

Notes de cours
Systemes Non Linéaires
Professeur Salim Labiod
Département d'Automatique
Faculté des Sciences et de la Technologie
Université de Jijel

Version 2024

Introduction

1.1 Limitations des méthodes linéaires

Les méthodes d'analyse des systèmes linéaires sont particulièrement puissantes en raison des outils théoriques et techniques qui leur sont associés. Cependant, ces méthodes présentent plusieurs limitations, parmi lesquelles on peut citer :

- Aucun système physique n'est entièrement linéaire. Par conséquent, les méthodes linéaires ne sont applicables que dans un domaine de fonctionnement limité.
- Les modèles linéaires ne sont pas suffisants pour décrire tous les phénomènes physiques observés.
- Certains systèmes sont impossibles à modéliser, même localement, par des systèmes linéaires. Un exemple simple est le relais (la fonction signe).
- Une non-linéarité peut être introduite dans le système pour avoir de meilleures performances (commande TOR par exemple).

1.2 Système linéaire

Un système est linéaire s'il est décrit par des équations différentielles linéaires ordinaires à coefficients constants.

Remarque 1.1 : Tout système linéaire obéit au principe de superposition, défini par les propriétés d'additivité et d'homogénéité.

Additivité : Si les signaux d'entrée $u_1(t), \dots, u_n(t)$ ont pour réponses $y_1(t), \dots, y_n(t)$, alors le signal d'entrée $u(t) = u_1(t) + \dots + u_n(t)$ a pour réponse $y(t) = y_1(t) + \dots + y_n(t)$.

Homogénéité : Si le signal d'entrée $u(t)$ a pour réponse $y(t)$, alors $\alpha u(t)$ donne $\alpha y(t)$ où α est une constante.

Remarque 1.2 : On peut associer à un système linéaire, à l'aide de la transformée de Laplace, une fonction de transfert $H(s)$ qui est une fraction rationnelle en $s = j\omega$.

1.3 Système non linéaire

Par définition, un système non linéaire est un système qui ne respecte pas le principe de superposition et ne peut donc pas être décrit par des équations différentielles linéaires ordinaires à coefficients constants.

Cette caractéristique, ou plutôt l'absence de définition unique, explique la complexité et la diversité des systèmes non linéaires. En effet, il n'existe pas de théorie générale applicable à tous les systèmes non linéaires, mais plutôt une variété de méthodes spécifiques adaptées à certaines classes de ces systèmes.

1.4 Classes des systèmes dynamiques

On considère la classe des systèmes dynamiques décrits par une équation différentielle de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = h(x, t) \end{cases}$$

$x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$: Vecteur d'état

$u = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$: Vecteur de commande

$y = (y_1, \dots, y_p)^T \in \mathbb{R}^p$: Vecteur de sortie

$f(x, u, t) = (f_1(x, u, t), \dots, f_n(x, u, t))^T \in \mathbb{R}^n$ et $h(x, u, t) = (h_1(x, t), \dots, h_p(x, t))^T \in \mathbb{R}^p$

Système non autonome

$\dot{x} = f(x, t)$, la fonction f dépend explicitement du temps t .

Système autonome

$\dot{x} = f(x)$, la fonction f ne dépend pas explicitement du temps t .

Remarque 1.3 : Pour un système avec une entrée de commande : $\dot{x} = f(x, u)$, si $u = \phi(x, t)$ alors $\dot{x} = f(x, \phi(x, t))$ et le système est non autonome. Par contre, si $u = \phi(x)$ alors $\dot{x} = f(x, \phi(x))$ et le système est autonome.

Système linéaire invariant dans le temps

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, \quad A, B, C \text{ sont des matrices constantes.}$$

Système linéaire variant dans le temps (système non linéaire)

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x \end{cases}$$

Système bilinéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + (B_0 + B_1 x)u \\ y = Cx \end{cases}$$

Système non linéaire affine en l'entrée

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

1.5 Quelques comportements non linéaires

Les systèmes non linéaires possèdent des propriétés qui sont complètement absentes dans les systèmes linéaires. Certaines de ces propriétés sont présentées ci-après

1.5.1 Réponse indicielle dissymétrique

Système linéaire : Réponse indicielle symétrique

$$\dot{x} = -x + u$$

Pour un signal d'entrée symétrique et carré variant entre 0 et 1, le signal de sortie associé suit le signal d'entrée, mais avec une inertie. Les phases de montées alternent avec les phases de descentes de manière symétrique (voir Figure 1.1).

Système non linéaire particulier : Réponse indicielle dissymétrique

$$\dot{x} = -x^3 + u = -(x^2)x + u$$

Ce système non linéaire exhibe un comportement dissymétrique, la phase de montée est plus rapide que la phase de descente (voir Figure 1.1).

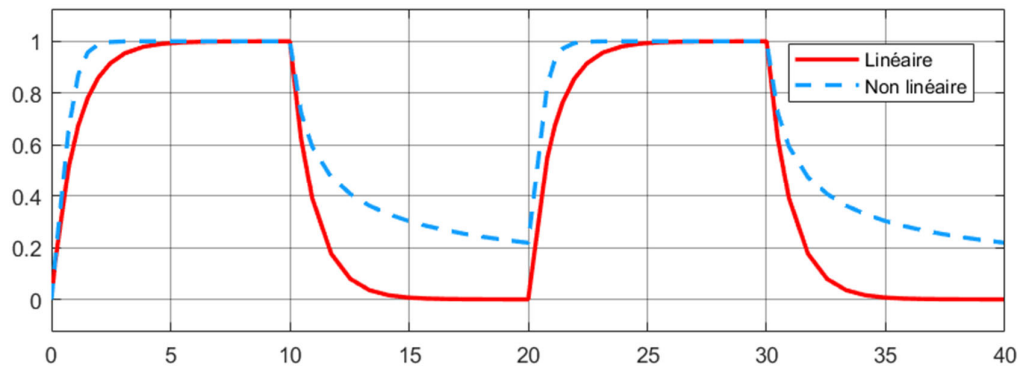


Figure 1.1 : Réponses indicielles d'un système linéaire et d'un système non linéaire

1.5.2 Réponse harmonique multiple

Système linéaire : La réponse d'un système linéaire a la même fréquence que le signal d'entrée avec amplitude et phase différente.

Système non linéaire : La réponse d'un système non linéaire peut contenir autres fréquences que la fréquence du signal d'entrée et peut ne pas contenir la fréquence du signal d'entrée.

1.5.3 Stabilité du système

Système linéaire : La stabilité d'un système linéaire ne dépend que de ses paramètres. La stabilité ne dépend ni de l'entrée ni des conditions initiales.

Système non linéaire : La stabilité d'un système non linéaire peut dépendre des paramètres du système, de l'entrée et des conditions initiales.

Exemple 1.1 :

- Soit le système linéaire : $\dot{x} = -x$ avec $x(0) = x_0 \Rightarrow x(t) = x_0 e^{-t} \Rightarrow$ système stable $\forall x(0)$.
- Soit le système non linéaire (équation différentielle de Bernoulli) : $\dot{x} = -x + x^2$, $x(0) = x_0 \Rightarrow x(t) = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}}$. Ce système est stable ($x(t)$ converge vers zéro) pour $x_0 < 1$ et instable ($x(t)$ diverge vers l'infini) pour $x_0 > 1$. Alors, la stabilité de ce système non linéaire dépend des conditions initiales.

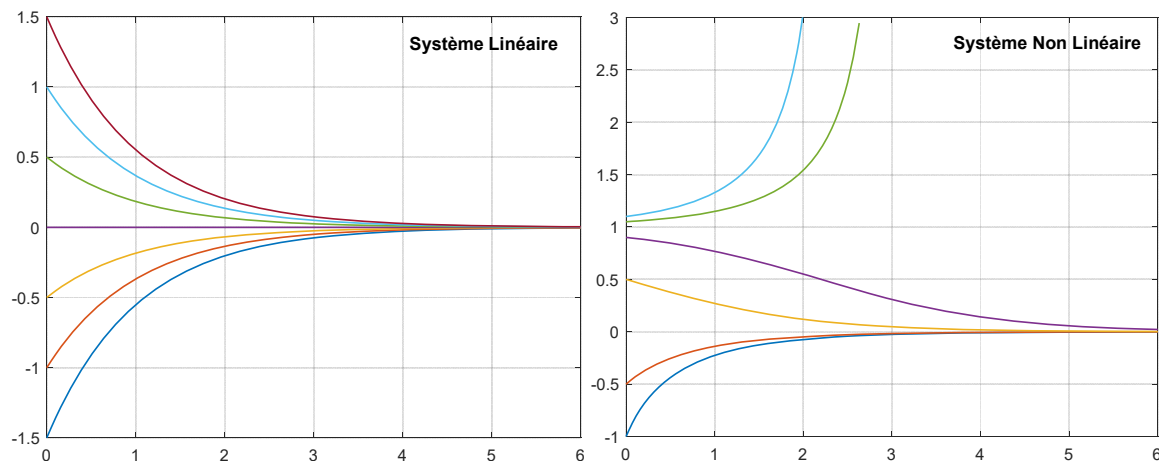


Figure 1.2 : Solutions d'un système linéaire et d'un système non linéaire

- Soit le système non linéaire $\dot{x} = xu$. Si $u = -1$, le système est stable, et si $u = +1$, le système est instable. Alors, la stabilité de ce système non linéaire dépend de son entrée de commande.

1.5.4 Explosion en temps fini

Système linéaire : L'état d'un système linéaire instable temps vers l'infini quand le temps tend vers l'infini. En fait, l'état tend vers l'infini sans jamais dépasser une exponentielle.

Système non linéaire : L'état d'un système non linéaire peut diverger vers l'infini en temps fini.

Exemple 1.2 :

- Soit le système linéaire : $\dot{x} = 3x$ avec $x(0) = x_0$, la solution est $x(t) = x_0 e^{3t} \Rightarrow x(t) \leq x_0 e^{3.01t}$.
- Soit le système non linéaire : $\dot{x} = x^2$ avec $x_0 = x(0) > 0 \Rightarrow \frac{\dot{x}}{x^2} = 1 \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = d\tau \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx}{x^2} = \int_0^t d\tau \Rightarrow -\frac{1}{x} \Big|_{x_0}^x = t \Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$, alors $x(t)$ diverge vers l'infini quand $t \rightarrow 1/x_0$.

1.5.5 Convergence en temps fini

Système linéaire : L'état d'un système linéaire stable temps vers zéro quand le temps tend vers l'infini.

Système non linéaire : L'état d'un système non linéaire peut converger vers zéro en temps fini.

Exemple 1.3 :

- Soit le système linéaire : $\dot{x} = -x$ avec $x(0) = x_0 \Rightarrow x(t) = x_0 e^{-t}$, alors $x(t)$ converge vers zéro quand $t \rightarrow \infty$.
- Soit le système non linéaire $\dot{x} = -\alpha x^{q/p}$ avec $\alpha > 0$, $p > q$ deux nombres impairs, et $x(0) = x_0 > 0$, alors $x(t)$ converge vers zéro en temps fini : $t_f = \frac{x_0^{1-(q/p)}}{\alpha(1-(q/p))}$.

$$\dot{x} = -\alpha x^{q/p} \Rightarrow \frac{\dot{x}}{x^{q/p}} = -\alpha \Rightarrow \left(1 - \frac{q}{p}\right) \frac{\dot{x}}{x^{q/p}} = -\left(1 - \frac{q}{p}\right) \alpha \Rightarrow \int_{x_0}^x \left(1 - \frac{q}{p}\right) \frac{dx}{x^{q/p}} = -\int_0^t \left(1 - \frac{q}{p}\right) \alpha d\tau$$

$$x^{\frac{1-q}{p}} \Big|_{x_0}^x = -\alpha \left(1 - \frac{q}{p}\right) t \Rightarrow x(t)^{\frac{1-q}{p}} - x_0^{\frac{1-q}{p}} = -\alpha \left(1 - \frac{q}{p}\right) t \Rightarrow x(t) = 0 \text{ quand } t_f = \frac{x_0^{\frac{1-q}{p}}}{\alpha \left(1 - \frac{q}{p}\right)}.$$

1.5.6 Points d'équilibre isolés multiples

$x_e \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre du système : $\dot{x} = f(x)$ si $x(t_0) = x_e \Rightarrow x(t) = x_e, \forall t > t_0$.

Les points d'équilibre sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Un point d'équilibre est dit isolé lorsqu'il n'y a pas d'autres points d'équilibre à son voisinage. On peut avoir une infinité de points d'équilibre connectés.

Système linéaire : Un système linéaire $\dot{x} = Ax$ peut avoir un seul point d'équilibre isolé à $x = 0$ (si $\det(A) \neq 0$, i.e. A est régulière) ou une infinité de points d'équilibre connectés dans le noyau de A (si $\det(A) = 0$, i.e. A est singulière).

Système non linéaire : Un système non linéaire $\dot{x} = f(x)$ peut avoir plusieurs points d'équilibre isolés.

Exemple 1.4 :

- Soit le système non linéaire : $\dot{x} = -x + x^2$. Ce système possède deux (02) points d'équilibre à $x_e = 0$ et $x_e = 1$.
- Soit le système non linéaire : $\dot{x}_1 = x_2$ et $\dot{x}_2 = -x_2 + x_1 - x_1^3$. Ce système possède trois (03) points d'équilibre à $x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.5.7 Comportement chaotique

Système linéaire : Pour un système linéaire, de petites différences dans les conditions initiales entraînent uniquement de petites différences au niveau des sorties.

Système non linéaire : Un système non linéaire peut exhiber un comportement chaotique, caractérisé par une sensibilité extrême aux conditions initiales. Le chaos se traduit par une évolution imprévisible, une réponse bornée, mais non périodique.

Exemple 1.5 :

Soit le système non linéaire suivant : $\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x^5 = 6\sin(t)$. Pour les deux conditions initiales différentes suivantes, on obtient les réponses représentées sur la figure suivante.

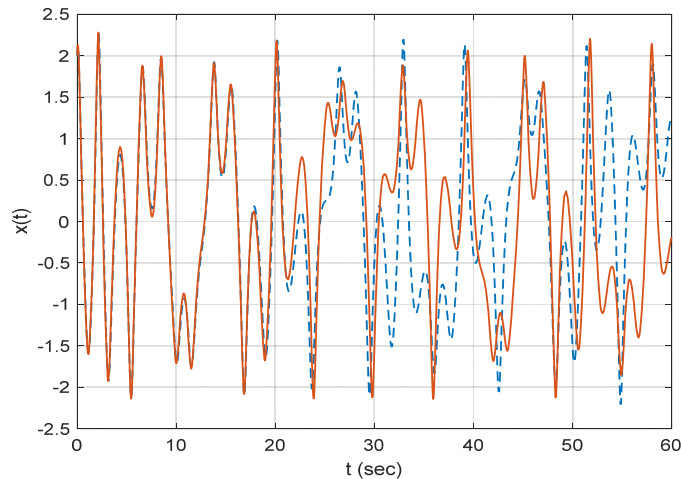


Figure 1.3 : Trait continu ($x(0) = 2, \dot{x}(0) = 3$) et Trait discontinu ($x(0) = 2.01, \dot{x}(0) = 3.01$).

1.5.8 Bifurcation

Pour un système $\dot{x} = f(x, \mu)$ où μ est un paramètre. Une bifurcation est un changement de comportement et des propriétés du système lorsque le paramètre μ varie. Le diagramme de bifurcation est le tracé des points d'équilibre en fonction de μ .

- Nombre de points d'équilibre du système change.
- Point d'équilibre stable $\Rightarrow$ Point d'équilibre instable (ou vice versa).
- Comportement aperiodique $\Rightarrow$ régime periodique.

