentielle pour les applications théoriques et pratiques de la théorie des graphes.

Dans ce chapitre, on commence de parler sur les cycles et cocycles et leurs propriétés algébriques (la représentation vectorielle, la base et l'orthogonalité) pour les graphes orientés puis pour les graphes non orientés. Ensuite on parle sur les flots et tensions dans les graphes.

5.1 Cycles et cocycles dans les graphes orientés

5.1.1 Représentation vectorielle d'un cycle et cocycle

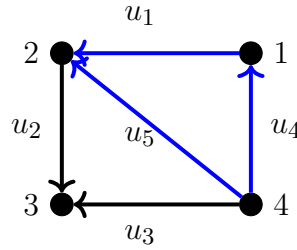
A) Cas de cycle : Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté. Soit C un cycle dans G , on peut le représenter par un vecteur $\bar{\mu}$ dans $\mathbb{R}^{|U|}$ de la manière suivante :

$$\bar{\mu}_i = \begin{cases} 1, & \text{si l'arc } i \text{ est dans le bon sens de parcours,} \\ -1, & \text{si l'arc } i \text{ est dans le sens opposé de parcours,} \\ 0, & \text{si l'arc } i \text{ ne fait pas partie du cycle.} \end{cases}$$

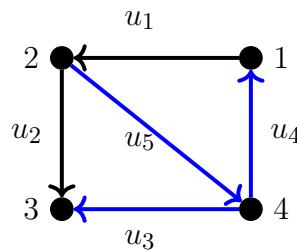
B) Cas d'un cocycle : Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté et $\omega(S) = \omega^+(S) \cup \omega^-(S)$ est le cocycle du sous ensemble $S \subset X$. On peut représenter ce cocycle par un vecteur $\bar{\theta}$ de la manière suivante :

$$\bar{\theta}_i = \begin{cases} 1, & \text{si } u_i \in \omega^+(S). \\ -1, & \text{si } u_i \in \omega^-(S). \\ 0, & \text{si } u_i \notin \omega(S), \end{cases}$$

Exemple 5.1.1. La représentation vectorielle du cycle (en bleu) $C = 4u_41u_12u_54$ de graphe suivant est : $\bar{\mu} = (1, 0, 0, 1, -1)$.



Exemple 5.1.2. La représentation de cocycle (en bleu) $\omega(S) = \{u_3, u_4, u_5\}$ de $S = \{4\}$ dans le graphe suivant est : $\bar{\theta} = (0, 0, 1, 1, -1)$.



5.1.2 Base de cycles et base de cocycles

Rappelons qu'un cycle élémentaire (ou cycle simple) dans un graphe orienté est un cycle qui ne passe par aucun sommet plus d'une fois, sauf le sommet de départ/fin et n'a pas d'arcs répétitifs.

Propriété 5.1.1. Un cycle est élémentaire si et seulement s'il est minimal.

Démonstration. Supposons que C est un cycle minimal dans le graphe orienté G . Cela signifie qu'il est impossible de supprimer une arête de G sans casser le cycle.

Supposons, pour la contradiction, que le cycle C n'est pas élémentaire. Cela signifie que C passe par certains sommets plus d'une fois, ou qu'il contient un sous-cycle. Puisque C est un cycle minimal, tout sous-cycle de C doit être un cycle à part entière dans le graphe. En particulier, cela signifie qu'il existe des cycles plus petits à l'intérieur de C .

Considérons un sous-cycle de C . Étant donné que C est minimal, il ne peut pas avoir de sous-cycles. Cependant, si C n'est pas élémentaire, alors C contient un sous-cycle qui est également un cycle valide dans G . Cela contredit la définition de cycle minimal.

Par définition de cycle minimal, C ne peut pas avoir de sous-cycle. Donc, il ne peut pas y avoir de sous-cycle dans C qui soit un cycle à part entière dans G . Cela signifie que C ne contient pas de répétition de sommets autres que le sommet de départ et de fin, ce qui est la définition d'un cycle élémentaire.

Puisque tout cycle minimal dans un graphe orienté ne peut pas contenir de sous-cycle tout en étant un cycle valide lui-même, il ne peut pas non plus contenir de répétitions de sommets autres que le sommet initial/final. Ainsi, chaque cycle minimal est nécessairement un cycle élémentaire, car toute présence de répétition ou de sous-cycle le rendrait non minimal. Donc, nous avons prouvé que si un cycle est minimal, alors il est également élémentaire. \square

Propriété 5.1.2. *Tout cycle est la somme de cycles élémentaires sans arcs communs.*

Démonstration. Considérons un cycle C dans un graphe G . Nous pouvons représenter C comme une séquence de sommets (x_1, \dots, x_k, x_1) où x_i est un sommet et (x_i, x_{i+1}) est un arc dans G . Noter que le cycle est simple, donc aucun arc n'est répété. Nous avons deux cas :

Cas 1 : Si le cycle C est déjà élémentaire (c'est-à-dire qu'il ne contient aucun sommet répété autre que le sommet de départ et d'arrivée), alors C est déjà un cycle élémentaire et la décomposition est triviale : C est la somme d'un seul cycle élémentaire, lui-même.

Cas 2 : Si C n'est pas élémentaire, il y a un sous-cycle C' dans C qui est un cycle élémentaire (c'est-à-dire qu'il ne répète pas de sommets autres que le premier et le dernier). Nous pouvons alors retirer C' de C , et ce qui reste est un graphe avec des cycles. Nous répétons cette opérations jusqu'à ce que le graphe restant soit constitué uniquement de cycle élémentaires.

Chaque fois que nous identifions un cycle élémentaire C' , nous l'extrayons de C . Ce processus se poursuit jusqu'à ce que tout le cycle C soit exprimé comme une somme de cycles élémentaires. Puisque les cycles élémentaires n'ont pas d'arcs communs (par définition de leur extraction), leur somme ne partage aucun arc entre les cycles élémentaires.

Donc tout cycle dans un graphe peut être décomposé en une somme de cycles élémentaires disjoints en termes d'arcs. La décomposition en cycles élémentaires se fait en extrayant progressivement des sous-cycles élémentaires du cycle initial, garantissant que les arcs ne sont partagés entre aucun des cycles élémentaires extraits. Ainsi, tout cycle dans un graphe est bien la somme de cycles élémentaires sans arcs communs. \square

Exemple 5.1.3. *Voici un exemple de graphe orienté avec un cycle principal égal à la somme de deux cycles élémentaires. Soit $u_1 = (1, 2), u_2 = (1, 4), u_3 = (2, 3), u_4 = (3, 1), u_5 = (3, 4), u_6 = (4, 2)$.*

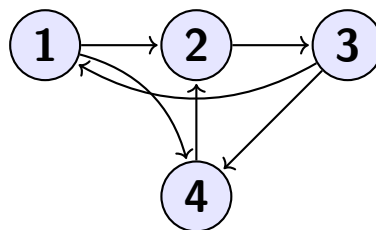


FIGURE 5.1 – Graphe avec un cycle égal à la somme de deux cycles élémentaires.

Le cycle principal est le cycle $C = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ dont le vecteur $\bar{\mu} = (1, 0, 1, 0, 1, 1)$, qui est la somme des deux cycles élémentaires suivants :

- Premier cycle élémentaire $C_1 : 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ sont vecteur $\vec{\mu}' = (0, 0, 1, 0, 1, 1)$;
- Deuxième cycle élémentaire $C_2 : 1 \rightarrow 2$ sont vecteur $\vec{\mu}'' = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$.

En d'autres termes, le cycle principal peut être vu comme une combinaison des cycles élémentaires.

Définition 5.1.1. Une **base de cycle** (au sens vectorielle) est une famille de cycles libres (c'est-à-dire tous les cycles sont indépendants, aucun ne peut se définir comme combinaison linéaire des autres) et génératrice (tout autre cycle peut s'écrire comme combinaison linéaire des cycles de la famille libre).

Définition 5.1.2. On appelle **nombre cyclomatique** de G , noté $\mu(G)$, le cardinal ou la dimension (ou le nombre d'éléments) de la base des cycles de G .

Propriété 5.1.3. Soit G un graphe d'ordre n avec m arcs et p composantes connexes. Alors, $\mu(G) = m - n + p$.

Démonstration. La preuve sera par récurrence sur n .

- Pour $n = 1$ (un seul sommet), on a deux cas :
 1. Si $m = 0$, le graphe est trivial et $\mu(G) = 0 - 1 + 1 = 0$.
 2. Si $m \geq 1$, chaque arc formera une composante connexe avec le sommet, et $\mu(G) = m - 1 + 1 = m$.
- Supposons que la relation $\mu(G) = m - n + p$ est vraie pour tout graphe de n sommets. Montrons qu'elle est vraie pour un graphe de $n + 1$ sommets.

