

Interrogation 02: Méthodes Numériques.

Soit $f(x) = e^{-\frac{x}{10}}$ définie sur l'intervalle $[1,4]$ par la table :

x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	0.905	0.819	0.741	0.670

- 1) Calculer l'interpolant de f par la méthode de Newton.
- 2) Estimer la valeur d'erreur au point $x = 1,5$ si $|f^{(4)}(x)| \leq 10^{-2}$

Corrigé

Le polynôme d'interpolation de Newton est :

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, \dots, x_k] e_k(x)$$

$$n + 1 = 4 \Rightarrow n = 3$$

avec

$$e_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}), k = 0, \dots, n$$

Nous allons déterminer le polynôme d'interpolation de Newton de degré

$x_0 = 1$	$\alpha_0 = f[x_0]$ $= 0.905$			
$x_1 = 2$	$f[x_1] = 0.819$	$\alpha_1 = f[x_0, x_1]$ $= \frac{0.819 - 0.905}{2 - 1}$ $= -0.086$		
$x_2 = 3$	$f[x_2] = 0.741$	$f[x_1, x_2] = \frac{0.741 - 0.819}{3 - 2}$ $= -0.078$	$\alpha_2 = f[x_0, x_1, x_2]$ $= 0.004$	
$x_3 = 4$	$f[x_3] = 0.670$	$f[x_2, x_3] = \frac{0.670 - 0.741}{4 - 3}$ $= -0.044$	$f[x_1, x_2, x_3]$ $= 0.017$	α_3 $= f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ $= 0.0043$

On obtient donc le polynôme suivant :

$$e_1(x) = (x - x_0)$$

$$e_2(x) = \prod_{i=0}^1 (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1)$$

$$e_3(x) = \prod_{i=0}^2 (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$P_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1]e_1(x) + f[x_0, x_1, x_2] e_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3] e_3(x)$$

$$P_3(x) = 0.905 - 0.086(x - 1) + 0.004(x - 1)(x - 2) + 0.0043(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$\Rightarrow P_3(x) = 0.973 - 0.051x - 0.022x^2 + 0.004x^3$$

2. Estimons la valeur de l'erreur au point $x = 1.5$, si $|f^{(4)}(x)| \leq 10^{-2}$

On a

$$\begin{aligned} E_T(1.5) &= f(1.5) - P(1.5) = \frac{f^{(4)}(\theta)}{(4)!} \times \Pi_{i=0}^3(1.5 - x_i), \theta \in [1, 4] \\ &\leq \frac{\sup_{1 \leq \theta \leq 4} |f^{(4)}(\theta)|}{(4)!} \times |\Pi_{i=0}^3(1.5 - x_i)| \\ &\leq \frac{10^{-2}}{24} \times |(1.5 - 1)(1.5 - 2)(1.5 - 3)(1.5 - 4)| \\ &\leq 3.9 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$