Parmi les différents types de bifurcations, on trouve :

- Bifurcation fourche (pitchfork) : Un équilibre stable se déstabilise en un équilibre instable, et deux équilibres stables sont créés. Cette transition peut se faire de façon supercritique (de façon continue et prévisible) ou sous-critique (de façon discontinue).
- Bifurcation col-nœud : Deux points d'équilibres existent (un stable et un instable) avant la bifurcation. Après la bifurcation, aucun équilibre n'existe.
- Bifurcation transcritique : Le nombre de points d'équilibre est conservé mais leur nature (stabilité) change à la bifurcation.

- Bifurcation de Hopf : La bifurcation de Hopf concerne le gain ou la perte de la stabilité d'un point d'équilibre au profit ou au dépend d'un cycle limite.

Exemple 1.6 : Bifurcation pitchfork supercritique

Considérons l'équation : $\dot{x} = \mu x - x^3$; $\mu \in \mathbb{R}$. Pour $\mu > 0$, on a trois points d'équilibre à $x_e = 0$ (instable), $\sqrt{\mu}$ (stable), $-\sqrt{\mu}$ (stable). Pour $\mu < 0$, il y a un seul point d'équilibre à $x_e = 0$ (stable). On dit alors que $\mu = 0$ est une valeur de bifurcation critique.

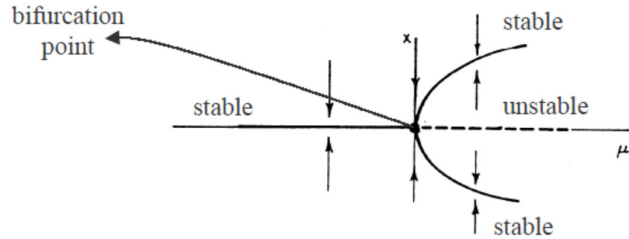


Figure 1.4 : Bifurcation fourche ou pitchfork.

1.5.9 Cycle limite

Système linéaire : Pour un système linéaire $\dot{x} = Ax$, s'il y a une solution périodique alors il y a une infinité de solutions périodiques (il n'y a pas de solution périodique isolée).

Système non linéaire : Un système non linéaire peut avoir une seule solution périodique isolée (cycle limite).

Exemple :

Soit le système linéaire : $\dot{x}_1 = x_2$ et $\dot{x}_2 = -x_1$. La solution est donnée par : $\int_0^{x_1} x_1 dx + \int_0^{x_2} x_2 dx = C^{te}$,

ce qui donne $x_1^2 + x_2^2 = \text{constante}$. Alors, il existe plusieurs solutions périodiques par rapport aux conditions initiales.

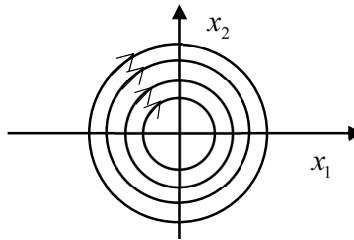


Figure 1.5 : solutions périodiques d'un système linéaire d'ordre 2.

Soit le système non linéaire (équation de Van der Paul) : $\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$, toutes les solutions $x(t)$ ($\forall$ les C. I.) convergent vers une seule trajectoire fermée (cycle limite).

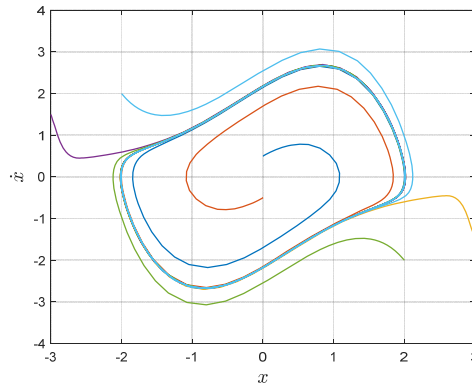


Figure 1.6 : Plan de phase de l'équation de Van der Paul

1.5.10 Existence et unicité de solution

Système linéaire : Pour un système linéaire $\dot{x} = Ax$, une solution $x(t)$ existe toujours globalement et elle est unique (chaque condition initiale donne une solution différente).

Système non linéaire : Pour un système non linéaire $\dot{x} = f(x)$, une solution $x(t)$ peut exister localement, peut être non unique et peut ne pas exister du tout.

Exemple 1.7 :

- La solution peut ne pas exister globalement. Pour le système non linéaire : $\dot{x} = 1 + x^2$ avec $x(0) = 0 \Rightarrow x(t) = \tan(t)$, alors la solution $x(t)$ existe seulement pour $0 \leq t \leq \pi/2$.
- La solution peut ne pas être usnique. Pour le système non linéaire $\dot{x} = 3x^{2/3}$ avec $x(0) = 0$, on a les solutions $x(t) = \begin{cases} (t-a)^3, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}$ pour $t \in [0, \infty)$ et $a > 0$. On a aussi les solutions $x(t) = 0$ pour $t \in [0, \infty)$ et $x(t) = t^3$ pour $t \in [0, \infty)$ (pour la même condition initiale $x(0) = 0$).
- La solution n'existe plus. Pour le système $\dot{x} = -\text{sgn}(x)$ où $\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ avec $x(0) = 0$, y a pas de solution différentiable pour ce système.

1.6 Exemples de systèmes non linéaires

1.6.1 Système hydraulique à deux réservoirs couplés

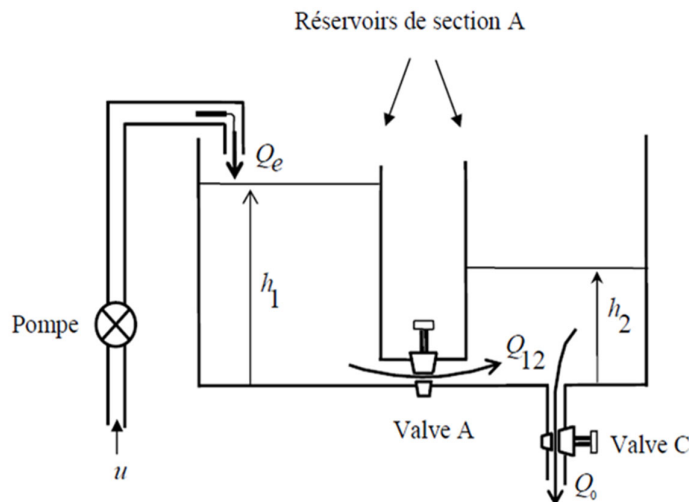


Figure 1.7 : Système hydraulique à deux réservoirs couplés

On définit les variables d'état : $[x_1, x_2]^T = [h_2, h_1]^T$, alors le modèle d'état peut s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \beta_1 \sqrt{x_2 - x_1} - \beta_2 \sqrt{x_1} \\ \dot{x}_2 = -\beta_1 \sqrt{x_2 - x_1} + K_u u \end{cases}$$

avec : $\beta_1 = \frac{s_n a_{12} \sqrt{2g}}{A}$; $\beta_2 = \frac{s_n a_0 \sqrt{2g}}{A}$; $K_u = \frac{K_p}{A}$

- La relation entre la tension d'alimentation de la pompe u et le débit d'entrée Q_e peut s'écrire comme suit : $Q_e = K_p u$ où K_p le gain de la pompe.
- s_n : la section maximale de passage du liquide dans la valve A, a_{12} est le coefficient de décharge de la valve A.
- s_n : la section maximale des valves A et C. Dans la pratique, cette section est donnée par les dimensions de la valve et du canal d'écoulement.
- a_{12} et a_0 : représentent les coefficients de décharge des valves A et C.
- g : la constante de gravité, avec $g = 9.80 \text{ m/s}^2$.

1.6.2 Robot manipulateur à deux degrés de liberté

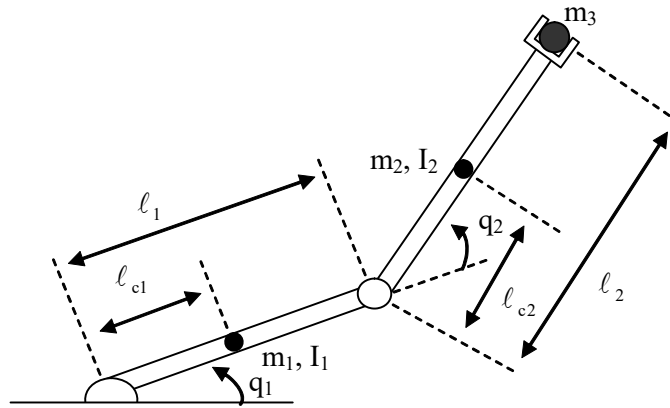


Figure 1.8 : Robot manipulateur à deux degrés de liberté

Le modèle dynamique du manipulateur est donné par les équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -h\dot{q}_2 & -h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{r1} \\ g_{r2} \end{bmatrix} \right\}$$

avec :

$$M_{11} = I_1 + I_2 + m_1 \ell_{c1}^2 + m_2 [\ell_1^2 + \ell_{c2}^2 + 2 \ell_1 \ell_{c2} \cos(q_2)] + m_3 [\ell_1^2 + \ell_2^2 + 2 \ell_1 \ell_2 \cos(q_2)]$$

$$M_{22} = I_1 + I_2 + m_1 \ell_{c1}^2 + m_2 \ell_{c2}^2 + m_3 \ell_2^2$$

$$M_{21} = M_{12} = I_2 + m_2 [\ell_{c2}^2 + \ell_1 \ell_{c2} \cos(q_2)] + m_3 [\ell_2^2 + 2 \ell_1 \ell_2 \cos(q_2)]$$

$$h = m_2 \ell_1 \ell_{c2} \sin(q_2) + m_3 \ell_1 \ell_2 \sin(q_2)$$

$$g_{r1} = m_1 \ell_{c1} g \cos(q_1) + (m_2 \ell_{c2} + m_3 \ell_2) g \cos(q_1 + q_2) + (m_2 + m_3) \ell_1 g \cos(q_1)$$

$$g_{r2} = (m_2 \ell_{c2} + m_3 \ell_2) g \cos(q_1 + q_2)$$

où u_1 et u_2 sont les couples de commande appliqués aux articulations, q_1 et q_2 sont les positions articulaires. Les paramètres du modèle du robot sont : $g = 9,8 \text{ m/s}^2$; $m_1 = m_2 = 1,0 \text{ Kg}$; $\ell_1 = \ell_2 = 1,0 \text{ m}$; $\ell_{c1} = \ell_{c2} = 0,5 \text{ m}$; $I_1 = I_2 = 0,2 \text{ Kg m}^2$, $m_3 = 3,0 \text{ Kg}$.

1.6.3 Robot manipulateur à une seule jonction flexible

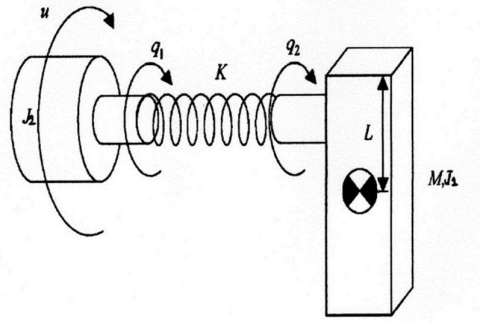


Figure 1.9 : Robot manipulateur à une seule jonction flexible

Les variables d'état sont définies comme suit : $x_1 = q_1$, $x_2 = \dot{q}_1$, $x_3 = q_2$ et $x_4 = \dot{q}_2$, et le modèle dynamique est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_1(x_1, x_3) + g_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_2(x_1, x_3) + g_2 u \end{cases}$$

avec

$$f_1(x_1, x_3) = -\frac{MgL}{J_1} \sin(x_1) - \frac{K}{J_1} x_1, f_2(x_1, x_3) = \frac{K}{J_2} (x_1 - x_3), g_1 = \frac{K}{J_1}, g_2 = \frac{1}{J_2}$$

Les paramètres du système sont : $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $M = 1 \text{ kg}$, $L = 1 \text{ m}$, $J_1 = 0.4 \text{ kg m}^2$, $J_2 = 0.02 \text{ kg m}^2$ et $K = 100 \text{ Nm/rad}$.

Méthode du Plan de Phase

2.1 Introduction

La méthode du plan de phase est une méthode graphique qui permet d'étudier de façon qualitative le comportement des systèmes dynamiques de deuxième ordre décrits par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = f_1(x) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = f_2(x) \end{cases}$$

où x_1 et x_2 sont les états du système, $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont des fonctions non linéaires quelconques. La méthode du plan de phase a pour but d'analyser le comportement de ce système sans résoudre l'équation différentielle le régissant.

2.1.1 Plan de phase

Le plan de phase c'est le plan qui a x_1 et x_2 comme coordonnées (x_1 selon l'axe horizontal, x_2 selon l'axe vertical).

2.1.2 Trajectoire de phase

Soit $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ la solution du système d'ordre 2 pour des conditions initiales $x_0 = (x_1(0), x_2(0))$. Quand t varie de 0 à l'infini, la solution $x(t)$ peut être représentée par une courbe dans le plan de phase. Cette courbe est appelée une trajectoire de phase ou une orbite.

2.1.3 Portrait de phase

Le portrait de phase est obtenu en considérant l'ensemble des trajectoires de phase. Dans la pratique, tracer le portrait de phases d'un système, c'est tracer dans le plan, suffisamment de trajectoires pour que l'on puisse les imaginer toutes.

Exemple 2.1 :

Considérons le système linéaire : $\dot{x}_1 = x_2$ et $\dot{x}_2 = -x_1$. Pour une condition initiale $x_0 = (x_{10}, x_{20})$, la solution est donnée par :

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10} \cos(t) + x_{20} \sin(t) \\ x_2(t) = -x_{10} \sin(t) + x_{20} \cos(t) \end{cases} . \text{ Ce qui conduit à une équation}$$

de la trajectoire dans le plan de phase $x_1^2 + x_2^2 = x_{10}^2 + x_{20}^2$, qui est l'équation d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2}$.

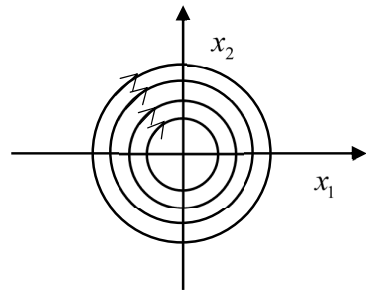


Figure 2.1 : Trajectoires dans le plan de phase

2.2 Points singuliers

Les points singuliers sont les points d'équilibre dans le plan de phase. On obtient les points

d'équilibre par la résolution des équations algébriques suivantes :
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Les points d'équilibre d'un système du second ordre sont appelés points singuliers parce que plusieurs trajectoires passent par ces points d'équilibre ce qui implique que la

pente $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$ n'est pas définie en ces points.

Exemple 2.2 : Soit le système régi par l'équation différentielle : $\ddot{x} + 0.6\dot{x} + 3x + x^2 = 0$, et qui peut être écrite sous la forme d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -0.6x_2 - 3x_1 - x_1^2 \end{cases}$$

Les points d'équilibres sont obtenus par la résolution des équations :

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -0.6x_2 - 3x_1 - x_1^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(3 + x_1) = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \text{ soit deux points d'équilibre à } (0,0) \text{ et } (-3,0).$$

2.3 Construction pratique des trajectoires de phase

Il existe plusieurs méthodes pour la construction et le tracé des trajectoires dans le plan de phase.

Parmi ces méthodes, on trouve :

- Méthode analytique
- Méthode du graphe des pentes
- Méthode des isoclines

2.3.1 Méthode analytique

Il existe deux méthodes pour générer analytiquement les trajectoires de phase.

Elimination du temps explicitement

Lorsque le système est relativement simple, on peut déterminer la solution analytique du système $x_1(t) = g_1(t)$ et $x_2(t) = g_2(t)$. Ensuite, par élimination de la variable temps de ces deux équations, on obtient la trajectoire dans le plan de phase $g(x_1, x_2) = 0$.