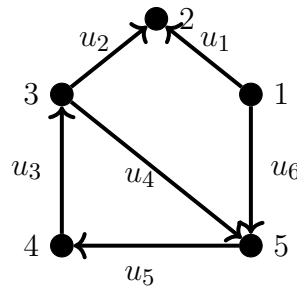
Considérons un graphe G de $n + 1$ sommets. Supposons que nous ajoutons un sommet x au graphe G' de n sommets (où la relation est supposée vraie). Si x est ajouté avec k arcs supplémentaires, alors le nouveau graphe a $n + 1$ sommets et $m + k$ arcs. Les nouvelles composantes connexes dépendent des arcs ajoutés. Si x n'est pas connecté à d'autres sommets, p ne change pas. Si x est connecté de manière à créer de nouvelles composantes connexes, p pourrait augmenter ou rester constant.

- En suivant cette logique, on doit montrer que la nouvelle relation maintient $\mu(G) = m - (n + 1) + p'$, où p' est le nouveau nombre de composantes connexes. □

Exemple 5.1.4. Pour le graphe suivant on a $m = 8, n = 6$ et $p = 1$. Alors le nombre cyclomatique de G est $\mu(G) = 6 - 5 + 1 = 2$. Les cycles (indépendants) qui forment la base sont :

$C' = (u_1, u_2, u_4, u_6)$ son vecteur représentatif est $\vec{\mu}' = (1, -1, 0, 1, 0, -1)$;

$C'' = (u_4, u_5, u_3)$ son vecteur représentatif est $\vec{\mu}'' = (0, 0, 1, 1, 1, 0)$.



Définition 5.1.3. Un cocycle **élémentaire** est un ensemble minimal d'arcs dont la suppression déconnecte le graphe en deux composantes disjointes

Définition 5.1.4. Un cocycle est **élémentaire** s'il est composé d'arcs reliant deux sous ensembles de sommets connexes qui partitionnent une composante fortement connexe du G (où tous les sommets en cas du graphe fortement connexe).

Remarque 5.1.1. D'après la définition précédente, un cocycle élémentaire est un cocycle qui ne peut pas être décomposé en une union d'autres cocycles.

Propriété 5.1.4. Un cocycle est élémentaire si et seulement s'il est minimal.

Démonstration. **A) On commence par la condition nécessaire ?** Soit C un cocycle élémentaire. Supposons que C n'est pas minimal. Alors, il existe un sous ensemble propre $C' \subset C$ tel que C' est aussi cocycle. Alors, C peut être décomposé en au moins deux cocycles : C' et $C \setminus C'$. Cela contredit la définition de C comme cocycle élémentaire, car un cocycle élémentaire ne peut pas être décomposé en une union d'autres cocycles.

Par conséquent, si C est élémentaire, il doit être minimal.

B) On passe à la condition suffisante ? Soit C un cocycle minimal. Supposons que C n'est pas élémentaire. Donc C peut être décomposé en une union de ou plusieurs cocycles C_1, \dots, C_n où $n \geq 2$. Alors, au moins un des C_i est un sous ensemble propre de C . Cependant, cela signifie que C_i est un cocycle propre de C , ce qui contredit la minimalité de C .

Par conséquent, si C est minimal, il doit être élémentaire.

□

Propriété 5.1.5. Tout cocycle est la somme de cocycles élémentaires sans arcs communs.

Démonstration. Soit C un cocycle du graphe orienté G . Commençons par identifier les sous ensembles d'arcs de C . Nous allons itérativement retirer des cocycles élémentaires de C jusqu'à ce qu'il reste plus d'arcs.

Sélectionnons un cocycle élémentaire $C_1 \subseteq C$. Comme C_1 est minimal, il ne peut pas être décomposé en des plus petits cocycles.

Remplaçons C par $C \setminus C_1$. Si le résultat est un cocycle, répéter le processus. Sinon, répéter le processus avec le reste.

Continuez cette procédure jusqu'à ce que l'ensemble des arcs restant soit vide. Comme chaque étape retire un cocycle élémentaire, et que le nombre d'arcs est fini, ce processus doit terminer après un nombre fini d'étapes.

Par construction, les cocycles élémentaires C_2, \dots, C_k obtenus à chaque étape sont disjoints, car chaque étape retire des arcs n'ont pas encore été retirés.

Par conséquent, nous avons décomposé C en une somme de cocycles élémentaire C_1, \dots, C_k tels que $C = C_1 \cup \dots \cup C_k$ et où $C_i \cap C_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. Ainsi, nous avons prouvé que tout cocycle est la somme de cocycles élémentaires sans arcs communs.

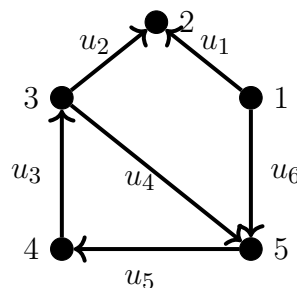
□

Définition 5.1.5. Une **base de cocycle** (au sens vectorielle) est une famille de cocycles libres (c'est-à-dire tous les cocycles sont indépendants, aucun ne peut se définir comme combinaison linéaire des autres) et génératrice (tout autre cocycle peut s'écrire comme combinaison linéaire des cocycles de la famille libre).

Définition 5.1.6. On appelle **nombre cocyclomatique** de G , noté $\lambda(G)$, le cardinal (ou le nombre d'éléments) de la base des cocycles de G .

Propriété 5.1.6. Soit G un graphe d'ordre n et p composantes connexes. Alors, $\lambda(G) = n - p$.

Exemple 5.1.5. Soit le graphe orienté suivant :



Le nombre cocyclomatique dans ce cas est : $\lambda(G) = 5 - 1 = 4$. La base de cocycles est formée par les cocycles suivants :

A_i	$\omega(A_i)$	$\bar{\theta}_i$
$A_1 = \{1\}$	$\omega(A_1) = \{u_1, u_6\}$	$\bar{\theta}_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 1)$
$A_2 = \{2, 3\}$	$\omega(A_2) = \{u_1, u_3, u_4\}$	$\bar{\theta}_2 = (-1, 0, -1, 1, 0, 0)$
$A_3 = \{3, 4, 5\}$	$\omega(A_3) = \{u_2, u_6\}$	$\bar{\theta}_3 = (0, 1, 0, 0, 0, -1)$
$A_4 = \{2, 3\}$	$\omega(A_4) = \{u_3, u_5\}$	$\bar{\theta}_4 = (0, 0, 1, 0, 1, 0)$

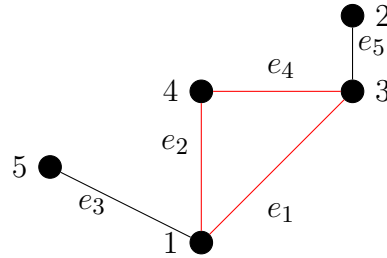
5.2 Cycles et cocycles dans les graphes non orientés

5.2.1 Représentation vectorielle d'un cycle et cocycle

A) Cas de cycle : Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté. Soit C un cycle dans G , on peut le représenter par un vecteur $\bar{\mu}$ dans $\mathbb{R}^{|E|}$ de la manière suivante :

$$\bar{\mu}_i = \begin{cases} 1, & \text{si l'arête } i \text{ fait partie du cycle,} \\ 0, & \text{si l'arête } i \text{ ne fait pas partie du cycle.} \end{cases}$$

Exemple 5.2.1. La représentation vectorielle du cycle (en rouge) $C = 1e_13e_44e_21$ de graphe suivant est : $\bar{\mu} = (1, 1, 0, 1, 0)$.



Définition 5.2.1. Une **base de cycle** (au sens vectorielle) est une famille de cycles libres (c'est-à-dire tous les cycles sont indépendants, aucun ne peut se définir comme combinaison linéaire des autres) et génératrice (tout autre cycle peut s'écrire comme combinaison linéaire des cycles de la famille libre).

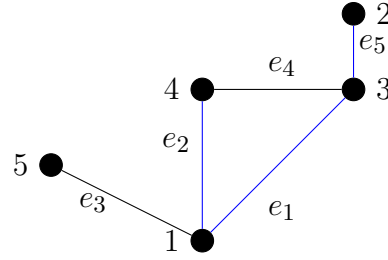
Définition 5.2.2. On appelle **nombre cyclomatique** de G , noté $\mu(G)$, le cardinal ou la dimension (ou le nombre d'éléments) de la base des cycles de G .

Propriété 5.2.1. Soit G un graphe d'ordre n avec m arêtes et p composantes connexes. Alors, $\mu(G) = m - n + p$.

B) Cas de cocycle : Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté et $\omega(S)$ est le cocycle du sous ensemble $S \subset X$. On peut représenter ce cocycle par un vecteur $\bar{\theta}$ de la manière suivante :

$$\bar{\theta}_i = \begin{cases} 1, & \text{si } u_i \in \omega(S), \\ 0, & \text{si } u_i \notin \omega(S). \end{cases}$$

Exemple 5.2.2. La représentation de cocycle (en bleu) $\omega(S) = \{e_1, e_2, e_5\}$ (en bleu) de $S = \{4, 3\}$ dans le graphe suivant est : $\bar{\theta} = (1, 1, 0, 0, 1)$.



