
Série de TD N° 01

Exercice n°1 :

On considère un cercle, C , de rayon, R , on demande de calculer son périmètre, l , à partir de longueur élémentaire, dl , par une simple intégrale de longueur.

Exercice n°2 :

On considère un disque, D de rayon, R , on demande de calculer sa surface, S , à partir de la surface élémentaire, dS , par une intégrale double de surface.

Exercice n° 3 :

On considère un cylindre, V , de rayon, R , et de hauteur, H , on demande de calculer son volume, à partir du volume élémentaire, dV , par une intégrale triple de volume.

Exercice n° 4 :

On considère une sphère de rayon, R , on demande de calculer son volume à partir du volume élémentaire, dV , par une intégrale triple de volume.

Exercice n° 5 :

1. Calculer l'angle solide du demi-espace et de l'espace complet.
2. Calculer l'angle solide à $\theta = \theta_0$; Calculer pour les cas particuliers $\theta_0 = \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \pi$

Solutions

$$dl = R d\theta$$

1. On sait que la longueur élémentaire dl s'écrit :

On peut écrire donc : $l = \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R$.

2. On sait que la surface élémentaire dS est: $dS = \rho \, d\rho \, d\theta$

On écrit donc : $S = \iint_S d\rho \rho \, d\theta = \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \pi R^2$

3. On sait que le volume élémentaire est : $dV = d\rho \, \rho \, d\theta \, dz$

On aura donc : $V = \iiint_V d\rho \rho \, d\theta \, dz = \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz = \pi R^2 H$

4. On a : $dV = r \, dr \, r \sin \theta \, d\varphi \, d\theta$

Le volume total sera donc :

$$V = \iiint_V r^2 \, dr \sin \theta \, d\varphi \, d\theta = \int_0^R r^2 \, dr \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^3}{3} 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3} \pi R^3.$$