Elimination du temps implicitement

Dans ce cas, on élimine directement le temps en posant : $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$, puis on cherche la solution à cette équation différentielle pour obtenir la trajectoire dans le plan de phase $g(x_1, x_2) = 0$.

Exemple 2.3 : Considérons le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1}{x_2} \Rightarrow x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = 0 \Rightarrow \int x_1 dx_1 + \int x_2 dx_2 = C^{te}.$$

Ce qui donne : $x_1^2 + x_2^2 = 2C^{te} = x_{10}^2 + x_{20}^2$, qui est l'équation d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2}$.

Exemple 2.4 : Considérons l'asservissement non linéaire suivant :

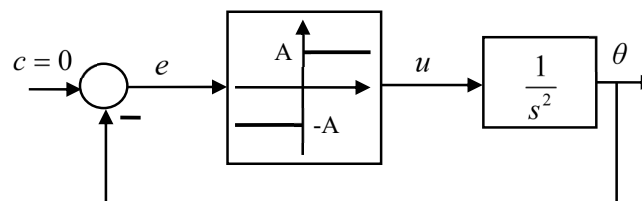


Figure 2.2 : Asservissement non linéaire

Ce système asservi peut être décrit par l'équation différentielle suivante : $\ddot{\theta} = u$ où $u = A \operatorname{sgn}(e)$ et $e = -\theta$. Si on choisit $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$, on obtient la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \text{ avec } u = \begin{cases} +A, \text{ si } x_1 < 0 \\ -A, \text{ si } x_1 > 0 \end{cases} ; x_1 = 0 \text{ est appelé droite de commutation.}$$

Elimination du temps explicitement :

1^{er} cas : $u = +A$, c'est-à-dire $x_1 < 0$.

Le système est régi par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2(t) = At + x_{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = At + x_{20} \\ x_2(t) = At + x_{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2} At^2 + x_{20}t + x_{10} \\ x_2(t) = At + x_{20} \end{cases}$$

On a $t = \frac{x_2 - x_{20}}{A}$ ce qui conduit à une équation de la trajectoire dans le plan de phase :

$$x_1 = \frac{1}{2A} x_2^2 + \frac{C_1}{2A} \text{ avec } C_1 = (2Ax_{10} - x_{20}^2) < 0.$$

2^{ème} cas : $u = -A$, c'est-à-dire $x_1 > 0$.

Le système est régi par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2(t) = -At + x_{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -At + x_{20} \\ x_2(t) = -At + x_{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = -\frac{1}{2} At^2 + x_{20}t + x_{10} \\ x_2(t) = -At + x_{20} \end{cases}$$

On a $t = -\frac{x_2 - x_{20}}{A}$ ce qui conduit à une équation de la trajectoire dans le plan de phase :

$$x_1 = -\frac{1}{2A} x_2^2 + \frac{C_2}{2A} \text{ avec } C_2 = (2Ax_{10} + x_{20}^2) > 0.$$

Remarque 2.1 : On peut tout simplement remplacer A par $-A$ dans l'équation du 1^{er} cas.

Elimination du temps implicitement

1^{er} cas : $u = +A$, c'est-à-dire $x_1 < 0$.

$$\text{Le système est régi par : } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = A \end{cases} \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{A}{x_2} \Rightarrow Adx_1 - x_2 dx_2 = 0 \Rightarrow \int Adx_1 - \int x_2 dx_2 = C^{te}$$

On obtient alors l'équation d'une parabole : $2Ax_1 - x_2^2 = C_1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2A} x_2^2 + \frac{C_1}{2A}$, où C_1 est une constante négative qui dépend des conditions initiales ($C_1 = (2Ax_{10} - x_{20}^2) < 0$).

2^{ème} cas : $u = -A$, c'est-à-dire $x_1 > 0$.

$$\text{Il vient alors : } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -A \end{cases} \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-A}{x_2} \Rightarrow Adx_1 + x_2 dx_2 = 0 \Rightarrow \int Adx_1 + \int x_2 dx_2 = C^{te}$$

On obtient alors l'équation d'une parabole : $x_2^2 + 2Ax_1 = C_2 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2A} x_2^2 + \frac{C_2}{2A}$, où C_2 est une constante positive qui dépend des conditions initiales ($C_2 = (2Ax_{10} + x_{20}^2) > 0$).

Trajectoires de phase : En rassemblant les trajectoires des deux cas précédents (pour les deux approches), on obtient des trajectoires fermées représentées sur la figure suivante. On peut conclure que le système est marginalement stable.

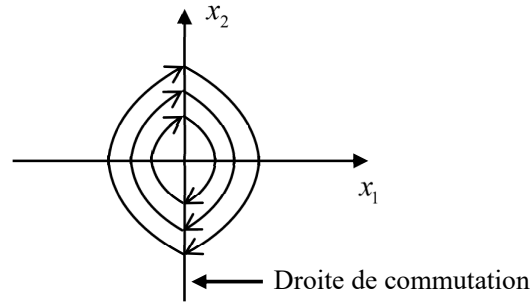


Figure 2.3 : Trajectoires dans le plan de phase de l'asservissement non linéaire

2.3.2 Méthode du graphe des pentes (champ de vecteurs, champ des directions)

Soit un système de deuxième ordre :
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = f_1(x) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = f_2(x) \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = f(x), f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

Le vecteur $f(x)$ est tangent au trajectoire de phase au point $x = (x_1, x_2)$ car : $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}$.

Alors, le vecteur $f(x)$ représente la pente de la trajectoire de phase au point x et peut être vu et tracé comme un petit segment de droite orienté (vecteur) de x vers $x + f(x)$.

Le graphe des pentes est obtenu en évaluant $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ en certains points du plan de phase, puis en représentant un vecteur de x vers $x + f(x)$. Parfois, il est plus convenable de tracer des vecteurs de même longueur en tous points du plan de phase.

Pour tracer les trajectoires de phase du système, on choisit un point initial donné x_0 et on trace la courbe qui passe au mieux par les différents vecteurs matérialisés sur le plan de phase.

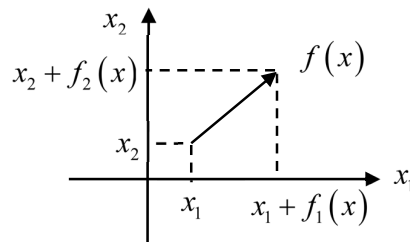


Figure 2.4 : Tracé du champ de vecteur $f(x)$.

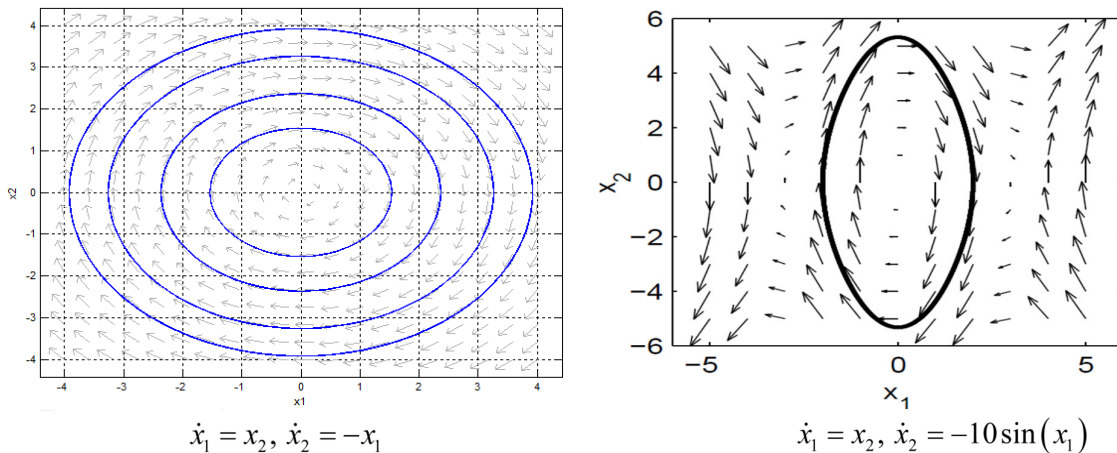


Figure 2.5 : Exemples de graphe des pentes (champ de directions).

2.3.3 Méthode des isoclines

Considérons un système de deuxième ordre : $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$. La tangente à la trajectoire de phase passant par le point $x = (x_1, x_2)$ a une pente donnée par : $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$.

Le lieu des points pour lesquels la pente $\frac{dx_2}{dx_1} = C^{te} = \alpha$ est une courbe appelée isocline.

On trace alors dans le plan de phase plusieurs isoclines correspondant à quelques valeurs de α et on trace, en plusieurs points de l'isocline, des petits segments matérialisant la valeur de α . Ainsi, on matérialise les tangentes des trajectoires aux points où elles coupent l'isocline.

Pour tracer les trajectoires de phase du système, on choisit un point initial donné x_0 et on trace la courbe qui passe au mieux par les différents segments matérialisés sur les isoclines.

Exemple 2.5 : Considérons le système $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 - x_2$

Alors : $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1 - x_2}{x_2} = \alpha$ d'où il vient les isoclines : $x_2 = -\frac{x_1}{1 + \alpha}$. Les isoclines de ce système

sont donc des droites passant toutes par l'origine. Par exemple, pour $\alpha = 1$, on trace la droite d'équation $x_2 = -0.5x_1$ et on la muni de petits segments de pente 1.

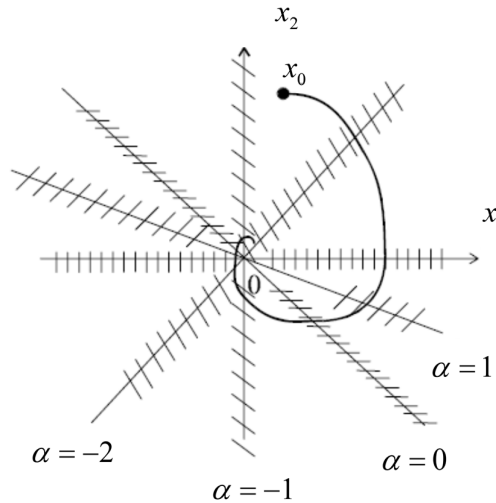


Figure 2.6 : Tracé des isoclines.

2.4 Plan de phase des systèmes linéaires d'ordre 2

Dans cette section, on étudie de façon qualitative le comportement des trajectoires des systèmes dynamiques linéaires du second ordre décrits par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}, \text{ soit } \dot{x} = Ax, \quad x = (x_1, x_2), \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

On suppose que le système possède un point d'équilibre unique, $x = 0$, à l'origine du plan de phase. Soit λ_1 et λ_2 les valeurs propres de A (obtenues en résolvant $\det(\lambda I - A) = 0$).

Pour un système linéaire d'ordre 2, les conditions suivantes sont équivalentes :

- Le système possède un point d'équilibre isolé à $x = 0$.
- La matrice A est régulière (invertible), i.e. $\det(A) \neq 0$.
- Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A (solutions de $\det(\lambda I - A) = 0$) satisfont $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$.

La solution $x(t)$ est donnée par : $x(t) = \Phi(t)x(0)$, où $\Phi(t)$ est la matrice de transition qui peut être exprimée selon les valeurs propres λ_1 et λ_2 comme suit :

- Valeurs propres réelles distinctes : $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \Phi(t) = e^{\lambda_1 t} I + \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} (A - \lambda_1 I)$
- Valeur propre réelle double : $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \Phi(t) = e^{\lambda_1 t} I + t e^{\lambda_1 t} (A - \lambda_1 I)$
- Valeurs propres complexes :
 $\lambda_{1,2} = a \pm jb, b > 0 \Rightarrow \Phi(t) = e^{at} \left(\cos(bt) I + \frac{\sin(bt)}{b} (A - aI) \right)$

Alors, les valeurs propres λ_1 et λ_2 déterminent les caractéristiques des trajectoires de phase et la nature du point d'équilibre. On distingue six cas :

<i>Valeurs propres réelles</i> $\text{Im}(\lambda_i) = 0$	Nœud stable $\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Nœud instable $\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Col $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
<i>Valeurs propres complexes</i> $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$	Foyer stable $\text{Re}(\lambda_i) < 0$	Foyer instable $\text{Re}(\lambda_i) > 0$	Centre $\text{Re}(\lambda_i) = 0$

La figure 2.7 présente l'allure des trajectoires de phase en fonction de la nature de λ_1 et λ_2 .

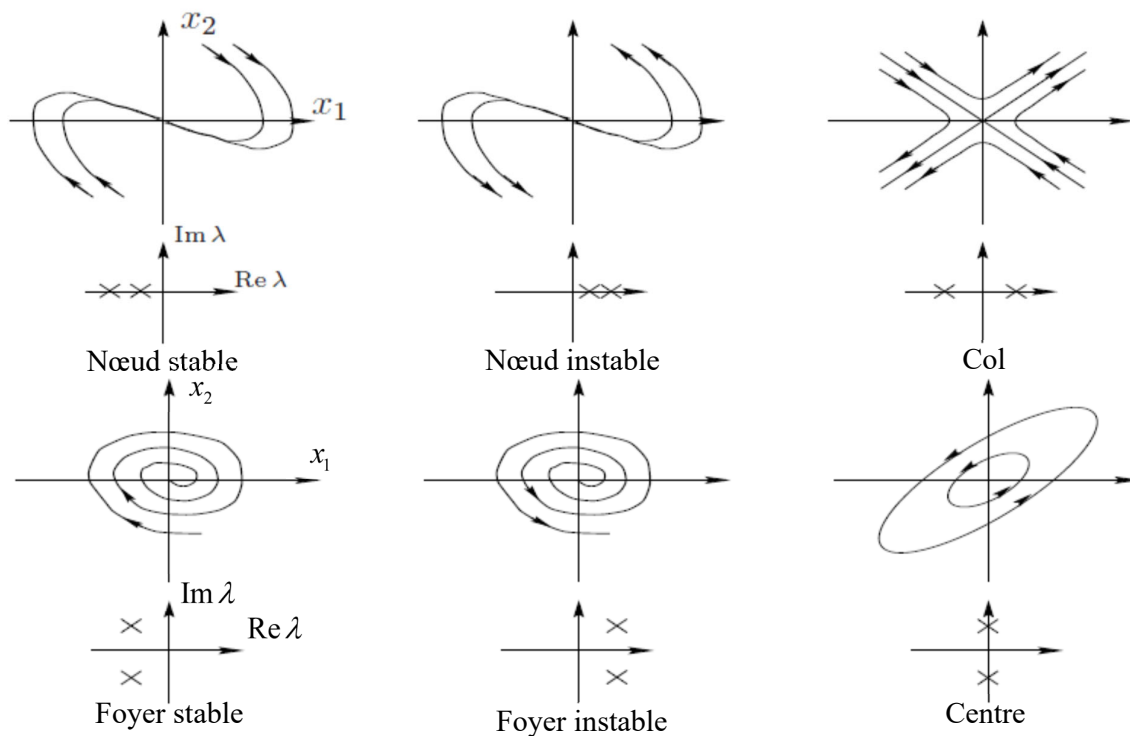


Figure 2.7 : Trajectoires de phase des systèmes linéaires d'ordre 2.

Remarque 2.2 : Dans le cas où l'une des deux valeurs propres est nulle, l'équilibre n'est pas isolé et on a une droite de points d'équilibre et toutes les trajectoires sont rectilignes et convergent vers ou sont issues d'un point de cette droite d'équilibre.

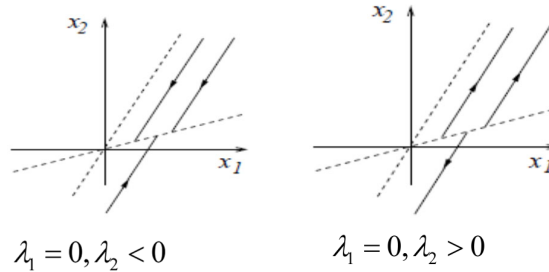


Figure 2.8 : Trajectoires de phase dans le cas d'une valeur propre nulle.