Définition 5.2.3. Une **base de cocycle** (au sens vectorielle) est une famille de cocycles libres (c'est-à-dire tous les cocycles sont indépendants, aucun ne peut se définir comme combinaison linéaire des autres) et génératrice (tout autre cocycle peut s'écrire comme combinaison linéaire des cocycles de la famille libre).

Définition 5.2.4. On appelle **nombre cocyclomatique** de G , noté $\lambda(G)$, le cardinal (ou le nombre d'éléments) de la base des cocycles de G .

Propriété 5.2.2. Soit G un graphe d'ordre n et p composantes connexes. Alors, $\lambda(G) = n - p$.

5.2.2 L'orthogonalité entre l'espace des vecteurs cycles et l'espace des vecteurs cocycles

L'espace des vecteurs cycles est orthogonal à l'espace des vecteurs cocycles et on note $\bar{\mu}_C \perp \bar{\theta}_W$, c'est-à-dire :

$$\langle C, W \rangle = \bar{\mu}_C \times \bar{\theta}_W = 0$$

pour tout vecteur cycle $\bar{\mu}_C$ et pour tout vecteur cocycle $\bar{\theta}_W$.

5.3 Flots et tensions

Le concept de flots et le concept de tensions sont utilisés dans divers problèmes d'optimisation et d'analyse de réseaux, comme la recherche des chemins optimaux, la gestion des ressources dans les réseaux, et la résolution des problèmes de planification et de logistique.

Définition 5.3.1. Soit $G = (X, U)$ un graphe connexe dont les arcs sont numérotés $U = 1, \dots, m$. Un **flot** dans G est un vecteur à composantes $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in \mathcal{R}^m$ tel que $\forall x \in X$, la première loi de Kirchhoff soit vérifiée, c'est-à-dire :

$$\sum_{i \in \omega^+(x)} \varphi_i = \sum_{i \in \omega^-(x)} \varphi_i. \quad (5.1)$$

Pour $i \in U$, la composante φ_i de vecteur φ appelé **quantité** de flot ou flux de l'arc i .

Remarque 5.3.1. La relation (5.1) montre que la somme des flux entrant en un sommet est égal à la somme des flux sortant.

Exemple 5.3.1. Le courant électrique dans un réseau est un exemple classique de flot sur un graphe. Soit G le graphe à 4 sommets et 6 arcs donné dans la figure suivante :

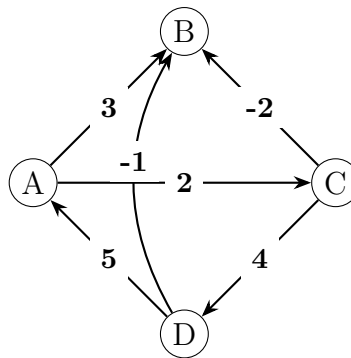


FIGURE 5.2 – Un graphe avec un flot.

Le vecteur $\varphi = (5, 3, 2, -2, 1, 4)$ est un flot sur G car :

$$\forall x \in X, \sum_{i \in \omega^+(x)} \varphi_i = \sum_{i \in \omega^-(x)} \varphi_i.$$

5.3.1 Définition algébrique des flots

Soit $M = (m_{ij}), i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$, la matrice d'incidence du graphe orienté G .

Chaque sommet i correspond la ligne i de M , et on a :

$$\begin{aligned} \omega^+(i) &= \{j / m_{ij} = +1\}, \\ \omega^-(i) &= \{j / m_{ij} = -1\}. \end{aligned}$$

La relation (5.1) peuvent donc se mettre sous la forme matricielle équivalente :

$$M \times \varphi = 0. \quad (5.2)$$

- Si on considère l'application linéaire δ associée à la matrice M , l'ensemble φ des flots sur G constitut (d'après (5.2)) le noyau de δ .

- Ce noyau est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^m , et sa dimension vérifie : $\dim(\varphi) + \text{rang}(M) = m$.
- Si G possède p composantes connexes, on a $\text{rang}(M) = n - p$ par suit : $\dim(\varphi) = m - n + p$ qui n'est autre que le nombre cyclomatique $\mu(G)$ de G .

Théorème 5.3.1. *Un flot sur un arbre est identiquement nul.*

Démonstration. D'après la définition du flot, la somme des flots entrant dans un sommet doit être égale à la somme des flots sortant de ce sommet.

Comme l'arbre contient la racine, les noeuds internes et les feuilles (les sommet qui ont exactement une arête incidente). Le flux dans la feuilles doit être nul, car il ne peut pas se "répartir" en sortant par d'autres arêtes (car il n'y a pas d'autres arêtes). Alors, l'arête incidente à cette feuille doit également transporter un flux nul.

En remontant de feuille en feuille jusqu'à la racine, on voit que toutes les arêtes doivent transporter un flux nul.

Puisque chaque arête d'un arbre doit transporter un flux nul en raison de la conservation des flux et de l'absence de cycles pour redistribuer le flux, le flot sur un arbre est identiquement nul. \square

5.3.2 Opérations sur les flots

Soient φ, φ' et φ'' trois flots sur G et $k \in \mathbb{R}$.

- Lemme 5.3.1.**
1. $k\varphi$ est un flot sur G .
 2. $\varphi' + \varphi''$ est un flot sur G .
 3. $\varphi' - \varphi''$ est un flot sur G .
 4. Le seul flot possible sur un arbre est le flot nul $\varphi = 0$.
 5. Le vecteur qui représente un cycle est un flot.

Définition 5.3.2.

Soit C un circuit élémentaire sur G . On appelle le vecteur $\underline{\theta}$ **flot cyclique élémentaire** sur G , s'il est constitué par les éléments $\varphi_C(u)$ tels que :

$$\varphi_C(u) = \begin{cases} 1, & \text{si } u \in C, \\ 0, & \text{si } u \notin C. \end{cases}$$

Théorème 5.3.2. *Tout flot φ se décompose en une somme des flots cycliques élémentaires linéairement indépendants :*

$$\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_k \varphi_k, \lambda_i \geq 0.$$

Démonstration. Utilisons un algorithme itératif pour décomposer le flot φ du G .

1) **Tant que $\varphi \neq 0$ faire :**

- Choisissez un cycle C dans G tel que $\varphi(u) \neq 0$ pour chaque arc $u \in C$.
- Soit $\alpha = \min_{u \in C} |\varphi(u)|$. Définissez un flot cyclique élémentaire φ_C sur C avec valeur α sur chaque arc de C .
- Soustrayant $\alpha \cdot \varphi_C$ de φ , c'est-à-dire, mettre à jour φ par $\varphi = \varphi - \alpha \cdot \varphi_C$

2) **Fin tant que.**

Répéter jusqu'à ce que $\varphi = 0$.

Les flots cycliques élémentaires extraits sont linéairement indépendants. Chaque flot cyclique élémentaire correspond à un cycle unique et distinct dans le graphe, et les cycles distincts ne peuvent pas être écrits comme des combinaisons linéaires d'autres cycles.

Finalement, nous avons décomposé φ en une somme de flots cycliques élémentaires linéairement indépendants. Par construction, chaque flot cyclique élémentaire est non nul uniquement sur les arcs formant un cycle simple, assurant ainsi l'indépendance linéaire.

□

Définition 5.3.3. Un flot φ d'un graphe $G = (X, U)$ admet une **décomposition conforme**, si on trouve k cycles leur vecteur représentatif μ_1, \dots, μ_k satisfont les conditions suivantes :

1. $\varphi = \beta_1 \mu_1 + \dots + \beta_k \mu_k$, $\beta_j > 0$ pour $j = 1, \dots, k$.
2. $\varphi(u) > 0$ (resp. $\varphi(u) < 0$) et $u \in C_j \Rightarrow u$ dans le bon sens de parcours (resp. dans le mauvais sens).

Remarque 5.3.2. D'après la définition du flot et le théorème précédents, on peut dire que tout flot φ admet une décomposition conforme.

5.3.3 Système de générateurs des flots

Soit $C = (u_0, u_1, \dots, u_k)$ un cycle élémentaire de $G = (X, U)$. Les arcs de ce cycle sont orientés de façons quelconque. Soit C^+ l'ensemble d'arcs de C orientés dans le bon sens de parcours et C^- l'ensemble d'arcs de C orientés dans le mauvais sens de parcours.

Définition 5.3.4. Le **flot canonique** associé au cycle C est défini comme suit :

$$\varphi_C(u) = \begin{cases} 1, & \text{si } u \in C^+, \\ -1, & \text{si } u \in C^-, \\ 0, & \text{si } u \notin C. \end{cases}$$

Proposition 5.3.1. Le flot canonique est aussi un flot.

