Chapitre-06-
Intégration Numérique

I. Introduction

Nous présentons ci-après plusieurs méthodes permettant de calculer l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ d'une fonction f continue définie dans l'intervalle $[a, b]$.

Ces méthodes s'avèrent particulièrement efficaces lorsque les primitives de f ne sont pas des fonctions élémentaires ou sont trop complexes à calculer.

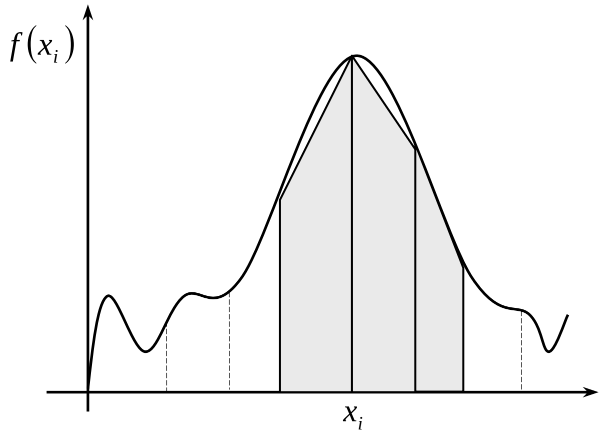
II. Méthode des trapèzes

II.1 Formule des trapèzes améliorés

On subdivise l'intervalle [a, b] en sous- intervalles $\{[x_{i-1},x_i]$, i = 1,2,…, n; $x_0 = a$; $x_n = b\}$ sur lesquels la fonction f est remplacée par le segment de droite qui joint les points $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ et $(x_i , f(x_i))$. Cette procédure revient à remplacer, sur $[a, b]$, la fonction f par une fonction d'interpolation linéaire par morceaux. D'un point de vue géométrique, on assimile l'aire comprise entre le graphe de f et l'axe des x à la somme des surfaces de n trapèzes.

Considérons que la division en sous-intervalle est uniforme et posons : $x_i = a + i \cdot h$

Où $h = \frac{b-a}{n}$ et $f(x_i) = f_i$; i = 0, 1, 2, …, n.



Méthode du Trapèze

Sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$: $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = h\frac{(f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$ surface du trapèze correspondant.

En additionnant les aires des n trapèzes, on obtient la <u>*formule des trapèzes*</u> :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\big(f(x_0) + f(x_1)\big) + \frac{h}{2}\big(f(x_1) + f(x_2)\big) + \cdots \frac{h}{2}\big(f(x_{n-1}) + f(x_n)\big)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

On peut montrer que l'erreur commise est proportionnelle à h^2 (si la fonction f est deux fois continûment dérivable). On dit que la méthode des trapèzes est <u>*d'ordre 2*</u>.

La formule est « exacte » pour les fonctions f de degré ≤ 1.

II.2. Calcul de l'erreur

On peut montrer que pour la formule des trapèzes, l'erreur est donnée par :

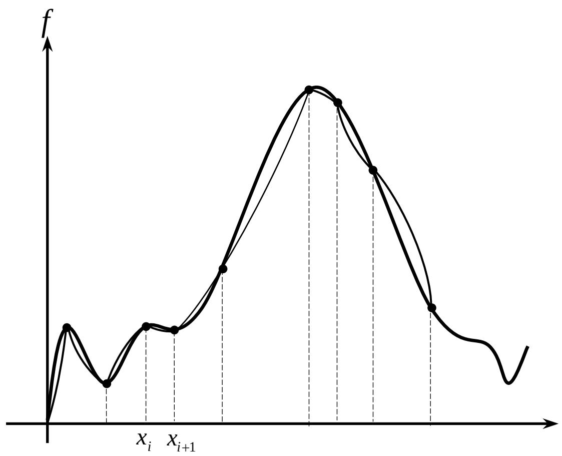
$$|E(h)| \leq \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2$$

avec $M_2 = \underbrace{sup}_{x\in[a,b]} |f''(x)|$

III. Méthode de Simpson

Développons à présent une méthode d'ordre 4 qui équivaut à remplacer la fonction à intégrer par des paraboles définies sur des sous-intervalles comprenant trois abscisses d'intégration successives. On suppose que l'intervalle $[a, b]$ est partagé en n sous-intervalles égaux :

$[x_{i-1}, x_i]$, tels que $x_i = a + ih$, avec $h = (b-a)/n$.