2.5 Plan de phase des systèmes non linéaires d'ordre 2 – Comportement local

Les systèmes non linéaires peuvent présenter plusieurs points d'équilibre isolés distincts. Ceci implique que, contrairement au cas des systèmes linéaires, le comportement des trajectoires au voisinage d'un point d'équilibre gardera le plus souvent un caractère local et ne pourra nullement être étendu à l'ensemble du plan de phase. Alors, le comportement qualitatif des trajectoires d'un système non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre peut être identifié à celui d'un système linéaire.

Soit le système non linéaire : $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$, $\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$, où $f_1(x_1, x_2)$ et $f_2(x_1, x_2)$ sont des fonctions non linéaires continuellement dérivables, et soit $x_e = (x_{e1}, x_{e2})$ un point d'équilibre isolé de ce système. Le point d'équilibre x_e est dit isolé s'il existe un voisinage de x_e ne contenant aucun autre point d'équilibre.

En effectuant une linéarisation du système autour du point d'équilibre x_e , on obtient :

$$\dot{z} = Az \quad \text{où} \quad z = x - x_e \quad \text{et} \quad A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \Big|_{x=x_e}.$$

Si les deux valeurs propres de A ont une partie réelle non nulle, alors, le système non linéaire a le même type de point d'équilibre que le système linéaire $\dot{z} = Az$. On a alors les cas suivants :

Valeurs propres réelles	Nœud stable	Nœud instable	Col
$\text{Im}(\lambda_i) = 0$	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
Valeurs propres complexes	Foyer stable	Foyer instable	Pas de conclusion
$\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$	$\text{Re}(\lambda_i) < 0$	$\text{Re}(\lambda_i) > 0$	$\text{Re}(\lambda_i) = 0$

Exemple 2.6 : Soit le système non linéaire $\dot{x}_1 = x_2$ et $\dot{x}_2 = -\sin(x_1) - 0.5x_2$, qui possède les points d'équilibre $x_e = (n\pi, 0)$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

La matrice Jacobienne est : $A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x_1) & -0.5 \end{pmatrix} \Big|_{x=x_e}$.

- Pour $x_e = (2k\pi, 0)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{pmatrix}$ avec les valeurs propres $\lambda_{1,2} = -1/4 \pm j\sqrt{15}/4$. Alors le point d'équilibre $x_e = (2k\pi, 0)$ est un foyer stable.

- Pour $x_e = ((2k+1)\pi, 0)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}$ avec les valeurs propres $\lambda_1 = 0.78$ et $\lambda_2 = -1.28$.
Alors le point d'équilibre $x_e = ((2k+1)\pi, 0)$ est un col.

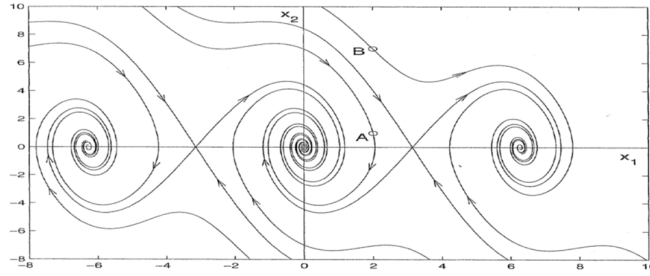


Figure 2.9 : Portrait de phase du système $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -10 \sin(x_1)$.

Exemple 2.7 : Soit le système donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - \mu x_1 (x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 - \mu x_2 (x_1^2 + x_2^2) \end{cases}, \quad \mu \neq 0, \text{ qui a un point d'équilibre à } x = 0.$$

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{pmatrix} -\mu(3x_1^2 + x_2^2) & -(1 + 2\mu x_1 x_2) \\ (1 - 2\mu x_1 x_2) & -\mu(x_1^2 + 3x_2^2) \end{pmatrix} \bigg|_{x=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec les valeurs propres } \lambda_{1,2} = \pm j.$$

Dans ce cas, on ne peut pas conclure sur la nature du point d'équilibre $x = 0$ du système non linéaire.

Si on présente le système en coordonnées polaires : $x_1 = r \cos(\theta)$ et $x_2 = r \sin(\theta)$, on obtient la forme : $\dot{r} = -\mu r^3$ et $\dot{\theta} = 1$. Alors, le point d'équilibre sera un foyer stable pour $\mu > 0$, et un foyer instable pour $\mu < 0$.

2.6 Cycles limites

Dans le plan de phase, un cycle limite est défini comme une trajectoire fermée et isolée. La trajectoire doit être fermée, indiquant la périodicité du mouvement, et isolée, indiquant la nature limite du cycle (les trajectoires dans un voisinage du cycle convergent ou divergent de lui). Il existe trois types de cycles limites :

- **Cycle limite stable :** Toutes les trajectoires dans un voisinage du cycle convergent vers lui.
- **Cycle limite instable :** Toutes les trajectoires dans un voisinage du cycle divergent de lui.
- **Cycle limite semi-stable :** Certaines trajectoires dans un voisinage du cycle convergent vers lui et les autres divergent de lui.

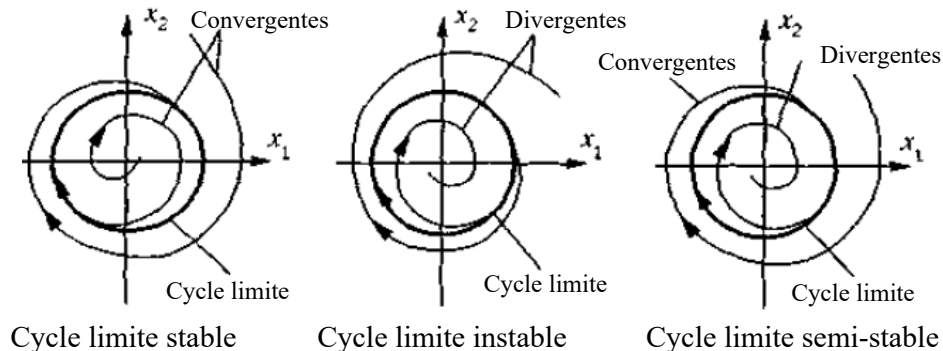


Figure 2.10 : Cycles limites stable, instable et semi-stable.

2.6.1 Existence de cycles limites

Théorème de Poincaré : Soit N le nombre de nœuds, centres et de foyers encerclés par un cycle limite, et soit S le nombre de cols encerclés par un cycle limite. Si un cycle limite existe, les points d'équilibre que le cycle limite encercle sont tels que : $N = S + 1$.

Remarque 2.3 : Un cycle limite encercle toujours aux moins un point d'équilibre. S'il y a un seul point d'équilibre encerclé, ce point d'équilibre ne peut pas être un col.

Théorème de Bendixon : Pour le système plan : $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$, aucun cycle limite ne peut exister dans une région Ω du plan de phase dans laquelle $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ (la divergence du champ de vecteur $f(x)$) n'est pas nul dans aucune sous région de Ω et ne change pas de signe dans Ω .

Théorème de Poincaré-Bendixon : Si une trajectoire demeure dans une région finie Ω alors une des trois propositions suivantes est vraie :

- La trajectoire tend vers un point d'équilibre.
- La trajectoire tend asymptotiquement vers un cycle limite.
- La trajectoire est elle même un cycle limite.

Autrement dit, un système d'ordre 2 ne peut pas pour admettre comme solutions des trajectoires chaotiques.

Remarque 2.4 : Pour étudier l'existence et la stabilité des cycles limites, il est souvent préférable de réécrire le système dynamique dans les coordonnées polaires : $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ et $\tan(\theta) = x_2/x_1$. Les relations inverses sont : $x_1 = r \cos(\theta)$ et $x_2 = r \sin(\theta)$.

Exemple 2.8 : Soit le système donné par : $\dot{x}_1 = -x_2 + 4x_1x_2^2, \dot{x}_2 = x_1 + 4x_1^2x_2$.

$\partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2 = 4(x_1^2 + x_2^2) > 0, \forall x \neq 0$, Alors, il n'y a pas de cycle limite. ($x = 0$ n'est pas une sous-région)

Exemple 2.9 : Soit le système donné par : $\dot{x}_1 = -x_2, \dot{x}_2 = x_1 + 4x_2 + x_1^2x_2$.

$\partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2 = 4 + x_1^2 > 0, \forall x$, Alors, il n'y a pas de cycle limite.

Exemple 2.10 : Soit le système donné par : $\dot{x}_1 = x_2 \cos(x_1), \dot{x}_2 = \sin(x_1)$. Points d'équilibre à $x_e = (n\pi, 0), n \in \mathbb{Z}$. La linéarisation autour du point d'équilibre donne :

$A = \begin{pmatrix} -x_2 \sin(x_1) & \cos(x_1) \\ \cos(x_1) & 0 \end{pmatrix} \Big|_{x=x_e}$. Pour n pair : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec les valeurs propres $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

Pour n impair : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ avec les valeurs propres $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Les points d'équilibres sont donc des cols. Alors, il n'y a pas de cycle limite (théorème de Poincaré).

Exemple 2.11 : Soit le système donné par : $\dot{x}_1 = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$.

En coordonnées polaires, le système s'écrit : $\dot{r} = r(1 - r^2)$ et $\dot{\theta} = -1$. Comme points d'équilibre,

on obtient : $r = 0$ (c'est un point) et $r = 1$ (c'est un cercle). $\dot{\theta} = -1$ indique que les trajectoires sont orientées dans le sens des aiguilles d'une montre. Alors, on a une solution périodique fermée. Notons que pour $r > 1$, $\dot{r} < 0$ (r diminue) et pour $r < 1$, $\dot{r} > 0$ (r augmente). Alors, toutes les trajectoires convergent vers une solution périodique, d'où l'existence d'un cycle limite stable (cercle de rayon 1 et de centre à l'origine). Dans ce cas, l'origine est un point d'équilibre instable.

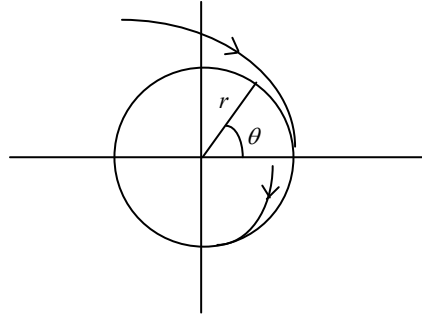


Figure 2.11 : Cycle limite stable.

Exemple 2.12 : Soit le système donné par : $\dot{r} = r(1+r)(r-1)$ et $\dot{\theta} = 1$. Comme points d'équilibre, on obtient : $r = 0$ (c'est un point) et $r = 1$ (c'est un cercle). Alors, on a une solution périodique fermée. Notons que pour $r > 1$, $\dot{r} > 0$ (r augmente) et pour $r < 1$, $\dot{r} < 0$ (r diminue). Alors, toutes les trajectoires divergent de la solution périodique, d'où l'existence d'un cycle limite instable (cercle de rayon 1 et de centre à l'origine). Dans ce cas, l'origine est un point d'équilibre stable.

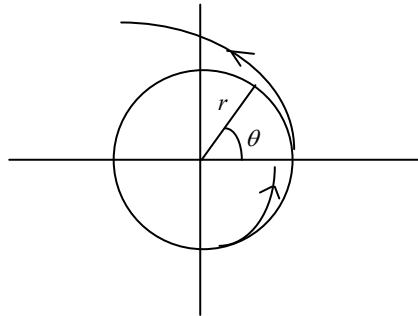


Figure 2.12 : Cycle limite instable.

Exemple 2.13 : Soit le système donné par : $\dot{r} = r(1-r)^2$ et $\dot{\theta} = 1$. Points d'équilibre : $r = 0$ et $r = 1$. Alors, on a une solution périodique fermée. Notons que pour $r > 1$, $\dot{r} > 0$ (r augmente) et pour $r < 1$, $\dot{r} > 0$ (r augmente). Alors, il existe un cycle limite semi-stable. Dans ce cas, l'origine est un point d'équilibre instable.

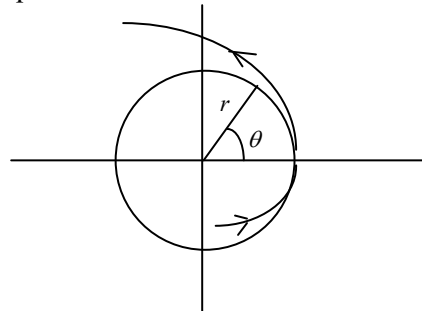


Figure 2.13 : Cycle limite semi-stable.

Méthode du Premier Harmonique

3.1 Introduction

La méthode harmonique (méthode fréquentielle) est un outil puissant pour l'analyse et la synthèse des systèmes de commande linéaires. L'idée consiste à décrire le système comme fonction complexe (fonction de transfert) plutôt que comme une équation différentielle.

Il y a deux avantages principaux d'employer la méthode harmonique. D'abord, des représentations graphiques peuvent être utilisées pour faciliter l'analyse et la synthèse. En second lieu, des interprétations physiques peuvent être dégagées.

La méthode du premier harmonique est une généralisation (extension) de la méthode harmonique des systèmes linéaires aux systèmes asservis non linéaires à une non-linéarité séparable représentés figure 3.1.

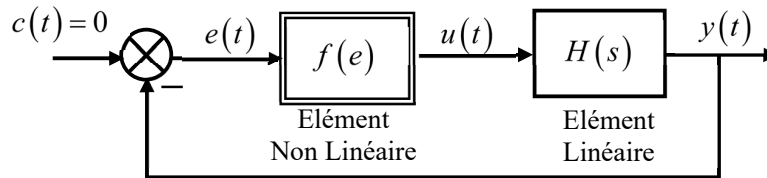


Figure 3.1 : Système asservi avec non-linéarité séparable en régime libre.

La méthode du premier harmonique consiste à remplacer l'élément non linéaire par un élément linéaire équivalent (fonction de transfert généralisée). La méthode du premier harmonique permet ainsi de déterminer si le système asservi non linéaire de la figure 3.1 présente en régime libre des oscillations (cycles limites) et si oui, en estimer leurs caractéristiques (pulsations propres, amplitudes).

La prévision des cycles limites est très importante. Parfois les cycles limites peuvent être souhaitables (par exemple les oscillateurs électroniques). Cependant, dans la plupart des systèmes asservis, les cycles limites sont indésirables.

3.2 Hypothèses d'application de la méthode

Dans le cadre de ce cours, pour appliquer la méthode du premier harmonique à un système asservi non linéaire, on suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

- Condition de séparabilité : le système asservi possède un seul bloc non linéaire qu'il est possible d'isoler. Les autres éléments sont supposés linéaires, au moins approximativement.
- La non-linéarité est statique, c'est-à-dire, la non-linéarité est indépendante du temps.
- La non-linéarité est symétrique par rapport à l'origine.
- Condition de filtrage : la partie linéaire du système asservi, notée $H(s)$, est stable (sans pôles à partie réelle positive) et se comporte comme un filtre passe-bas.

3.3 Fonction de transfert généralisée et gain complexe équivalent

On considère un élément non linéaire quelconque donné par :

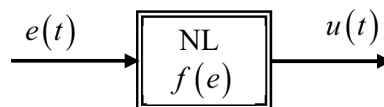


Figure 3.2 : Elément non linéaire.

Pour un signal d'entrée sinusoïdal : $e(t) = A \sin(\omega t)$, le signal de sortie $u(t) = f(e)$ est périodique, en général, de même période $T = 2\pi/\omega$. Alors, le signal $u(t)$ peut être décomposé

en série de Fourier : $u(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$. où les coefficients a_0 , a_n et b_n sont donnés par :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(n\omega t) dt$$

Comme la caractéristique non linéaire est symétrique par rapport à l'origine, on a $a_0 = 0$. De plus, on a affaire à un système filtré, alors on peut négliger les harmoniques d'ordre supérieur et on ne considère que la composante fondamentale, d'où il vient :

$$u(t) \approx a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) = M \sin(\omega t + \phi)$$

avec $M(A, \omega) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$, $\phi(A, \omega) = \arctan(a_1/b_1)$.