Démonstration. Soit $C = \{x_1, \dots, x_k, x_1\}$ un cycle dans G . Nous devons montrer que $\varphi_C(u)$ satisfait la condition de conservation du flot à chaque sommet $x \in X$, c'est-à-dire que pour tout sommet $x \in X$, le flot entrant est égal au flot sortant :

$$\sum_{y \in X} \varphi_C(y, x) = \sum_{z \in X} \varphi_C(x, z).$$

Pour un sommet $x_i \in C$, il y a exactement un arc dans x_i (depuis x_{i-1}) et un arc sortant de x_i (vers x_{i+1}). Par définition de φ_C , nous avons :

$$\varphi_C(x_{i-1}, x_i) = \pm 1 \quad \text{et} \quad \varphi_C(x_i, x_{i+1}) = \pm 1.$$

Ainsi, pour chaque sommet x_i du cycle, le flot entrant est égal au flot sortant :

$$\sum_{y \in X} \varphi_C(y, x_i) = \sum_{z \in X} \varphi_C(x_i, z) = \pm 1.$$

Ainsi, pour chaque sommet $x \notin C$, aucun arc du C ne passe par x . Par conséquent, $\forall y, z \in X$, nous avons :

$$\varphi_C(y, x) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_C(x, z) = 0.$$

Donc, pour chaque sommet x hors du cycle, le flot entrant et le flot sortant sont tous deux nuls :

$$\sum_{y \in X} \varphi_C(y, x) = \sum_{z \in X} \varphi_C(x, z) = 0.$$

Donc, pour tous les sommets $x \in X$, que ce soit un sommet sur le cycle ou hors du cycle, le flot entrant est égal au flot sortant. Ainsi, φ_C satisfait la condition de conservation du flot à chaque sommet du graphe.

Par conséquent, nous avons prouvé que le flot canonique sur les cycles élémentaires d'un graphe orienté est aussi un flot. \square

Proposition 5.3.2. *Le nombre de flots linéairement indépendants sur un graphe $G = (X, U)$ avec n sommets et m arcs est égal à $n - m + 1$.*

Démonstration. Considérons la matrice d'incidence B de G . B est une matrice $n \times m$ où $B_{ij} = 1$ si l'arc j entre dans le sommet i , $B_{ij} = -1$ si l'arc j sort de sommet i , et $B_{ij} = 0$ sinon.

L'espace des flots satisfaisant la conservation des flots est donné par le noyau de B , noté $\ker(B)$. Selon le théorème de rang, on a : $\text{rang}(B) + \dim(\ker(B)) = m$.

La rang de B est au plus $n - 1$ parce qu'une relation de conservation des flots est redondante (le flot total entrant est égal au flot total sortant). Donc, $\text{rang}(B) = n - 1$. Alors, $\dim(\ker(B)) = m - \text{rang}(B) = m - n + 1$.

Donc, la dimension de l'espace des flots linéairement indépendants sur G est donc $m - n + 1$, ce qui prouve que le nombre de flots linéairement indépendants sur un graphe avec n sommets et m arcs est bien égal à $m - n + 1$. \square

5.3.4 Système de générateurs des tensions

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté.

Définition 5.3.5. Une **fonction potentiel** $t : X \rightarrow \mathbb{R}$ assigne une valeur réelle à chaque sommet du graphe.

Définition 5.3.6. Une **tension** (ou **différence de potentiel**) est un vecteur $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ tel que pour tout arc $u = (x, y)$ dans G on a $\theta(u) = t(y) - t(x)$.

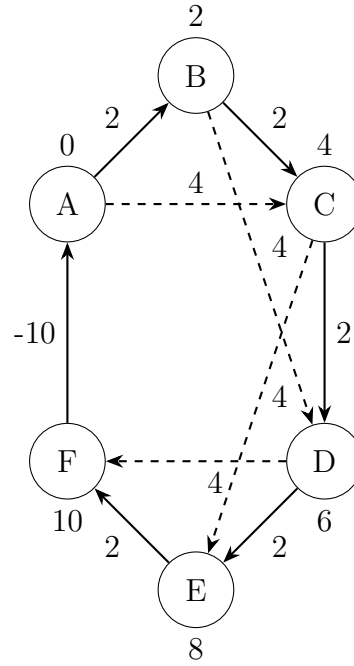


FIGURE 5.3 – Une tension sur un graphe avec 6 sommets.

Propriété 5.3.1. Soit C un cycle dans un graphe orienté G avec des tensions θ . Alors, on a

$$\sum_{u=(x,y) \in C} \theta(u) = \sum_{u=(x,y) \in C} (t(y) - t(x)) = 0.$$

Exemple 5.3.2. Pour le cycle $\mu = A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow A$ du graphe de la Figure 5.3, on a

$$\sum_{u \in \mu} \theta(u) = 4 + 2 + 4 + (-10) = 0.$$

Soient θ, θ' et θ'' trois tensions sur G et $k \in \mathbb{R}$.

Lemme 5.3.2. 1. $k\theta$ est une tension sur G .

2. $\theta' + \theta''$ est une tension sur G .

Théorème 5.3.3. Le vecteur représentatif d'un cycle est une tension.

Démonstration. Soit $C = (x_1, x_2), \dots, (x_k, x_1)$ un cycle dans un graphe orienté $G = (X, U)$, et $\bar{\mu}$ son vecteur représentatif qui est défini pour chaque arc $u \in U$ comme suit :

$$\bar{\mu}_u = \begin{cases} 1, & \text{si } u \in C^+, \\ -1, & \text{si } u \in C^-, \\ 0, & \text{si } u \notin C. \end{cases}$$

Pour montrer que $\bar{\mu}$, nous devons trouver une fonction potentiel $t : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\bar{\mu}_u = t(y) - t(x) \text{ pour tout arc } u = (x, y) \in U.$$

Choisissons un sommet de référence, par exemple x_1 , et définissons $t(x_1) = 0$.

Pour chaque sommet x_i du cycle C , définissons t de manière cumulative le long du cycle :

$$\begin{aligned} t(x_{i+1}) &= t(x_i) + 1 \text{ si } (x_i, x_{i+1}) \in C, \\ t(x_{i+1}) &= t(x_i) - 1 \text{ si } (x_{i+1}, x_i) \in C. \end{aligned}$$

Cela signifie que toute arc $(x_i, x_{i+1}) \in C$, nous avons :

$$t(x_{i+1}) - t(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x_i, x_{i+1}) \text{ dans le bon sens du cycle,} \\ -1, & \text{si } (x_i, x_{i+1}) \text{ dans le sens inverse du cycle,} \\ 0, & \text{si } (x_i, x_{i+1}) \text{ ne fait pas partie du cycle.} \end{cases}$$

Par construction, pour tout arc $u = (x, y) \in U$, le vecteur $\bar{\mu}$ satisfait :

$$\bar{\mu}_u = t(y) - t(x).$$

Donc, le vecteur représentatif d'un cycle C est une tension, car il existe une fonction potentiel t telle que $\bar{\mu}$ est défini comme la différence de potentiel entre les sommets connectés par chaque arc.

Ainsi, nous avons prouvé que le vecteur représentatif d'un cycle dans un graphe orienté est une tension. \square

Étant donné un cocycle $A = \omega(S)$ sur $G = (X, U)$ où $S \subset X$.

Définition 5.3.7. La *tension canonique* associée au cocycle A est définie comme suit :

$$\varphi_A(u) = \begin{cases} 1, & \text{si } u \text{ est dirigé de } S \text{ vers } X \setminus S, \\ -1, & \text{si } u \text{ est dirigé de } X \setminus S \text{ vers } S, \\ 0, & \text{si } u \notin A. \end{cases}$$

Théorème 5.3.4. $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ est une tension où $\theta_i \geq 0$ **si et seulement si** $\theta = \lambda_1 \omega^1 + \dots + \lambda_k \omega^k$ où $\lambda_i \geq 0$ et $\omega^1, \dots, \omega^k$ sont des cocircuits élémentaires.

Démonstration. **A) On commence par la condition nécessaire :** Supposons que θ est une tension avec $\theta_i \geq 0$ pour tout arc $u_i \in U$.

Alors, θ peut être décomposée en une combinaison linéaire de tensions associées à des cocircuits élémentaires. En d'autres termes, on peut écrire :

$$\theta = \lambda_1 \omega^1 + \dots + \lambda_k \omega^k,$$

où ω^i sont des tensions associées à des cocircuits élémentaires et λ_i sont des réels. Et puisque $\theta_i \geq 0$ pour tout arc $u_i \in U$, alors λ_i doivent être positifs pour préserver cette propriété.