Approximation parabolique par morceaux

On groupe les points par trois, n doit donc être pair (NB ce n'est pas le cas sur la figure précédente) :

$a = x_0, x_1, x_2 \mid x_2, x_3, x_4 \mid \ldots \mid x_{n-2}, x_{n-1}\, x_n = b.$

Et on remplace, sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, la fonction f par une parabole. Pour l'intervalle $[x_0, x_2]$, la courbe représentée par $f(x)$ est approchée par la parabole d'équation :

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \quad L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$p(x) = f_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2} + f_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{-h^2} + f_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2}$$

Et l'intégrale est alors approchée par : $\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p(x)dx = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2]$

En répétant ce procédé pour les n (pair !) sous-intervalles, on a finalement la *formule de Simpson* : $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n]$

Cette formule est exacte pour les polynômes $f(x)$ de degré ≤ 3.

III.1. Formule de Simpson améliorée

Tout comme pour la méthode des trapèzes, on peut obtenir une *formule de Simpson améliorée* :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n] - \frac{h^4}{180}[f'''(b) - f'''(a)]$$

Finalement l'intégrale s'écrit comme suit :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(a) + f(b) + 4\sum_{\substack{i=1 \\ (i \to \text{Im}\, paire)}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2 \\ (i \to paire)}}^{n-2} f(x_i)] + E(h)$$

III.2. Calcul de l'erreur

L'erreur de cette formule est de l'ordre de h^6. La méthode de Simpson est donc d'ordre 4 et son erreur est donnée par :

$$|E(h)| \leq \frac{(b-a)}{180} h^4 M_4$$

avec $M_4 = \underbrace{sup}_{x \in [a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$.

IV. Méthode de newton cotes

Les méthodes des trapèzes et de Simpson sont des cas particuliers des formules de Newton-Cotes.

L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est une combinaison linéaire de $f(x_i)$, ce qui signifie que cette intégrale est calculée de façon exacte lorsque $f(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à *n* : le nombre de valeurs x_i est égal à *n+1*, on intègre sur *n* tranches, et les valeurs des coefficients de la combinaison linéaire dépendent de *n*. La méthode des trapèzes et la méthode de Simpson correspondent respectivement à *n=1* et *n=2*. Les résultats de cette méthode donnent :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + \cdots + a_k f(x_k) + \cdots + a_n f(x_n)$$

Soit encore $\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{\Delta x}{A} \sum_{k=0}^{n'} a_k f(x_0 + k\Delta x), \quad n' \neq n$

Où A et a_k sont données par le tableau suivant :

Nom de la formule	*n*	*A*	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Trapèzes	*1*	*2*	*1*	*1*					
Simpson	*2*	*3*	*1*	*4*	*1*				
Villarceau	*4*	*45*	*14*	*64*	*24*	*64*	*14*		
Hardy	*6*	*140*	*41*	*216*	*27*	*272*	*27*	*216*	*41*

***Remarque* :** Les formules de Newton-Cotes ne doivent pas être utilisées pour n élevé.

La méthode de Simpson est couramment utilisée.

Par exemple, pour la méthode de Newton-Cotes de degré3, on obtient la formule suivante:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{h}{8}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)\big)$$

V. Méthode de quadrature

Pour calculer $\int_a^b f(x)dx$ les méthodes d'intégration précédentes sont toutes basées sur la formule suivante:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(\alpha_i)$$

Une telle formule est appelée: *formule de quadrature.*

n : le nombre de segments (ou sous intervalles)

x_i:sont appelés les nœuds(ou abscisses) de la formule

w_i:sont les poids parfois aussi dénommés coefficients de la formule.

On doit maintenant choisir la forme de la fonction $f(x)$, dans notre cas on prend :

$f(x) = x^m$ avec $\boldsymbol{m = 0, 1, 2, \ldots, n}$

On remplace dans l'intégrale :

$$\int_a^b x^m\, dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(\alpha_i) = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$$

En variant i de 0 à n pour chaque valeur de m, on aura:

Pour m=0 : $x_0^0\ \mathrm{w}_0 + x_1^0 \mathrm{w}_1 + \cdots + x_n^0 w_n = \frac{b^1 - a^1}{1}$

Pour m=1 : $x_0^1\ \mathrm{w}_0 + x_1^1 \mathrm{w}_1 + \cdots + x_n^1 w_n = \frac{b^2 - a^2}{2}$

Pour m=2 : $x_0^2\ \mathrm{w}_0 + x_1^2 \mathrm{w}_1 + \cdots + x_n^2 w_n = \frac{b^3 - a^3}{3}$

$$\vdots$$

Pour m=n : $x_0^n\ w_0 + x_1^n w_1 + \cdots + x_n^n w_n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$

D'où on obtient pour toutes les valeurs de i et m le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0^1 & x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ x_0^2 & x_1^2 & & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{w}_0 \\ \mathrm{w}_1 \\ . \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ . \\ I_n \end{bmatrix}$$

avec $I_m = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$

Le déterminant de la matrice du système trouvé est dit de ''Von-Dermonde'' il est non nul d'où la solution de ce système existe et unique $(w_0, w_1, \dots .., w_n)$.