Par analogie avec le cas linéaire, on définit la fonction de transfert généralisée de l'élément non

$$\text{linéaire par : } N(A, \omega) = \frac{M(A, \omega)}{A} e^{j\phi(A, \omega)} = \frac{b_1}{A} + j \frac{a_1}{A}$$

La fonction de transfert généralisée représente la réponse fréquentielle de l'élément non linéaire. A l'inverse du cas linéaire, la fonction de transfert généralisée dépend de la pulsation et de l'amplitude du signal d'entrée. Dans le cas d'une non-linéarité statique, la fonction de transfert

généralisée $N(A, \omega)$ est indépendante de ω , soit $N(A, \omega) = N(A) = \frac{M(A)}{A} e^{j\phi(A)}$. La

fonction de transfert généralisée $N(A)$ est alors appelée **gain complexe équivalent**.

On constate que la détermination de $N(A)$ se ramène au calcul de a_1 et b_1 . D'une façon générale, si la non-linéarité est impaire, le développement en séries de Fourier ne comporte pas de termes pairs, c'est-à-dire, $a_n = 0$.

3.4 Lieu critique

Plutôt que de tracer dans le lieu de Nyquist, le lieu de points de $N(A)$, on trace le **lieu critique** qui est le lieu des points complexes donnés par : $C(A) = -1/N(A)$. Le lieu critique est gradué en amplitude A . La raison d'utilisation de $C(A)$ devient évidente lorsque nous aborderons les problèmes de stabilité.

3.5 Calcul de gains complexes équivalents

On se propose de calculer les gains complexes équivalents de quelques non-linéarités usuelles. La méthode générale de calcul est le développement en séries de Fourier. On supposera que la non-linéarité est statique et symétrique (mais pas forcément impaire) par rapport à l'origine. On suppose que la non-linéarité est excitée par un signal de période $T = 2\pi/\omega$ de la forme : $e(t) = A \sin(\omega t)$.

3.5.1 Gain complexe équivalent du relais idéal (plus-ou-moins, tout-ou-rien)

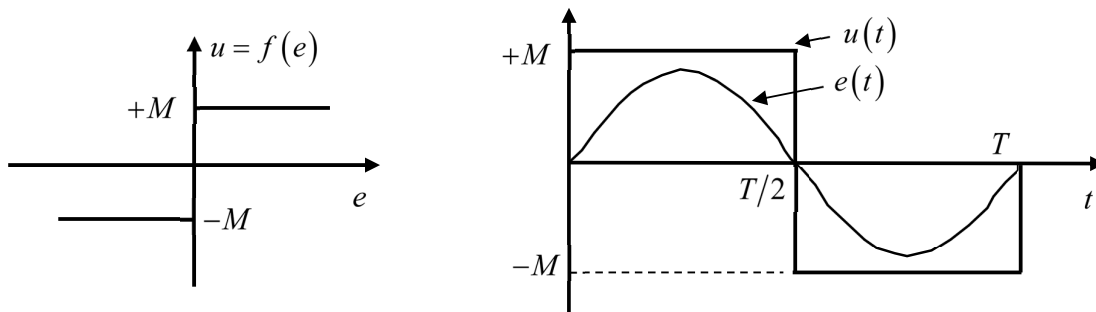


Figure 3.3 : Allure de la réponse du relais idéal.

Pour une entrée sinusoïdale, la sortie du relais idéal est donnée par :

$$u(t) = f(e(t)) = \begin{cases} +M, & 0 \leq t \leq T/2 \\ -M, & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

Comme le relais idéal est une fonction impaire, on a $a_1 = 0$. Le coefficient b_1 est donné par :

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(\omega t) dt = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} M \sin(\omega t) dt = -\frac{8M}{T\omega} [\cos(\omega t)]_0^{T/4} = \frac{4M}{\pi}$$

D'où le gain complexe équivalent du relais idéal : $N(A) = \frac{b_1}{A} = \frac{4M}{\pi A}$.

Le lieu critique est donné par : $C(A) = -\frac{\pi A}{4M}$.

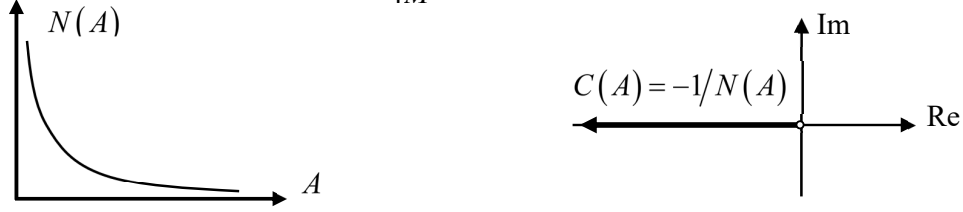


Figure 3.4 : Gain équivalent & Lieu critique du relais idéal.

3.5.2 Gain complexe équivalent de la saturation

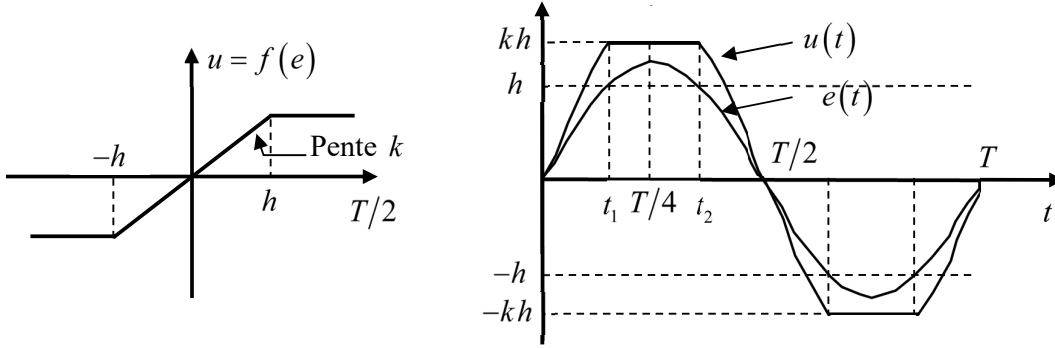


Figure 3.5 : Allure de la réponse de la saturation.

On applique à l'entrée un signal sinusoïdale $e(t) = A \sin(\omega t)$. Tant que $|e(t)| \leq h$, la sortie est proportionnelle à l'entrée, c'est-à-dire $u(t) = ke(t)$. Pour $|e(t)| > h$, la saturation agit et on a $u(t) = kh \operatorname{sgn}(e(t))$. Etant donné que la saturation est une fonction impaire, on a $a_1 = 0$. En outre, cette condition permet de réduire l'intervalle d'intégration à $T/4$. Pour $A \leq h$, on a $u(t) = kA \sin(\omega t)$, ce qui donne $b_1 = kA$. Pour $A > h$, il vient :

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(\omega t) dt = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} u(t) \sin(\omega t) dt. \text{ La sortie de la saturation est donnée par :}$$

$$u(t) = f(e(t)) = \begin{cases} kA \sin(\omega t), & 0 \leq t \leq t_1 \\ kh, & t_1 \leq t \leq T/4 \end{cases},$$

$$b_1 = \frac{8}{T} \int_0^{t_1} kA \sin^2(\omega t) dt + \frac{8}{T} \int_{t_1}^{T/4} kh \sin(\omega t) dt = \frac{8}{T} \int_0^{t_1} kA \left(\frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \right) dt + \frac{8}{T} \int_{t_1}^{T/4} kh \sin(\omega t) dt$$

$$b_1 = \frac{4kA}{T} \left(t_1 - \frac{\sin(2\omega t_1)}{2\omega} \right) + \frac{8kh}{T\omega} \cos(\omega t_1).$$

En utilisant la définition de t_1 , on a : $\sin(\omega t_1) = h/A$, $\omega t_1 = \sin^{-1}(h/A)$, $\cos(\omega t_1) = \sqrt{1 - (h/A)^2}$ (car $\omega t_1 \in]0, \pi/2[$, $\sin(2\omega t_1) = 2\sin(\omega t_1)\cos(\omega t_1)$). Le coefficient b_1

devient : $b_1 = \frac{2kA}{\pi} \left(\sin^{-1}\left(\frac{h}{A}\right) + \frac{h}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} \right)$, pour $A > h$.

Finalement, le gain complexe équivalent est : $N(A) = \begin{cases} \frac{2k}{\pi} \left(\sin^{-1}\left(\frac{h}{A}\right) + \frac{h}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} \right); & A > h \\ k; & A \leq h \end{cases}$

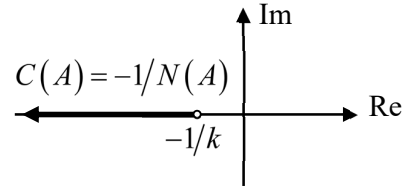
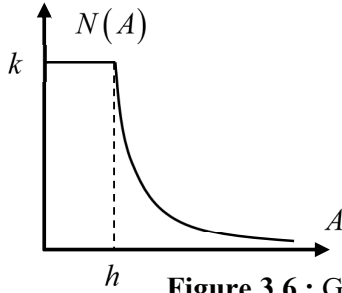


Figure 3.6 : Gain équivalent & Lieu critique de la saturation.

3.5.3 Gain complexe équivalent de la zone morte (seuil)

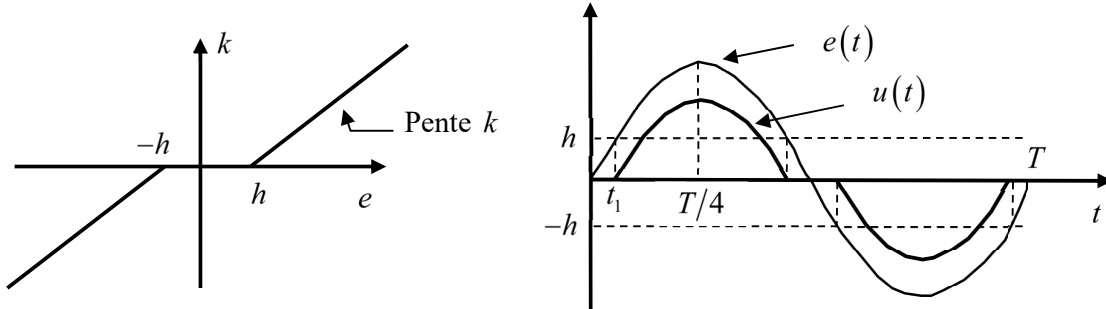


Figure 3.7 : Allure de la réponse de la zone-morte.

Etant donné que la zone morte est une fonction impaire, on a $a_1 = 0$. En outre, cette condition permet de réduire l'intervalle d'intégration à $T/4$. Pour $A \leq h$, on a $u(t) = 0$, ce qui donne

$b_1 = 0$. Pour $A > h$, on a : $b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(\omega t) dt = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} u(t) \sin(\omega t) dt$. La sortie de la zone-

morte est donnée par : $u(t) = f(e(t)) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_1 \\ k(A \sin(\omega t) - h), & t_1 \leq t \leq T/4 \end{cases}$

$$b_1 = \frac{8}{T} \int_{t_1}^{T/4} k A \sin^2(\omega t) dt - \frac{8}{T} \int_{t_1}^{T/4} k h \sin(\omega t) dt = \frac{8}{T} \int_{t_1}^{T/4} k A \left(\frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \right) dt - \frac{8}{T} \int_{t_1}^{T/4} k h \sin(\omega t) dt$$

$$b_1 = \frac{4kA}{T} \left(\frac{T}{4} - t_1 + \frac{\sin(2\omega t_1)}{2\omega} \right) - \frac{8kh}{T\omega} \cos(\omega t_1).$$

On a : $\sin(\omega t_1) = h/A$, $\omega t_1 = \sin^{-1}(h/A)$, $\cos(\omega t_1) = \sqrt{1 - (h/A)^2}$ (car $\omega t_1 \in]0, \pi/2[$),
 $\sin(2\omega t_1) = 2 \sin(\omega t_1) \cos(\omega t_1)$. Il vient alors : $b_1 = \frac{2kA}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{h}{A}\right) - \frac{h}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} \right)$, pour
 $A > h$.

Finalement, on obtient :

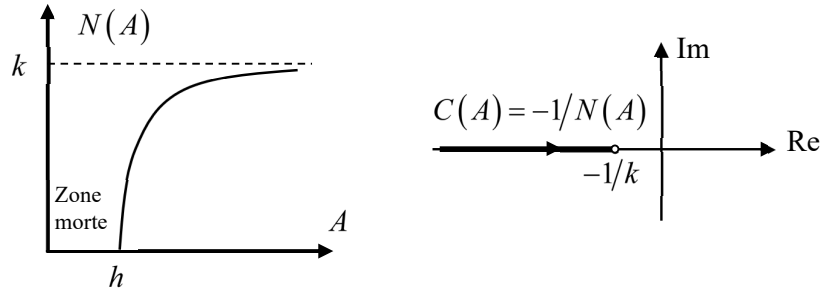
$$N(A) = \begin{cases} \frac{2k}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{h}{A}\right) - \frac{h}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} \right); & A > h \\ 0; & A \leq h \end{cases}$$


Figure 3.8 : Gain équivalent & Lieu critique de la zone-morte.

3.5.4 Gain complexe équivalent du relais avec hystérésis (plus-ou-moins avec hystérésis)

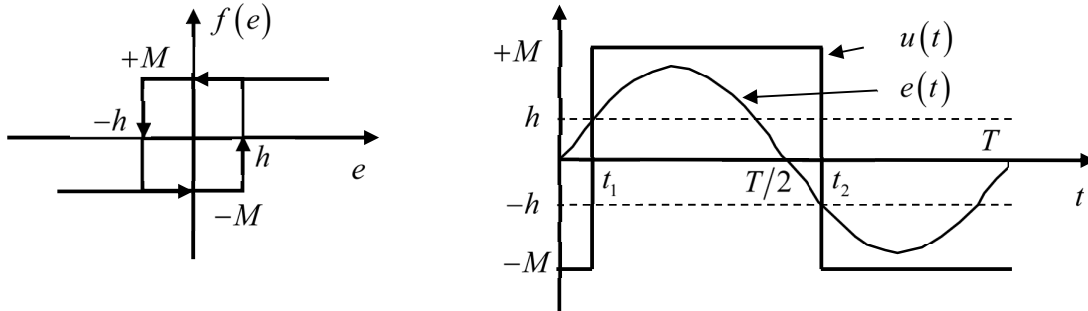


Figure 3.9 : Allure de la réponse du relais avec hystérésis (non-linéarité avec mémoire).

En raison de l'hystérésis, la sortie $u(t)$ est déphasée sur l'entrée $e(t)$, ce qui implique que a_1

et b_1 sont non nuls. La sortie $u(t)$ est donnée par : $u(t) = f(e(t)) = \begin{cases} -M, & 0 \leq t \leq t_1 \\ +M, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ -M, & t_2 \leq t \leq T \end{cases}$, si

$A > h$.