B) On passe à la condition suffisante : Supposons que θ peut être exprimée en une combinaison linéaire positive de cocircuits élémentaires, c'est-à-dire :

$$\theta = \lambda_1 \omega^1 + \dots + \lambda_k \omega^k,$$

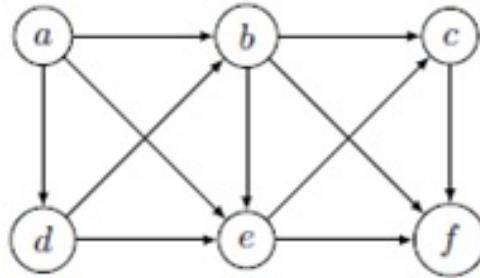
où $\lambda_i \geq 0$ et ω^i sont des cocircuits élémentaires.

Chaque cocircuit ω^i étant un cocircuit élémentaire, il représente une tension sur le graphe G . Par linéarité, toute combinaison linéaire de tensions est également une tension. Donc, θ est une tension. Puisque chaque ω^i est associé à un cocircuit élémentaire, ses valeurs sont intrinsèquement positives ou négatives sur les arcs du cocircuit. Et Les coefficients λ_i garantissent que la combinaison linéaire maintient la positivité de θ . Par conséquent, $\theta_i \geq 0$ pour tous les arcs $u_i \in U$. □

Proposition 5.3.3. Le nombre de tensions linéairement indépendantes sur un graphe $G = (X, U)$ avec n sommets et m arcs est égal à $n - m + 1$.

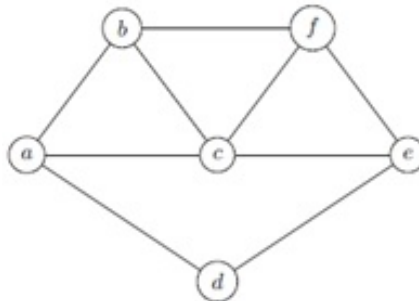
5.4 Exercices

Exercice 5.1. Dans le graphe G suivant :



1. Calculer le nombre cyclomatique et cocyclomatique de ce graphe.
2. Donner les vecteurs de cycles $c(abcfeda)$ et $c(bdefb)$ et les vecteurs de cocycle $\omega(ac)$ et $\omega(bdef)$.
3. Vérifiez que les deux premiers vecteurs sont chacun orthogonaux aux deux derniers.
4. Soit s un sommet d'un graphe $G = (X, U)$ et c un cycle ne contenant pas s . Montrer $\omega(s) \perp \omega(c)$.

Exercice 5.2. Soit le graphe G suivant :



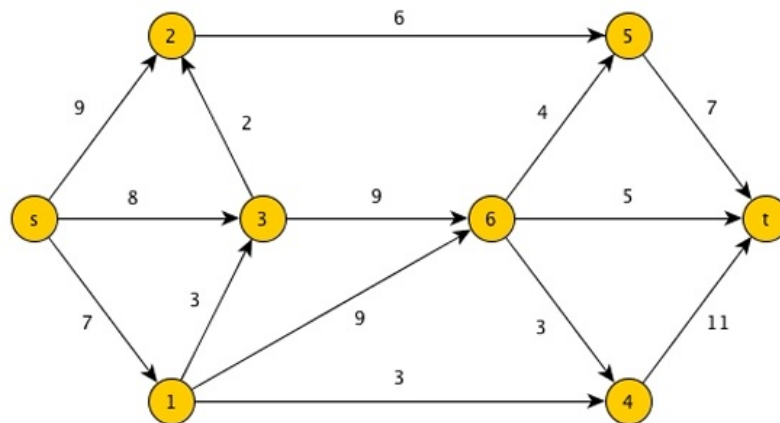
1. Donner les vecteurs associés aux cycles $(bcfb)$ et $(abfeda)$.
2. Montrer que le cycle $(bcfb)$ est combinaison linéaire de deux autres cycles que l'on déterminera.
3. Combien d'éléments comporte une base de cycles de G ?
4. Donner une base de cycles de G qui ne contient ni $(bcfb)$ ni $(abfeda)$.
5. Exprimer $(abfeda)$ en fonction de la base calculée à la question précédente.
6. (i) Donner les vecteurs associés aux cocycles (abf) et (ae) .
(ii) Montrer que le cocycle (ae) est combinaison linéaire de deux autres cocycles que l'on déterminera.
7. Combien d'éléments comporte une base de cocycles de G ?
8. Donner une base de cocycles de G qui ne contient aucun cocycle réduit à un nœud.

9. Exprimer (abf) en fonction de la base calculée à la question précédente.

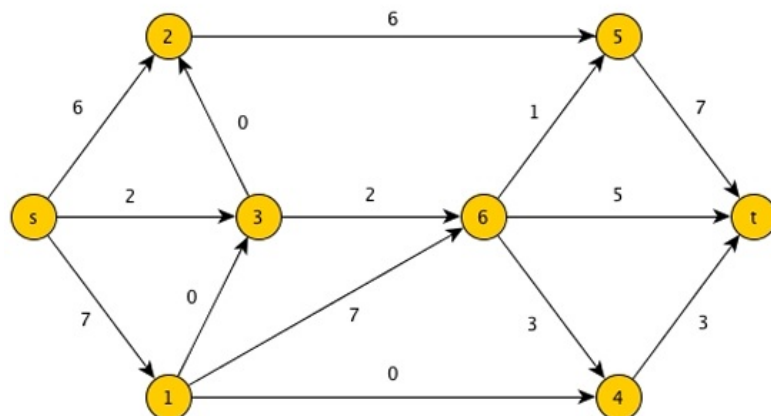
Exercice 5.3. Une usine comporte généralement un gros réseau de canalisations, transportant l'eau d'une source unique (le point d'arrivée d'eau) vers une sortie unique : le tout à l'égout. Lors d'une extension de l'usine, on raccorde les anciennes canalisations aux nouvelles, augmentant donc les débits de certaines canalisations, jusqu'à saturation de certaines d'entre elles. On souhaite alors remplacer certaines de ces canalisations afin d'augmenter le flot global de l'usine. Le but du problème est donc de savoir quelles sont les canalisations saturées qu'il serait souhaitable de remplacer par de nouvelles canalisations plus importantes.

Question : Modélisez comme un problème de graphe.

Exercice 5.4. Le dessin ci-dessous représente un graphe avec les capacités sur les arcs.



On a trouvé le flot f suivant :



Question : Vérifiez que f est bien un flot réalisable. Justifiez votre réponse.

Problèmes de partitionnement

La compréhension et la résolution des problèmes de partitionnement sont cruciales pour une variété de domaines allant des réseaux sociaux à la bioinformatique, en passant par la logistique et les systèmes informatiques. Cette introduction explorera les concepts fondamentaux et les applications des problèmes de partitionnement dans la théorie des graphes.

6.1 Coloration dans les graphes

6.1.1 Coloration des sommets

Définition 6.1.1. Soit G un graphe non orienté sans boucle. Une **coloration** de G est une application $\gamma : X \rightarrow C$ de l'ensemble de sommets X de G dans un ensemble de couleurs C , tel que si x et y sont adjacents alors $\gamma(x) \neq \gamma(y)$, c'est-à-dire deux sommets adjacents n'ont pas la même couleur.

Exemple 6.1.1. Voici un graphe à 4 sommets avec deux couleurs.

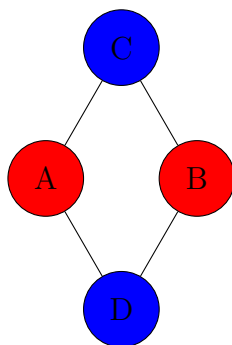


FIGURE 6.1 – Graphe à des sommets avec deux couleurs.

$S_1 = \{A, B\}$ et $S_2 = \{C, D\}$ sont des stables.

Remarque 6.1.1. Les sommets de même couleur dans un graphe colorié G forment exactement un stable.

Remarque 6.1.2. Une coloration immédiate par l'utilisation de n couleurs distinctes pour un graphe d'ordre n .

Ce qui nous intéresse est l'optimisation de nombre de couleurs utilisées.

Définition 6.1.2. Le **nombre chromatique** du graphe G , noté $\chi(G)$, est le nombre de couleurs minimal permettant de colorier G .

Exemple 6.1.2. Le nombre chromatique du graphe de la Figure 6.1 est $\chi(G) = 2$.

Remarque 6.1.3. Il est clair que le nombre chromatique d'un graphe simple complet K_n est $\chi(K_n) = n$.

Exemple 6.1.3. Le nombre chromatique de K_4 est $\chi(K_4) = 4$, voir la figure suivante.

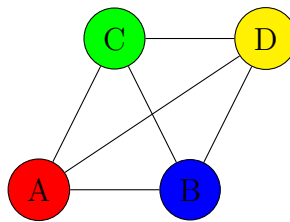


FIGURE 6.2 – K_4 a quatre couleurs.

Définition 6.1.3. On dit que G est k -chromatique, si $\chi(G) = k$.

Propriété 6.1.1. — Le nombre chromatique d'un graphe d'ordre n est $\chi(G) \leq n$.

— Si un graphe G d'ordre n a un sous graphe complet d'ordre p (c'est-à-dire K_p), alors $p \leq \chi(G) \leq n$.

— Si $\Delta(G)$ est le degré maximum des sommets de G , alors $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

— Un graphe planaire est au plus 4-chromatique.

— Une chaîne est au plus 2-chromatique.



— Un cycle est au plus 3-chromatique.

6.1.2 Coloration des arêtes

On peut aussi colorier les arêtes d'un graphe telles que chaque deux arêtes incidentes au même sommet n'aient pas la même couleur. Bien sûr, cela nécessite que le graphe non orienté n'ait eu une boucle.

Définition 6.1.4. Soit G un graphe non orienté sans boucle. Une **coloration des arêtes** de G est une application $\gamma : E \rightarrow C$ de l'ensemble des arêtes E dans l'ensemble fini des couleurs C , tel que si e et e' deux arêtes ont une extrémité commune x alors $\gamma(e) \neq \gamma(e')$.

Définition 6.1.5. On appelle **indice chromatique** le nombre minimal de couleurs permettant de colorier les arêtes de G , noté $\chi'(G)$.

Exemple 6.1.4. L'indice chromatique du graphe suivant est $\chi'(G) = 2$.

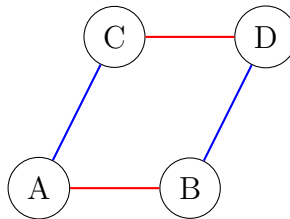


FIGURE 6.3 – Graphe a quatre arêtes avec deux couleurs.

Théorème 6.1.1 (Théorème de Vizing [Viz]). Pour tout graphe G simple, on a $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Démonstration. 1) Si $\Delta(G) = 1$, alors G est une collection d'arêtes disjointes, et $\chi'(G) = 1 = \Delta(G) + 0$.

2) Si $\Delta(G) = 2$, alors G est une collection de cycles et de chemins, et il est bien connu que $\chi'(G) = 2 = \Delta(G)$.

3) Supposons $\Delta(G) \geq 3$. Nous devons montrer $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$:

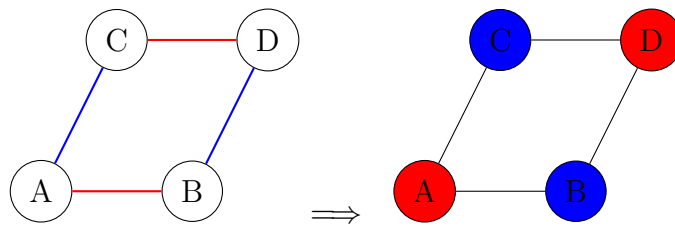
- Supposons que nous avons colorié G avec $\Delta(G) + 1$ couleurs. Puis nous allons prouver que cette coloration existe en utilisant une approche par induction et par contradiction : Supposons que G est un graphe minimal (en termes du nombre d'arêtes) pour lequel $\chi'(G) > \Delta(G) + 1$. Soit $e \in E$ et $G' = G - e$. Par hypothèse d'induction, G' peut être colorier avec $\Delta(G) + 1$ couleurs. Maintenant soit x et y les sommets incidents à e . Nous devons trouver une couleur pour e qui ne soit pas utilisée par les arêtes incidentes à x et y . Si x et y ont moins de $\Delta(G)$ arêtes colorées chacune, il y a au moins une couleur disponible pour e . Si x et y ont exactement $\Delta(G)$ arêtes colorées, alors nous devons réorganiser les couleurs par une série de recolorations en utilisant un "chemin d'alternance". Ce dernier trouve un chemin d'alternance entre les couleurs des arêtes incidentes à x et y , puis utiliser ce chemin pour réorganiser les couleurs des arêtes de manière à libérer une couleur pour e .

Si nous réussissons à réorganiser les couleurs pour e , alors G est $(\Delta(G) + 1)$ -coloriable, ce qui contredit notre hypothèse de minimalité. Ainsi, nous devons avoir $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$. \square

Théorème 6.1.2. *Si $G = (X, E)$ un graphe complet, alors on a*

$$\chi'(G) = \begin{cases} |X| - 1 = \Delta(G), & \text{si } |X| \text{ est pair,} \\ |X| = \Delta(G) + 1, & \text{si } |X| \text{ est impair.} \end{cases}$$

Remarque 6.1.4. *Le problème de coloration des arêtes peut se ramener à celui des sommets pour un graphe G en définissant le graphe adjoint G^a ainsi les sommets de G^a sont les arêtes de G et deux sommets de G^a sont adjacents, si, dans G si deux arêtes ont une extrémité commune.*



Théorème 6.1.3 (Théorème de König [Kon]). *Si G est un graphe biparti, alors $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

6.2 Couplage dans les graphes

En regroupant les arêtes de même couleurs nous obtenons une partition de l'ensemble des arêtes E .

Définition 6.2.1. *Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté. Un **couplage** est un ensemble d'arêtes n'ayant aucune extrémité commune deux à deux, c'est-à-dire les arêtes qui ont la même couleur.*

Exemple 6.2.1. *Le graphe suivant a deux couplages : $C_1 = \{\{A, B\}, \{C, D\}\}$ et $C_2 = \{\{A, C\}, \{B, D\}\}$.*

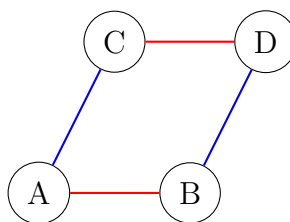


FIGURE 6.4 – Graphe avec deux couplages.

Définition 6.2.2. On dit que le couplage est **maximum** s'il contient le plus grand nombre d'arêtes possibles.

Définition 6.2.3. On dit que le couplage est **maximal** si toute arête du graphe est incidente à au moins une arête du couplage.

Définition 6.2.4. On dit que le couplage est **parfait** si tout sommet du graphe est incident à une arête du couplage.

Exemple 6.2.2. 1) Le graphe suivant forme un couplage maximum et parfait.

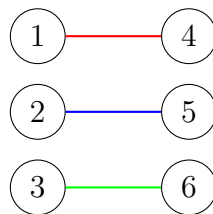


FIGURE 6.5 – Un couplage maximum et parfait.

2) Le graphe suivant forme un couplage maximal et non maximum.

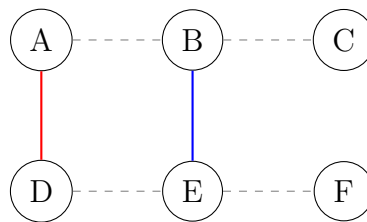


FIGURE 6.6 – Un couplage maximal et non maximum.

Propriété 6.2.1. Tout couplage parfait est maximum, mais la réciproque est fausse.

Exemple 6.2.3. Le graphe suivant forme un couplage maximum et non parfait.

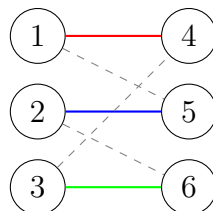


FIGURE 6.7 – Un couplage maximum et non parfait.

Propriété 6.2.2. Tout couplage maximum est maximal, mais la réciproque est fausse.

Notations 6.2.1. Le nombre d'arêtes d'un couplage maximum d'un graphe G , noté $\alpha'(G)$.

Définition 6.2.5. Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté et $E' \subseteq E$ un couplage de G . Une **chaîne alternée** par rapport à E' est une chaîne élémentaire telle que ses arêtes appartiennent alternativement à $E - E'$ et E' .

Définition 6.2.6. - Dans le graphe $G' = (X, E')$, $\forall x \in X, d'_{G'}(x) \leq 1$.

- Si $d'_{G'}(x) = 1$, x est dit **saturé** par E' .
- Si $d'_{G'}(x) = 0$, x est dit **non saturé** par E' .
- E' est parfait s'il sature tous les sommets.

Exemple 6.2.4. Le graphe suivant est une chaîne alternée de longueur 5 impaire avec un couplage maximal $E' = \{\{B, C\}, \{D, E\}\}$.

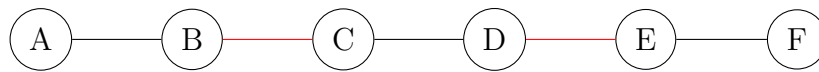


FIGURE 6.8 – Chaîne alternée de longueur impaire avec un couplage maximal.

Théorème 6.2.1. Un couplage E' est maximum dans $G = (X, E)$ **si et seulement si** il n'existe pas une chaîne alternée de longueur impaire.