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(\omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \cos(\omega t) dt = -\frac{4M}{T} \int_0^{t_1} \cos(\omega t) dt + \frac{4M}{T} \int_{t_1}^{T/2} \cos(\omega t) dt$$

$$a_1 = -\frac{8M}{T\omega} \sin(\omega t_1). \text{ A l'instant } t_1, \text{ on a : } \sin(\omega t_1) = h/A. \text{ Il vient alors : } a_1 = -\frac{4Mh}{\pi A}.$$

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(\omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \sin(\omega t) dt = -\frac{4M}{T} \int_0^{t_1} \sin(\omega t) dt + \frac{4M}{T} \int_{t_1}^{T/2} \sin(\omega t) dt$$

$$b_1 = \frac{8M}{T\omega} \cos(\omega t_1). \text{ On a : } \cos(\omega t_1) = \sqrt{1 - (h/A)^2} \text{ puisque } \omega t_1 \in]0, \pi/2[.$$

Il vient alors : $b_1 = \frac{4M}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2}$. D'où : $N(A) = \frac{b_1}{A} + j \frac{a_1}{A} = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} - j \frac{4Mh}{\pi A^2}$. Cette formule est vraie pour $A > h$ ($N(A)$ n'est pas défini pour $A < h$). Le lieu critique est : $C(A) = -\frac{\pi A}{4M} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} - j \frac{\pi h}{4M}$.

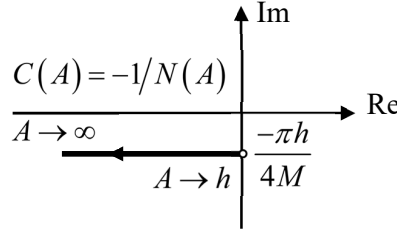


Figure 3.10 : Lieu critique du relais avec hystérésis.

Remarque 3.1 :

- Si $f(e) = \sum_{i=1}^n f_i(e)$, alors $N_f(A) = \sum_{i=1}^n N_{f_i}(A)$.
- Pour une non-linéarité : $f(e) = e^n$, avec n impair. On a :

$\sin^n(\omega t) = \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)} C_n^k \sin((n-2k)\omega t)$. Le dernier terme, $k = (n-1)/2$, donne la composante principale, i.e.

$f(e) = (A \sin(\omega t))^n \approx \frac{2A^n}{2^n} C_n^{\frac{n-1}{2}} \sin(\omega t) = \frac{2A^{n-1}}{2^n} C_n^{\frac{n-1}{2}} (A \sin(\omega t))$. Alors, il vient :

$$N(A) = \frac{2A^{n-1}}{2^n} C_n^{\frac{n-1}{2}}.$$

- Pour une non-linéarité : $f(e) = e^{n-1}|e| = e^n \operatorname{sgn}(e)$, avec n pair. La non-linéarité est impaire, alors on a : $b_1 = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} A^n \sin^{n+1}(\omega t) dt$. Etant donné que $(n+1)$ est impair, on peut utiliser la

formule de décomposition suivante : $\sin^{n+1}(x) = \frac{2}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^{\left(\frac{n}{2}-k\right)} C_{n+1}^k \sin((n+1-2k)x)$.

$$b_1 = \frac{8A^n}{T} \frac{2}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^{\left(\frac{n}{2}-k\right)} C_{n+1}^k \left[-\frac{1}{(n+1-2k)\omega} \cos((n+1-2k)\omega t) \right]_0^{T/4}, \quad (n+1-2k) \text{ est}$$

toujours impair, alors $\cos\left((n+1-2k)\omega \frac{T}{4}\right) = \cos\left((n+1-2k)\frac{\pi}{2}\right) = 0$. On obtient alors :

$$b_1 = \frac{8A^n}{T\omega} \frac{2}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^{\left(\frac{n}{2}-k\right)} C_{n+1}^k \frac{1}{(n+1-2k)} = \frac{A^n}{2^{n-2}\pi} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^{\left(\frac{n}{2}-k\right)} C_{n+1}^k \frac{1}{(n+1-2k)}.$$

3.6 Etude des cycles limites (auto-oscillations) et de leur stabilité

Dans le cas d'un système asservi possédant un seul élément non linéaire statique séparable, on peut se ramener au schéma canonique de la figure 3.1. Dans ce schéma canonique, on remplace l'élément non linéaire par son gain complexe équivalent $N(A)$.

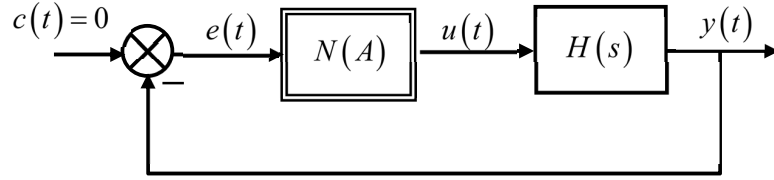


Figure 3.11 : Schéma canonique d'un système asservi non linéaire.

En boucle fermée, la fonction de transfert généralisée s'écrit : $H_{BF}(s) = \frac{N(A)H(s)}{1 + N(A)H(s)}$. La

condition nécessaire d'existence de cycles limites est donnée par :

$$1 + N(A)H(j\omega) = 0 \quad \text{où} \quad H(j\omega) = -1/N(A) = C(A)$$

Cette équation peut être résolue par calcul ou graphiquement et fournira donc l'amplitude A et la pulsation ω des cycles limites, s'ils existent. Graphiquement, les solutions de cette équation sont les intersections entre le lieu de transfert de $H(j\omega)$ et du lieu critique $C(A) = -1/N(A)$.

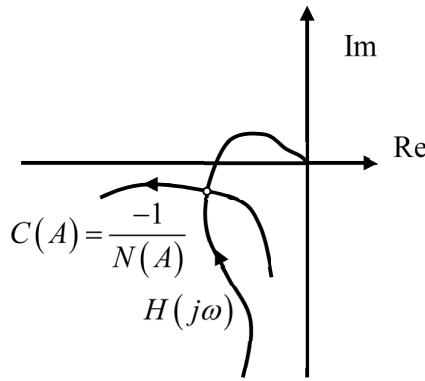


Figure 3.12 : Existence de cycle limite dans le lieu de Nyquist.

La stabilité des cycles limites peut être évaluée par le critère de Loeb : Un cycle limite caractérisé par une amplitude A_c et une pulsation ω_c est stable si l'intersection entre les deux tracés est telle qu'en parcourant le lieu de transfert $H(j\omega)$ dans le sens des pulsations croissantes (au voisinage du point d'intersection), on laisse à sa gauche la direction des amplitudes A croissantes sur le lieu critique $C(A)$.

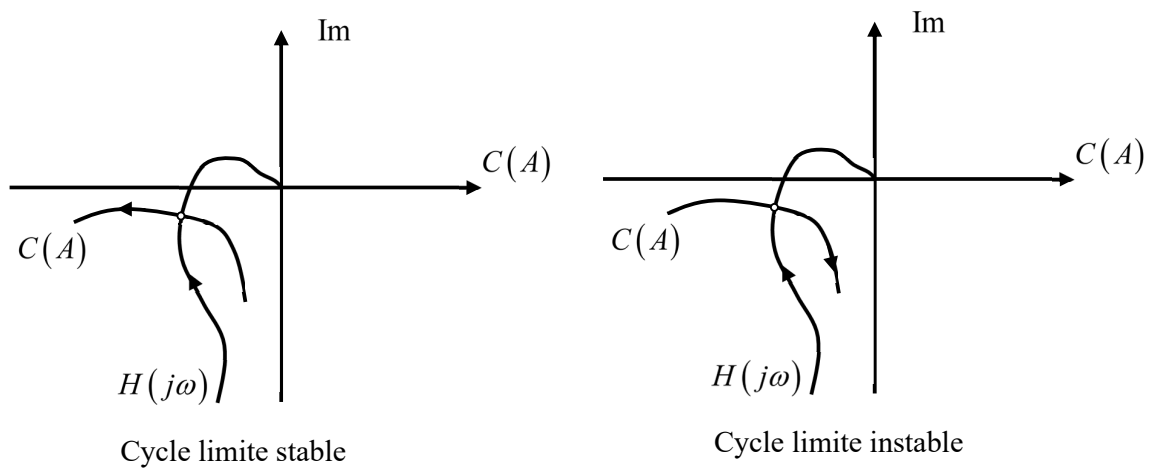


Figure 3.13 : Règle de Loeb pour les cycles limites.

Remarque 3.2 :

- Un cycle limite (auto-oscillation) stable a une existence physique, alors qu'un cycle limite (auto-oscillation) instable n'en a pas, mais constitue une frontière de stabilité.
- Si le lieu critique $C(A) = -1/N(A)$ et le lieu de transfert $H(j\omega)$ ne se coupent pas, il n'existe pas de cycles limites (auto-oscillations). Le système est stable ou instable suivant que $H(j\omega)$, parcouru dans le sens des pulsations croissantes, laisse le lieu critique à sa gauche ou à sa droite (critère du revers des systèmes linéaires).
- On ne peut plus parler uniquement en termes de stabilité; il faut préciser à quelle amplitude A .

Remarque 3.3 :

Pour tracer une esquisse du lieu de Nyquist de la fonction de transfert $H(s)$:

- Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $H(j\omega)$, i.e. mettre $H(j\omega)$ sous la forme : $H(j\omega) = \text{Re}[H(j\omega)] + j \text{Im}[H(j\omega)]$
- Calculer $H(j\omega)$ pour $\omega = 0$
- Calculer $H(j\omega)$ pour $\omega \rightarrow \infty$
- Déterminer les points d'intersection de $H(j\omega)$ avec l'axe réel par la résolution de l'équation $\text{Im}[H(j\omega)] = 0$
- Déterminer les points d'intersection de $H(j\omega)$ avec l'axe imaginaire par la résolution de l'équation $\text{Re}[H(j\omega)] = 0$

3.6.1 Exemple 3.1 :

Considérons un système asservi non linéaire avec $H(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$ et une non-linéarité de type

relais idéal avec $M = 2$. Pour un relais idéal, on a $N(A) = \frac{4M}{\pi A} \Rightarrow C(A) = -\frac{\pi A}{4M}$. On trace sur

le même plan de Nyquist le lieu de transfert $H(j\omega)$ et le lieu critique.

On remarque que le lieu de transfert coupe le lieu critique en un point. Alors, il existe un cycle limite, et, d'après le critère de Loeb, le cycle limite est stable. Le cycle limite est caractérisé par une pulsation ω_c tel que : $\text{Im}(H(j\omega_c)) = 0 \Rightarrow \omega_c = 1 \text{ rad/sec}$, et une amplitude A_c tel que :

$$C(A_c) = \text{Re}[H(j\omega_c)] = -0.5 \Rightarrow A_c = 2M/\pi.$$

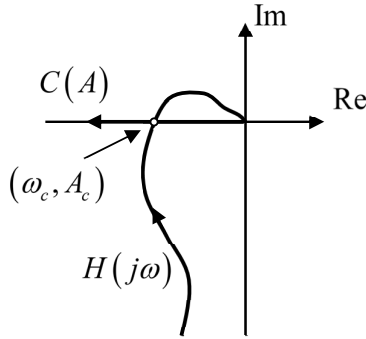


Figure 3.14 : Lieu de transfert et lieu critique

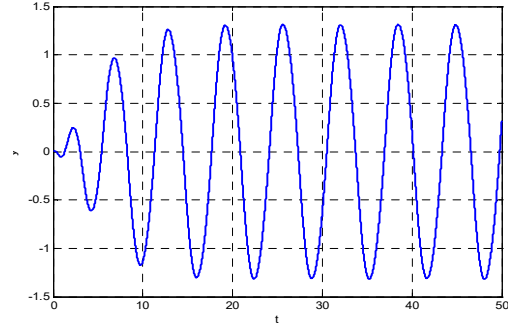


Figure 3.15 : réponse du système

3.6.1 Exemple 3.2 : Considérons un système asservi non linéaire avec $H(s) = \frac{(s+10)^2}{(s+1)^3}$ et une

non-linéarité de type relais idéal avec $M = 2$. On a : $\text{Re}[H(j\omega)] = -\frac{17\omega^4 + 241\omega^2 - 100}{(1+\omega^2)^3}$ et

$\text{Im}[H(j\omega)] = -\frac{\omega(\omega^4 - 43\omega^2 + 280)}{(1+\omega^2)^3}$. La figure 3.16 présente le lieu de transfert $H(j\omega)$ et le

lieu critique.

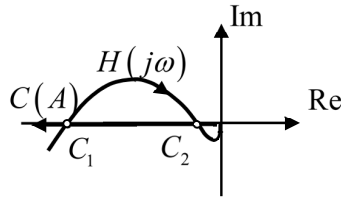


Figure 3.16 : Lieu de transfert et lieu critique

On a deux points d'intersection C_1 et C_2 . Le premier point d'intersection correspond à la pulsation $\omega_{c1} = 2.83 \text{ rad/s}$ et le second point à la pulsation $\omega_{c2} = 5.92 \text{ rad/s}$. D'après le critère de Loeb, le premier point d'intersection correspond à un cycle limite (une oscillation) stable (amplitude vérifie $C(A_{c1}) = \text{Re}[H(j\omega_{c1})] = -4 \Rightarrow A_{c1} = 16M/\pi$) et le second à un cycle limite

instable (amplitude vérifie $C(A_{c2}) = \text{Re}[H(j\omega_{c2})] = -0.624 \Rightarrow A_{c2} = 2.496M/\pi$). En conséquence, si la perturbation (ou les conditions initiales) est d'amplitude faible telle que $A < A_{c2}$, l'amplitude diminue et le système revient au repos. Si la perturbation est d'amplitude telle que $A_{c2} < A < A_{c1}$, l'amplitude croît d'avantage et le système accroche au point C_1 . Si la perturbation est d'amplitude telle que $A > A_{c1}$, l'amplitude diminue et le système accroche au point C_1 .

3.6.1 Exemple 3.3 : Considérons un système asservi non linéaire avec $H(s) = \frac{20}{s^2 + 2s + 10}$ et une non-linéarité de type relais avec hystérésis avec $M = 1$ et $h = 0.2$.

On a : $\text{Re}[H(j\omega)] = \frac{200 - 20\omega^2}{\omega^4 - 16\omega^2 + 100}$, $\text{Im}[H(j\omega)] = \frac{-40\omega}{\omega^4 - 16\omega^2 + 100}$ et le lieu critique

$C(A) = -\frac{\pi A}{4M} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} - j \frac{\pi h}{4M}$. On a un cycle limite stable dont les paramètres sont calculés

à partir des équations : $\frac{-40\omega_c}{\omega_c^4 - 16\omega_c^2 + 100} = -\frac{\pi h}{4M} = -0.1571 \Rightarrow \omega_c = 7.072 \text{ rad/s}$,

et $\frac{200 - 20\omega_c^2}{\omega_c^4 - 16\omega_c^2 + 100} = -\frac{\pi A_c}{4M} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A_c}\right)^2}$. $\text{Re}[H(j\omega_c)] = -0.4443 \Rightarrow A_c = 0.6$.

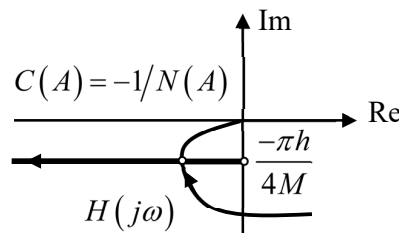


Figure 3.17 : Lieu de transfert et lieu critique

3.7 Fiabilité de la méthode du premier harmonique

La méthode du premier harmonique présente des limitations sur le plan de la rigueur, puisqu'elle néglige totalement l'effet des harmoniques. Toutefois, lorsque le composant linéaire agit comme un filtre passe-bas à faible bande passante, cette approximation peut se révéler efficace, et l'influence des harmoniques peut être ignorée. En règle générale, la méthode du premier harmonique fournit des résultats satisfaisants, bien que dans certains cas, elle puisse mener à des conclusions incorrectes, telles que des prédictions erronées de l'amplitude et de la pulsation des oscillations, l'absence d'un cycle limite prévu, ou la non-prédiction d'un cycle limite existant.

Stabilité au sens de Lyapunov des systèmes non linéaires autonomes

La méthode de Lyapunov permet d'analyser la stabilité d'un système, qu'il soit linéaire ou non linéaire, sans nécessiter la connaissance explicite des solutions des équations différentielles le caractérisant.