Démonstration. **A) On commence par la condition nécessaire : ?** Supposons que E' est un couplage maximum dans G . Supposons qu'il existe une chaîne alternée de longueur impaire P dans G relative à E' . Une chaîne alternée de longueur impaire commencera et se terminera par une arête qui n'appartient pas au couplage E' ou commencera et se terminera par une arête appartenant au couplage E' .

Soit P une telle chaîne alternée : $x_0 e_1 x_1 \cdots x_{2k} e_{2k+1} x_{2k+1}$, où les e_i sont des arêtes de E' pour i impair, et des arêtes de $E \setminus E'$ pour i pair.

En inversant les arêtes de P (c'est-à-dire en ajoutant les arêtes de $P \cap (E \setminus E')$ et en retirant les arêtes de $P \cap E'$ de E'), nous obtenons un nouveau couplage E'' de taille $|E'| + 1$.

Cela signifie que E' n'était pas un couplage maximum, ce qui est une contradiction.

Par conséquent, s'il n'existe pas de chaîne alternée de longueur impaire dans G , alors E' est un couplage maximum.

B) On passe à la condition suffisante : ? Supposons que E' n'est pas un couplage maximum dans G . Puisqu'il existe un couplage plus grand, il existe une arête e qui peut être ajoutée à E' pour obtenir un couplage plus grand.

Considérons la plus courte chaîne alternée commençant par e et terminant par une arête qui ne peut pas être ajoutée à E' sans violer la condition du couplage.

Une telle chaîne doit exister et doit nécessairement être de longueur impaire car elle commence par une arête n'appartenant pas à E' et finit par une arête n'appartenant pas à E' .

Par construction, cette chaîne alternée de longueur impaire prouve que E' peut être amélioré, confirmant qu'il n'était pas maximum. \square

6.3 Le transversal dans les graphes

Définition 6.3.1. Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté et $T \subset X$. On dit que T est un **transversal** de G si tout arête de E possède, au moins, une extrémité dans T .

Exemple 6.3.1. $T = \{B, E\}$ est un transversal de graphe suivant.

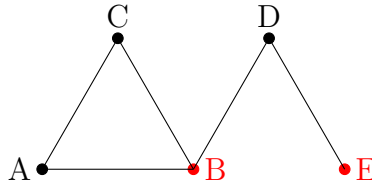


FIGURE 6.9 – Un transversal dans G .

Définition 6.3.2. — T est *minimal* si $\forall x \in X, T - \{x\}$ n'est pas un transversal.
— T est *minimum* si $\forall T'$ un transversal dans G on a $|T| \leq |T'|$.

Notations 6.3.1. — Le nombre de sommets d'un transversal minimum de G noté $\beta(G)$.
— Le nombre de sommets d'un stable maximum de G noté $\alpha(G)$.

Théorème 6.3.1. Pour tout transversal T et tout couplage E' de $G = (X, E)$, on a $|E'| \leq |T|$.

Démonstration. Puisque T est un transversal, chaque arête de G , y compris celles de E' , doit être incidente à au moins un sommet de T .

Considérons les sommets qui couvrent les arêtes de E' . Chaque arête de E' doit être couverte par au moins un sommet de T . Cependant, puisque les arêtes de E' ne partagent pas de sommets (par définition du couplage), chaque arête de E' nécessite un sommet distinct de T pour être couverte.

Étant donné que chaque arête de E' est couverte par un sommet distinct de T , il s'ensuit que le nombre d'arêtes dans E' ne peut pas dépasser le nombre de sommets dans T . Donc, $|E'| \leq |T|$. \square

Corollaire 6.3.1. Soient T un transversal dans G et E' un couplage dans G . Si $|E'| = |T|$ alors E' est un couplage maximum et T est un transversal minimum. La réciproque est fausse.

Exemple 6.3.2. Dans le graphe suivant, le transversal minimum est $T = \{A, C, D\}$ et le couplage maximum est $E' = \{\{A, E\}, \{B, C\}\}$ mais $|E'| = 2 \neq |T| = 3$.

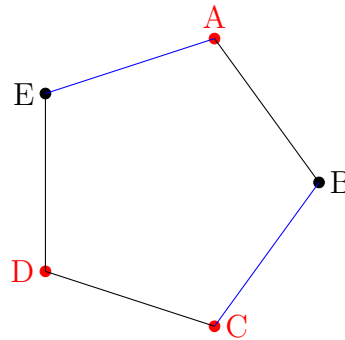


FIGURE 6.10 – Un graphe contient un couplage maximum E' et un transversal minimum T mais $|E'| \neq |T|$.

Proposition 6.3.1. 1. $X' \subset X$ est un stable **si et seulement si** $X \setminus X'$ est un transversal.
 2. On a $\alpha(G) + \beta(G) = |X|$.

Démonstration. 1. **A) On commence par la condition nécessaire :** Supposons que $X' \subset X$ soit un stable. Cela signifie qu'il n'y a pas d'arête entre deux sommets de X' . Prenons une arête $e = \{x, y\}$ quelconque du graphe $G = (X, E)$. Il y a deux possibilités pour les sommets x et y :

- Si $x \in X'$, alors $y \notin X'$ (car sinon il y aurait une arête e entre x et y dans X' , contredisant le fait que X' est un stable).
- Si $y \in X'$, alors $x \notin X'$.

Cela signifie que pour chaque arête $e = \{x, y\}$, au moins un des sommets x ou y est dans $X \setminus X'$. Donc, $X \setminus X'$ intersecte chaque arête du graphe, ce qui implique que $X \setminus X'$ est un transversal.

B) On passe à la condition suffisante : Supposons que $X \setminus X'$ soit un transversal. Cela signifie que chaque arête du graphe a au moins un de ses sommets dans $X \setminus X'$.

Pour montrer que X' est un stable, supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Alors il existe une arête $e = \{x, y\}$ telle que $x \in X'$ et $y \in X'$. Mais cela signifierait que l'arête e n'a aucun de ses sommets dans $X \setminus X'$, contredisant le fait que $X \setminus X'$ est un transversal.

Ainsi, x et y ne peuvent pas être tous les deux dans X' , ce qui prouve que X' est un stable.

2. **A) On commence par $\alpha(G) + \beta(G) \leq |X|$:** Soit S un stable maximum dans G , donc $|S| = \alpha(G)$. Considérons l'ensemble des sommets $T = X \setminus S$. Nous devons montrer que T est un transversal.

Supposons par l'absurde que T n'est pas un ensemble couvrant. Cela signifie qu'il existe une arête $\{x, y\}$ telle que $x, y \in S$. Mais cela contredit le fait que S est un stable, car il ne doit pas y avoir d'arête entre deux sommets de S .

Ainsi, T est bien un transversal, et donc $\beta(G) \leq |T| = |X| - \alpha(G)$. Par conséquent, $\alpha(G) + \beta(G) \leq \alpha(G) - (|X| - \alpha(G)) = |X|$.

B) On passe à $\alpha(G) + \beta(G) \geq |X|$: Soit T un transversal minimum, donc $|T| = \beta(G)$. Considérons l'ensemble des sommets $S = X \setminus T$. Nous devons montrer que S est un stable.

Supposons par l'absurde que S n'est pas un stable. Cela signifie qu'il existe une arête $\{x, y\}$ telle que $x \in S$ et $y \in S$. Mais cela contredit le fait que T est transversal, car chaque arête doit avoir au moins un sommet dans T .

Ainsi, S est bien un stable, et donc $\alpha(G) \geq |S| = |X| - \beta(G)$. Par conséquent, $\alpha(G) + \beta(G) \geq (|X| - \beta(G)) + \beta(G) = |X|$.

En combinant les deux sens de l'inégalité, nous obtenons $\alpha(G) + \beta(G) = |X|$.

□

6.4 Le recouvrement dans les graphes

Définition 6.4.1. Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté et $R \subset E$. On dit que R est un **recouvrement** de G si tout sommet de X soit l'extrémité, d'au moins, une arête de R .

Exemple 6.4.1 (Exemple pratique). Caméra placée au milieu d'un couloire (une arête) soit surveillez les deux carrefours qui constituent les extrémités d'un couloire.

Soit 11 carrefours qui sont surveillés par 12 caméras. Le nombre minimum de caméras pour surveiller les carrefours c'est le recouvrement minimum $R = \{\{1, 5\}, \{1, 6\}, \{1, 7\}, \{2, 8\}, \{2, 9\}, \{3, 10\}, \{4, 11\}\}$.

Définition 6.4.2. — R est minimal si $\forall e \in E, R - e$ n'est pas un recouvrement.
— R est minimum si $\forall R'$ un recouvrement dans G on a $|R| \leq |R'|$.

Définition 6.4.3. Un couplage est parfait s'il est en même temps un recouvrement.

Notations 6.4.1. Le nombre d'arêtes d'un recouvrement minimum dans G noté $\beta'(G)$.

Proposition 6.4.1. 1. $2\alpha'(G) \leq |X| \leq 2\beta'(G)$.

2. On a $\alpha'(G) + \beta'(G) = |X|$.

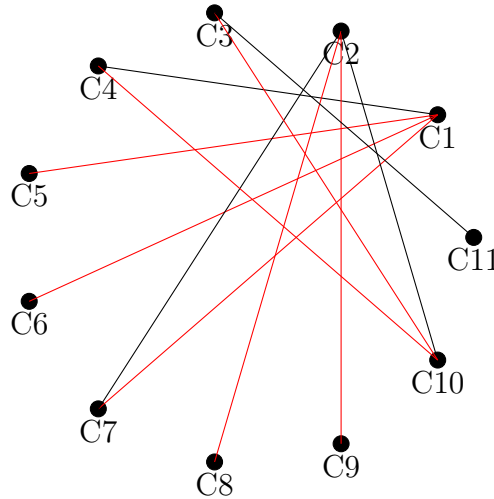


FIGURE 6.11 – Un recouvrement.

Démonstration. 1. **A) On commence par $2\alpha'(G) \leq |X|$:** Soit M un couplage maximum, donc $|M| = \alpha'(G)$. Chaque arête de M connecte deux sommets distincts, et aucune arête de M ne partage un sommet avec une autre arête de M . Ainsi, M couvre $2|M|$ sommets distincts.

Puisque M est un couplage maximum, il ne peut y avoir d'ensemble d'arêtes indépendantes couvrant plus de sommets que M . Par conséquent $2\alpha'(G) \leq |X|$.

B) On passe à $|X| \leq 2\beta'(G)$: Soit R un recouvrement minimum, donc $|R| = \beta'(G)$. Chaque arête de R couvre au plus deux sommets, et tous les sommets de G doivent être couverts par les arêtes de R .

Par conséquent, le nombre total de sommets $|X|$ est au plus le double du nombre d'arêtes de recouvrement minimum R . Donc, $|X| \leq 2\beta'(G)$.

2. **A) On commence par $\alpha'(G) + \beta'(G) \leq |X|$:** Soit M un couplage maximum, donc $|M| = \alpha'(G)$. Chaque arête de M connecte deux sommets distincts, et aucune arête de M ne partage un sommet avec une autre arête de M . Ainsi, M couvre $2|M|$ sommets distincts.

Considérons maintenant un recouvrement minimum R , donc $|R| = \beta'(G)$. Les sommets de G doivent être couverts par les arêtes de R , et chaque arête de R couvre au plus deux sommets.

Par conséquent, le nombre total de sommets $|X|$ est au plus le double du nombre d'arêtes de recouvrement minimum R . Ainsi, $\alpha'(G) + \beta'(G) \leq |X|$.

B) On passe à $\alpha'(G) + \beta'(G) \geq |X|$: Soit M un couplage maximum et R un recouvrement minimum. Chaque sommet du graphe est couvert par une arête de R et chaque sommet ne peut pas être couvert par plus d'une arête de M , car M est un ensemble indépendant.

Chaque arête de M contribue à couvrir deux sommets et chaque arête de R contribue à couvrir les sommets restants qui ne sont pas couverts par les arêtes de M . Par conséquent, le nombre total de sommets $|X|$ doit être au moins le total des contributions des arêtes de M et de R . Ainsi, $\alpha'(G) + \beta'(G) \geq |X|$.

En combinant les deux inégalités obtenues, nous avons $\alpha'(G) + \beta'(G) = |X|$.

□

Théorème 6.4.1. G admet un couplage parfait **si et seulement si** $2\alpha'(G) = |X| = 2\beta'(G)$.

Démonstration. **A) On commence par $2\alpha'(G) = |X|$:** Supposons que G admet un couplage parfait M . Un couplage parfait couvre tous les sommets du graphe sans chevauchement, chaque arête du couplage couvrant exactement deux sommets.

Si M est un couplage parfait, alors chaque sommet de G est incident à exactement une arête de M . Donc, le nombre de sommets dans G est deux fois le nombre d'arêtes dans le couplage parfait M . Donc, $|X| = 2|M|$. Puisque M est un ensemble d'arêtes indépendantes et parfaites, $\alpha'(G) = |M|$. Ainsi, $2\alpha'(G) = |X|$.

B) On passe à $|X| = 2\beta'(G)$: Dans un couplage parfait, chaque sommet est couvert par exactement une arête du couplage, donc le couplage parfait couvre tous les sommets avec le nombre minimum d'arêtes.

Étant donné que M est un couplage parfait, M est aussi un ensemble couvrant d'arêtes minimal. Donc, $\beta'(G) = |M|$. Ainsi, $|X| = 2\beta'(G)$. □

6.5 Exercices

Exercice 6.1. Cinq étudiants A, B, C, D et E doivent passer les examens suivants :

A	Micro-économie, anglais, théorie des jeux
B	Probabilités, analyse financière
C	Macro, théorie des jeux
D	Anglais, probabilités, macro
E	Micro-économie, analyse financière

Question : Sachant que chaque étudiant ne peut se présenter qu'à une épreuve par jour, quel est le nombre minimal de jours nécessaire à l'organisation de toutes les épreuves ?

Exercice 6.2. 5 amis font un tournoi d'échecs, dont les parties se déroulent en temps limité d'une heure, chacun devant rencontrer les quatre autres.

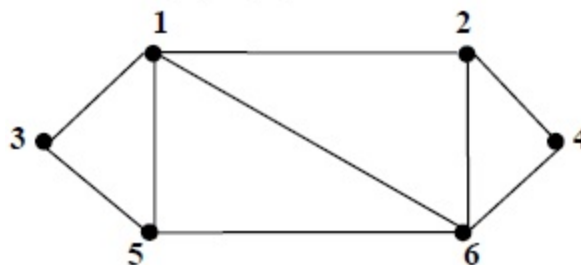
Question : Combien d'heures nécessite ce tournoi ?

Exercice 6.3. Un ensemble de classes doit recevoir une série de cours d'une heure réalisés par un ensemble de professeurs. Bien sûr, chaque classe reçoit un cours unique par heure et chaque professeur donne un cours unique par heure.

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
p_1	1	1	1	0	0
p_2	2	0	0	1	0
p_3	0	1	1	1	1
p_4	0	0	0	1	2

Question : 1) Minimiser le nombre d'heures totales permettant la réalisation de tous les cours.

Exercice 6.4. Soit le graphe suivant :



1. Donner un stable et un couplage.
2. Donner un couplage maximal et un couplage maximum.
3. Donner un transversal, un transversal minimal et un transversal minimum.
4. Donner un recouvrement et un recouvrement minimum.

Bibliographie

- [AH1] K. Appel et W. Haken, Every planar map is four colorable. Part I : Discharging. *Illinois Journal of Mathematics*, **21(3)** : 429-490, (1976).
- [AH2] K. Appel et W. Haken, Every planar map is four colorable. Part II : Reducibility. *Illinois Journal of Mathematics*, **21(3)** : 491-567, (1977).
- [Ber] C. Berge. Graphes et hypergraphes. *Ed. Dunod*, (1970).
- [Bon] J. A. Bondy et U. S. R. Murty, Graph Theory. *Springer*, (2008).
- [Cayl] A. Cayley, A Theorem on Trees. *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, **23** : 376-378 (1889).
- [Die] R. Diestel, Graph Theory (5th ed.) *Springer*, (2017).
- [Eu] L. Euler, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, **8** : 128-140, (1736).
- [Dro] F. Droesbeke, Les graphes par l'exemple. *Ed. Marketing*, (1987).
- [Gon] M. Gondran et M. Minoux, Graphes et algorithmes. *Ed. Eyrolles*, (1995).
- [Ham] W. R. Hamilton, On the Icosian Game. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **4(13)** : 259-264, (1857).
- [Kau] A. Kauffman, Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle. *Ed. Dunod*, (1974).
- [Kon] D. König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen : Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe. *Leipzig : Akad. Verlag*, (1931).
- [Kura] K. Kuratowski, Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fundamenta Mathematicae*, **15** : 271-283, (1930).
- [Krus] J. B. Kruskal, On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **7(1)** : 48-50, (1956).
- [Lab] J. Labelle, Théorie des graphes. *Modulo Editeur*, (1981).
- [Pri] R. C. Prim, Shortest connection networks and some generalizations. *Bell System Technical Journal*, **36(6)** : 1389-1401 (1957).
- [Prin] C. Prins, Algorithmes de graphe. *Ed. Eyrolles*, (1997).
- [Wag] K. Wagner, Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. *Mathematische Annalen*, **114** : 570-590, (1937).

-
- [Viz] V. G. Vizing, On an estimate of the chromatic class of a p -graph. *Diskret. Analiz*, **3** : 25-30, (1964). (en russe)
- [Whit] H. Whitney, Congruent Graphs and the Connectivity of Graphs. *American Journal of Mathematics*, **54(1)** : 150-168, (1932).