4.1 Définitions

4.1.1 Système autonome

L'évolution d'un système peut être définie par une équation différentielle de la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$x(t)$: vecteur d'état

$u(t)$: vecteur de commande

Dans ce chapitre nous nous limiterons à considérer des systèmes non commandés (entrée nulle : $u(t) = 0$) donnés par

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

Un système est dit **autonome** si $f(\cdot)$ ne dépend pas explicitement du temps t : $\dot{x}(t) = f(x(t))$. Sinon, le système est dit **non autonome**.

4.1.2 Voisinage de l'origine

Un voisinage de l'origine Ω est tout domaine fermé incluant l'origine.

4.1.3 Boule

On définit une boule fermée dans $\mathbb{R}^n$ comme l'ensemble : $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$ où $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ et $r > 0$.

4.1.4 Notions de fonctions définies positives et définies négatives

Considérons une fonction scalaire $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on a alors la terminologie suivante :

$V(0) = 0, V(x) \geq 0, \forall x \in \Omega - \{0\}$	$V(x)$ est semi-définie positive
$V(0) = 0, V(x) > 0, \forall x \in \Omega - \{0\}$	$V(x)$ est définie positive
$V(0) = 0, V(x) \leq 0, \forall x \in \Omega - \{0\}$	$V(x)$ est semi-définie négative
$V(0) = 0, V(x) < 0, \forall x \in \Omega - \{0\}$	$V(x)$ est définie négative
$\ x\ \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$	$V(x)$ est radialement non bornée

Exemple 4.1 : Dans l'espace à deux dimensions

- $V(x) = x_1^2 + x_2^2$: Fonction définie positive et radialement non bornée.
- $V(x) = x_1^2$: Fonction semi-définie positive. Parce que pour $x_1 = 0$ et $x_2 \neq 0$, on a également $V(x) = 0$.
- $V(x) = x_1^2 + x_2 \sin(x_2)$: Fonction définie positive pour $|x_2| < \pi/2$ ($V(0) = 0, V(x) > 0$ pour $|x_2| < \pi/2$ et $x \neq 0$).
- $V(x) = (x_1 - x_2)^2$: Fonction semi-définie positive. Parce que pour tout $x_1 = x_2 \neq 0$, on a également $V(x) = 0$.
- $V(x) = -(x_1^2 + x_2^2)$: Fonction définie négative

- $V(x) = -x_1^2$: Fonction semi-définie négative. Parce que pour $x_1 = 0$ et $x_2 \neq 0$, on a également $V(x) = 0$.
- La forme quadratique $V(x) = x^T P x$, $x \in \mathbb{R}^n$ avec $P = P^T$, est (semi-)définie positive (négative) si P est une matrice (semi-)définie positive (négative).
- $V(x) = 1.5x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x^T P x$ avec $P = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}$, P est DP, alors $V(x)$ est DP.
- $V(x) = 1.5x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = 1.25x_1^2 + (0.5x_1 - x_2)^2$, alors $V(x)$ est définie positive
- $V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{6}x_1^4 + x_1x_2 + x_2^2 = \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{6}x_1^2\right)x_1^2 + \left(\frac{1}{2}x_1 + x_2\right)^2$: Fonction définie positive si $x_1^2 < \frac{15}{2}$.
- $V(x) = -x_1^2 + x_1x_2^2 - x_2^2 + 2x_1^2x_2 = -(1-2x_2)x_1^2 - (1-x_1)x_2^2$, $V(x)$ est définie négative pour $x_1 < 1$ et $x_2 < 0.5$.
- $V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$: Fonction définie positive mais n'est pas radialement non bornée.

4.2 Stabilité d'un point d'équilibre au sens de Lyapunov

4.2.1 Point d'équilibre

x_e est un point d'équilibre du système autonome $\dot{x} = f(x)$ si : $x(t_1) = x_e \Rightarrow x(t) = x_e$ pour $t \geq t_1$. Ou de façon équivalente si : $f(x_e) = 0$.

Remarque 4.1 : On peut toujours supposer que le point d'équilibre $x_e = 0$. Si $x_e \neq 0$, on peut effectuer un changement de variables et obtenir un nouveau système avec un point d'équilibre à $x_e = 0$. Posons : $y = x - x_e \Rightarrow \dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + x_e) = g(y)$.

Alors, $y_e = 0$ est un point d'équilibre du nouveau système $\dot{y} = g(y)$, puisque $g(0) = f(0 + x_e) = f(x_e) = 0$. Ainsi, l'étude de la stabilité du point d'équilibre x_e du système $\dot{x} = f(x)$ revient à étudier la stabilité du point d'équilibre $y_e = 0$ du système $\dot{y} = g(y)$.

4.2.1 Stabilité et instabilité d'un point d'équilibre

Le point d'équilibre x_e de $\dot{x} = f(x)$ est :

- Stable : si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (dépendant de ε) tel que :
 $\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon$
- Instable : s'il n'est pas stable
- Asymptotiquement stable : s'il est stable et δ peut être choisi tel que :
 $\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$. Il est globalement asymptotiquement stable si $\delta = \infty$ (c'est-à-dire : $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n$).
- Exponentiellement stable : s'il existe $\delta > 0$, $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ tel que :
 $\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| \leq \alpha \|x(0) - x_e\| e^{-\lambda t}$, $\forall t > 0$. Il est globalement exponentiellement stable si $\delta = \infty$ (c'est-à-dire : $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n$)

Remarque 4.2 :

- La stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai.
- La notion de stabilité s'applique au point d'équilibre et non pas au système. Un système peut avoir plusieurs points d'équilibre.

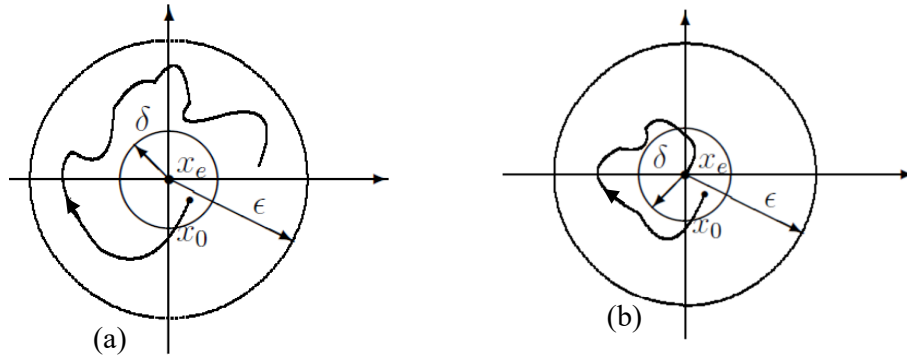


Figure 4.1 : Illustration de la notion de stabilité : (a) point d'équilibre stable ; (b) point d'équilibre asymptotiquement stable

Exemple 4.2 : Soit le système : $\dot{x} = -x^3$ dont la solution est donnée par : $x(t) = \frac{x(0)}{\sqrt{1+2tx^2(0)}}$.

On a : $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, alors l'origine est asymptotiquement stable. Cependant la condition :

$|x(t)| \leq \alpha |x(0)| e^{-\lambda t}$ avec $\lambda > 0, \alpha > 0$ n'est pas vérifiée car : $|x(t)| \leq \alpha |x(0)| e^{-\lambda t} \Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{1+2tx^2(0)}} \leq \alpha e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{1}{1+2tx^2(0)} \leq \alpha e^{-2\lambda t} \Rightarrow \frac{e^{2\lambda t}}{1+2tx^2(0)} \leq \alpha, \text{ ceci est impossible puisque}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{2\lambda t}}{1+2tx^2(0)} = \infty. \text{ Alors, l'origine n'est pas exponentiellement stable}$$

4.3 Première méthode de Lyapunov (Méthode indirecte, Méthode de linéarisation)

La première méthode de Lyapunov est basée sur l'examen de la linéarisation du système $\dot{x} = f(x)$ autour du point d'équilibre x_e . Plus précisément, on examine les valeurs propres $\lambda(A)$ de la matrice Jacobienne évaluée au point d'équilibre x_e . Selon cette méthode, les propriétés de stabilité du point d'équilibre s'expriment comme suit.

Théorème 4.1 : Première méthode de Lyapunov

Soit x_e le point d'équilibre du système : $\dot{x} = f(x)$ avec $f \in C^1$. Posons

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_e} \quad \text{et } \alpha(A) = \max \operatorname{Re}(\lambda(A)). \text{ Alors :}$$

- Si $\alpha(A) < 0$, le point d'équilibre x_e est asymptotiquement stable.

- Si $\alpha(A) > 0$, le point d'équilibre x_e est instable.
- Si $\alpha(A) = 0$, on ne peut pas conclure sur la stabilité du point d'équilibre x_e .

Remarque 4.3 : La méthode indirecte de Lyapunov a deux inconvénients principaux :

- Elle ne permet pas de déterminer si le point d'équilibre est stable ou instable lorsque la matrice jacobienne présente au moins une valeur propre à partie réelle nulle et aucune valeur propre à partie réelle strictement positive..
- La stabilité est garantie uniquement dans un voisinage du point d'équilibre, ce qui correspond à une stabilité locale.

Exemple 4.3 : La linéarisation du système : $\dot{x}_1 = -x_1^2 + x_1 + \sin(x_2)$; $\dot{x}_2 = \cos(x_2) - x_1^3 - 5x_2$, au point d'équilibre $x_e = (1, 0)^T$ est donnée par : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $\lambda(A) = \{-2, -4\}$. Alors, le point d'équilibre $x_e = (1, 0)^T$ du système non linéaire est asymptotiquement stable.

4.4 Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe)

La stabilité au sens de Lyapunov constitue une formalisation mathématique d'une observation fondamentale : si l'énergie totale d'un système décroît avec le temps, celui-ci, qu'il soit linéaire ou non, stationnaire ou non, tend à converger vers un état d'équilibre, indiquant ainsi sa stabilité. La méthode directe de Lyapunov vise donc à définir une fonction scalaire de type énergétique, dont la dérivée temporelle soit négative, garantissant ainsi la stabilité du système.

Théorème 4.2 : Stabilité au sens de Lyapunov

Le point d'équilibre $x_e = 0$ du système autonome $\dot{x} = f(x)$ est **stable** s'il existe une fonction scalaire $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continûment dérivable ayant les propriétés suivantes :

- $V(0) = 0$, $V(x) > 0$, $\forall x \in \Omega - \{0\}$;
- $\dot{V}(x) \leq 0$, pour tout $x \in \Omega$.

Théorème 4.3 : Stabilité asymptotique

Le point d'équilibre $x_e = 0$ du système autonome $\dot{x} = f(x)$ est **asymptotiquement stable** s'il existe une fonction scalaire $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continûment dérivable ayant les propriétés suivantes :

- $V(0) = 0$, $V(x) > 0$, $\forall x \in \Omega - \{0\}$;
- $\dot{V}(0) = 0$, $\dot{V}(x) < 0$, $\forall x \in \Omega - \{0\}$.

Théorème 4.4 : Stabilité asymptotique globale

Le point d'équilibre $x_e = 0$ du système autonome $\dot{x} = f(x)$ est **globalement asymptotiquement stable** s'il est asymptotiquement stable et si en outre : $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$.

Théorème 4.5 : Stabilité exponentielle

Le point d'équilibre $x_e = 0$ du système autonome $\dot{x} = f(x)$ est **exponentiellement stable** s'il existe une fonction scalaire $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continûment dérivable telle que :

- $k_1 \|x\|^a \leq V(x) \leq k_2 \|x\|^a$, pour tout $x \in \Omega$;
- $\dot{V}(x) \leq -k_3 \|x\|^a$, pour tout $x \in \Omega$;

où k_1, k_2, k_3 et a sont des constantes positives.

Théorème 4.6 : Stabilité exponentielle globale

Le point d'équilibre $x_e = 0$ du système autonome $\dot{x} = f(x)$ est **globalement exponentiellement stable** s'il est exponentiellement stable avec $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Remarque 4.4 :

- Une fonction $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $V(x)$ est définie positive avec des dérivées partielles continues est appelée fonction candidate de Lyapunov.
- Une fonction candidate de Lyapunov est une fonction définie positive dont on teste la décroissance autour d'un point d'équilibre.
- La dérivée $\dot{V}(x)$ correspond à : $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$.
- La deuxième méthode de Lyapunov fournit uniquement des conditions suffisantes de stabilité. Elle ne guide pas l'utilisateur dans le choix de la fonction de Lyapunov appropriée et ne permet pas de tirer de conclusions si une telle fonction ne peut être trouvée.
- Les fonctions quadratiques sont souvent utilisées dans l'analyse des systèmes dynamiques (fonction de Lyapunov). Notamment : l'énergie cinétique, l'énergie potentielle élastique ou de gravité et l'énergie totale sont des fonctions quadratiques de l'état pour les systèmes mécaniques.
- Si un point d'équilibre est GAS, cela signifie que ce système ne possède pas d'autres points d'équilibre.

Exemple 4.4 : Soit le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a \sin x_1 \end{cases}, \quad a > 0, \text{ L'origine est un point d'équilibre pour ce système.}$$

Considérons la fonction de Lyapunov $V(x) = \int_0^{x_1} a \sin(y) dy + \frac{1}{2} x_2^2 = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$.

$V(x)$ est une fonction définie positive pour $-\pi < x_1 < \pi$, et : $\dot{V}(x) = a \sin(x_1) \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = 0$, $\dot{V}(x)$ est semi-définie négative, alors l'origine est stable.

Exemple 4.5 : Soit le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a \sin x_1 - b x_2 \end{cases}, \quad a > 0, b > 0. \text{ L'origine est un point d'équilibre pour ce système.}$$

Considérons la fonction de Lyapunov $V(x) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$. $V(x)$ est une fonction définie positive pour $-\pi < x_1 < \pi$, et : $\dot{V}(x) = a \sin(x_1) \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = -b x_2^2$, $\dot{V}(x)$ est semi-définie négative, alors l'origine est stable.

Considérons la fonction de Lyapunov $V(x) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x^T P x$ où $P = \begin{pmatrix} b^2/2 & b/2 \\ b/2 & 1 \end{pmatrix}$.

$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2} a b x_1 \sin x_1 - \frac{1}{2} b x_2^2$. Pour $|x_1| < \pi$, $V(x)$ est définie positive et $\dot{V}(x)$ est définie négative, Alors, l'origine est asymptotiquement stable.

Exemple 4.6 : Soit le système : $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2) + 4x_1^2x_2 \end{cases}$, $x_e = 0$ est un point d'équilibre.

Considérons la fonction de Lyapunov $V(x) = x_1^2/2 + x_2^2/2$. $V(x)$ est une fonction définie positive et : $\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 2)$, $\dot{V}(x)$ est définie négative pour tout x dans $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 2\}$. Alors, le point d'équilibre $x_e = 0$ est asymptotiquement stable.

Exemple : 4.7 : Soit le système : $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 2x_1^2 \end{cases}$, $x_e = 0$ est un point d'équilibre.

Considérons la fonction de Lyapunov $V(x) = x_1^2/2 + x_2^2/2$. $V(x)$ est une fonction définie positive et : $\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = -(1 - 2x_2)x_1^2 - (1 - x_1)x_2^2$, $\dot{V}(x)$ est définie négative pour tout x dans $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x < 1, x_2 < 0.5)\}$. Alors, le point d'équilibre $x_e = 0$ est asymptotiquement stable.

Exemple 4.8 : Soit le système : $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 \end{cases}$, $x_e = 0$ est un point d'équilibre.

Considérons la fonction de Lyapunov $V(x) = x_1^2 + x_2^2$. $V(x)$ est une fonction définie positive et : $\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2(1 - 2x_1)x_1^2 - 2(1 - x_1 - x_2)x_2^2$, $\dot{V}(x)$ est définie négative pour tout x dans $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x < 0.5, x_2 < 1 - x_1)\}$. Alors, le point d'équilibre $x_e = 0$ est asymptotiquement stable.

Exemple 4.9 : Soit le système non linéaire

$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$, $x_e = 0$ est un point d'équilibre du système.

Considérons la fonction de Lyapunov $V(x) = x_1^2 + x_2^2$. $V(x)$ est une fonction définie positive et : $\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = -2(x_1^2 + x_2^2)^2$, $\dot{V}(x)$ est définie négative pour tout x . Alors, puisque $V(x)$ est radialement non bornée, le point d'équilibre $x_e = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

Exemple 4.10 : Soit la fonction : $V(x) = \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} + x_2^2$, cette fonction n'est pas radialement non

bornée et ne peut donc pas être utilisée pour prouver la stabilité asymptotique globale. Il est évident que $V(x)$ peut devenir plus petite, mais x_1 croît sans borne supérieure.

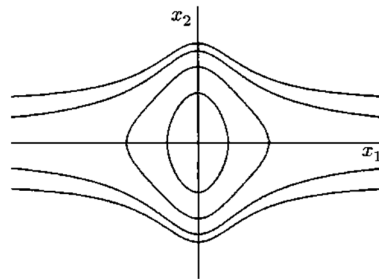


Figure 4.2 : courbes (lignes) de niveau de la fonction de l'exemple

4.4.1 Principe d'invariance de LaSalle

Il arrive souvent que l'on trouve une fonction de Lyapunov dont la dérivée est seulement semi-définie négative, ce qui ne permet pas de conclure sur la stabilité asymptotique en appliquant la méthode directe de Lyapunov. La difficulté provient notamment de ce que, en analysant la fonction $\dot{V}(x)$, on n'exploite pas le fait que les différentes variables d'état x_i ne sont pas indépendantes mais sont reliées par les équations de la dynamique du système. LaSalle a étudié cette question et a formulé un principe d'invariance qui permet d'analyser la stabilité asymptotique dans le cas d'une fonction $\dot{V}(x)$ semi-définie négative.

Théorème 4.7 : Principe d'invariance de LaSalle

Le point d'équilibre $x_e = 0$ du système $\dot{x} = f(x)$ est **asymptotiquement stable** si il existe une fonction $V(x) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, continument différentiable ayant les propriétés suivantes :

- $V(0) = 0, V(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega - \{0\}$;
- $\dot{V}(x) \leq 0$, pour tout $x \in \Omega$;
- L'ensemble $E \subset \Omega$ tel que $\dot{V}(x) = 0$ ne contient pas de trajectoire du système autre que $x(t) = 0$ (c'est-à-dire, $x = 0$ est la seule solution qui vérifie $\dot{V}(x) = 0$ et $\dot{x} = f(x)$ dans Ω).

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$, alors le point d'équilibre $x_e = 0$ est **globalement asymptotiquement stable**.

Exemple 4.11 : Soit le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a \sin x_1 - b x_2 \end{cases}, \quad a > 0, \quad b > 0. \text{ L'origine est un point d'équilibre pour ce système.}$$

Soit $V(x) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$. $V(x)$ est une fonction définie positive dans $\Omega = \{x : -\pi < x_1 < \pi\}$, et : $\dot{V}(x) = -b x_2^2$, $\dot{V}(x)$ est semi-définie négative, alors l'origine est stable selon Lyapunov.

La condition $\dot{V}(x) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = -a \sin x_1 - b x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dot{x}_1 = 0, x_1 = 0$ (pour $-\pi < x_1 < \pi$). Alors, la seule solution dans Ω qui vérifie $\dot{V}(x) = 0$ et $\dot{x} = f(x)$ c'est bien $x = 0$, alors selon LaSalle, l'origine est asymptotiquement stable.

4.4.2 Stabilité de Lyapunov des systèmes linéaires

Théorème 4.8 : Le système linéaire $\dot{x} = Ax$ est asymptotiquement stable (ou les valeurs propres de A sont à partie réelles négatives) si et seulement si, pour toute matrice symétrique définie positive Q , il existe une matrice P symétrique et définie positive satisfaisant l'équation de Lyapunov : $A^T P + P A = -Q$.

Démonstration : On définit comme fonction de Lyapunov $V(x) = x^T P x$.

$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T (A^T P + P A) x = -x^T Q x$. $V(x)$ est définie positive et radialement non bornée avec $\dot{V}(x)$ définie négative, alors, le système linéaire est (globalement) asymptotiquement stable.

Exemple 4.12 : Soit le système $\dot{x} = Ax$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{pmatrix}$. Pour $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la solution P de l'équation de Lyapunov : $A^T P + PA = -Q$ est donnée par : $P = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Comme la matrice P est symétrique et définie positive, le système linéaire est asymptotiquement stable.

N.B. Une matrice est définie positive si toutes ses valeurs propres sont strictement positives ou si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

4.4.3 Région d'attraction

Une région d'attraction (domaine d'attraction, bassin d'attraction, région de stabilité asymptotique) est un ensemble de points entourant un point d'équilibre asymptotiquement stable pour lequel chaque trajectoire du système partant d'un point de cette région converge asymptotiquement vers le point d'équilibre. La région d'attraction au point d'équilibre x_e , noté R_A , est défini par : $R_A = \{x(0) \in \Omega : x(t) \rightarrow x_e, \text{ quand } t \rightarrow \infty\}$. Notons que si un point d'équilibre est globalement asymptotiquement stable, alors sa région d'attraction est tout l'espace d'état.

La région d'attraction d'un point d'équilibre asymptotiquement stable est un ensemble ouvert, connexe, invariant, et sa frontière est formée par des trajectoires (Voyez la Figure 4.3).

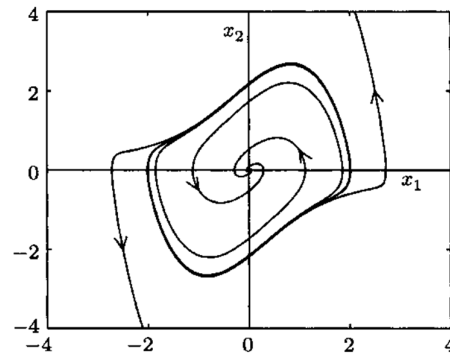


Figure 4.3 : Portrait de phase du système $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = x_1 + (x_1^2 - 1)x_2$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble avec $0 \in \Omega$ tel que pour tout $x \in \Omega$, $V(x)$ est définie positive et $\dot{V}(x)$ est définie négative, alors peut-on conclure que l'ensemble Ω est un sous-ensemble de la région d'attraction ? La réponse est non, pourquoi ? Voyez l'exemple suivant.

Exemple 4.13 : Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \frac{1}{3}x_1^3 - x_2 \end{cases}$$

$V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{6}x_1^4 + x_1x_2 + x_2^2 = \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{6}x_1^2\right)x_1^2 + \left(\frac{1}{2}x_1 + x_2\right)^2$, $V(x)$ est définie positive si $x_1^2 < \frac{15}{2}$.

$\dot{V}(x) = -x_1^2 + \frac{1}{3}x_1^4 - x_2^2 = \left(-1 + \frac{1}{3}x_1^2\right)x_1^2 - x_2^2$, $\dot{V}(x)$ est définie négative si $x_1^2 < 3$.

Alors, $V(x)$ est définie positive et $\dot{V}(x)$ est définie négative dans $\Omega = \{x : x_1^2 < 3\}$.

Le plan de phase de la figure suivante montre bien que l'ensemble Ω n'est pas un sous-ensemble de la région d'attraction.

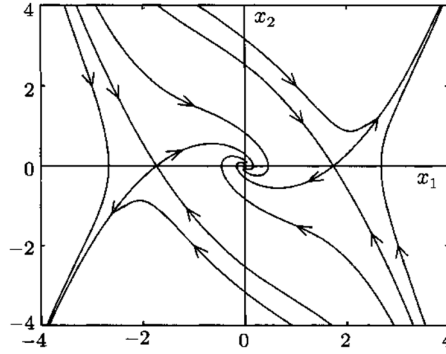


Figure 4.4 : Portrait de phase de l'exemple 4.13

Estimation de la région d'attraction : Une approche simple et conservative pour estimer un sous-ensemble de la région d'attraction pour un point d'équilibre asymptotiquement stable consiste à utiliser un ensemble de niveau de la fonction de Lyapunov : $\Omega_c = \{x : V(x) \leq c\}$, $c > 0$ avec l'ensemble Ω_c borné et contenu dans Ω .

Exemple 4.14 : Si $V(x) = x^T P x$, $P = P^T > 0$, $\Omega = \{x : \|x\| < r\}$, $\Omega_c = \{x : V(x) \leq c\}$, alors $\Omega_c \subset \Omega$ si on choisit $c < \min_{\|x\|=r} V(x) = \lambda_{\min}(P)r^2$.

On considère le système : $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + (x_1^2 - 1)x_2 \end{cases}$, avec $V(x) = x^T P x$, $P = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice P est la solution de $A^T P + P A = -I$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ matrice jacobienne à l'origine.

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - x_2^2 - (x_1^3 x_2 - 2x_1^2 x_2^2) = -(x_1^2 + x_2^2) - x_1(x_1 x_2)(x_1 - 2x_2) \leq -\|x\|^2 + |x_1| \|x_1 x_2\| |x_1 - 2x_2|$$

On a : $|x_1| \leq \|x\|$, $|x_1 x_2| \leq \frac{1}{2} \|x\|^2$, $|x_1 - 2x_2| \leq |x_1| + 2|x_2| \leq 3\|x\|$

$\dot{V}(x) \leq -\|x\|^2 + \frac{3}{2} \|x\|^4$. Donc, $\dot{V}(x)$ est définie négative dans la boule Ω définie par

$$\|x\|^2 < \frac{2}{3} = r^2.$$

Sachant que $\lambda_{\min}(P) = 0.691$, on choisit $c = 0.46 < \min_{\|x\|=r} V(x) = \lambda_{\min}(P)r^2 = 0.4607$.

L'ensemble Ω_c avec $c = 0.46$ est une estimation (conservative) de la région d'attraction.

4.5 Méthodes de construction des fonctions de Lyapunov

Si la méthode de Lyapunov est très intéressante car elle permet de conclure si un système dynamique est stable ou instable sans être obligé de résoudre les équations du système, elle a un point faible car il n'existe aucune méthode générale pour la construction des fonctions de Lyapunov. On présente deux méthodes qui permettent de répondre en partie à ce problème.

4.5.1 Méthode de Krasovskii

Théorème 4.9 : Soit le système autonome $\dot{x} = f(x)$ dont le point d'équilibre est l'origine $x_e = 0$, et soit la matrice Jacobienne du système : $A(x) = \partial f / \partial x$. Si la matrice $B(x) = A(x) + A^T(x)$ est définie négative dans un voisinage Ω de l'origine, alors l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable. Une fonction de Lyapunov pour ce système est donnée par : $V(x) = f^T(x)f(x)$. Si de plus, $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $V(x)$ est radialement non bornée, alors l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Exemple 4.15 : Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3 \end{cases}$$

L'origine est un point d'équilibre du système. On calcule la Jacobienne :

$$A(x) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6-6x_2^2 \end{bmatrix}, \text{ alors : } B(x) = A(x) + A^T(x) = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12-12x_2^2 \end{bmatrix}. \text{ Pour } -B(x),$$

$\Delta_1 = 12$ et $\Delta_2 = 128 + 144x_2^2$, d'où $-B(x)$ est définie positive ce qui implique que $B(x)$ est définie négative et l'origine est asymptotiquement stable. De plus : $V(x) = f^T(x)f(x) = (-6x_1 + 2x_2)^2 + (2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3)^2$. Visiblement, $V(x) \rightarrow \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$, ce qui implique que l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

4.5.2 Méthode du gradient variable

Pour une fonction de Lyapunov donnée, on a : $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$. Dans cette méthode, on

suppose que c'est la forme du gradient $\frac{\partial V}{\partial x}$ qui est spécifiée. Généralement, on suppose que :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = g^T(x), \text{ où } g(x) \text{ est un vecteur colonne donné par : } g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))^T \text{ avec :}$$

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j. \text{ Notons que les paramètres de } g(x) \text{ vérifient la condition de symétrie :}$$

$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial V}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$, c'est-à-dire, $a_{ij} = a_{ji}$. Les

coefficients a_{ij} (pas forcément des constantes) sont déterminés pour que $\dot{V}(x)$ soit (semi-) définie négative. Ensuite, on détermine $V(x)$ par : $V(x) = \int_0^x g^T(y) dy = \int_0^x \sum_{i=1}^n g_i(y) dy_i$, soit :

$$V(x) = \int_0^{x_1} g_1(y_1, 0, \dots, 0) dy_1 + \int_0^{x_2} g_2(x_1, y_2, 0, \dots, 0) dy_2 + \dots + \int_0^{x_n} g_n(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n) dy_n .$$

Exemple 4.16 : Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases} , \text{ l'origine est un point d'équilibre pour ce système.}$$

Posons : $\left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^T = g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$, avec la condition $a_{12} = a_{21}$.

$$\dot{V}(x) = g^T(x) f(x) = -a_{11}x_1^2 + 2a_{11}x_1^3 x_2 - a_{12}x_1 x_2 + 2a_{12}x_1^2 x_2^2 - a_{21}x_1 x_2 - a_{22}x_2^2 .$$

Si on choisit : $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ et $a_{12} = a_{21} = 0$, il vient : $\dot{V}(x) = -(1 - 2x_1 x_2)x_1^2 - x_2^2$, si $x_1 x_2 < 1/2$, $\dot{V}(x)$ est définie négative. On a alors : $g_1(x) = x_1$ et $g_2(x) = x_2$.

$V(x) = \int_0^{x_1} y_1 dy_1 + \int_0^{x_2} y_2 dy_2 = x_1^2/2 + x_2^2/2$. Alors, $V(x)$ est définie positive et $\dot{V}(x)$ est définie négative pour $x_1 x_2 < 1/2$, ce qui implique que l'origine est asymptotiquement stable.

Exemple 4.17 : Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2 \end{cases} , \text{ l'origine est un point d'équilibre pour ce système.}$$

Posons : $\left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^T = g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$, avec la condition $a_{12} = a_{21}$.

$$\dot{V}(x) = g^T(x) f(x) = g_1(x) f_1(x) + g_2(x) f_2(x) = -a_{21}x_1^4 - (a_{22} - a_{12})x_2^2 + (a_{11} - a_{21} - a_{22}x_1^2)x_1 x_2 .$$

Si on choisit : $a_{11} = a_{21} + a_{22}x_1^2$, $a_{22} = 2$ et $a_{12} = a_{21} = 1$, il vient : $\dot{V}(x) = -x_1^4 - x_2^2$, $\dot{V}(x)$ est définie négative. On a alors : $g_1(x) = (1 + 2x_1^2)x_1 + x_2$ et $g_2(x) = x_1 + 2x_2$.

$$V(x) = \int_0^{x_1} (y_1 + 2y_1^3) dy_1 + \int_0^{x_2} (x_1 + 2y_2) dy_2 = x_1^2/2 + x_1^4/2 + x_2^2 + x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2/2 + x_1^4/2 + x_2^2/2 .$$

Alors, $V(x)$ est définie positive et radialement non bornée, et $\dot{V}(x)$ est définie négative, ce qui implique que l'origine est globalement asymptotiquement stable.

4.6 Théorèmes d'instabilité

Théorème 4.10 : Si dans une région $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, il existe une fonction continûment dérivable $V(x)$ telle que :

- $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega - \{0\}$ ($V(x)$ est définie positive dans Ω)
- $\dot{V}(0) = 0$, $\dot{V}(x) > 0$, pour tout $x \in \Omega - \{0\}$ ($\dot{V}(x)$ est définie positive dans Ω)

Alors, le point d'équilibre $x_e = 0$ du système $\dot{x} = f(x)$ est **instable**.

Théorème 4.11 : Théorème de Chetaev

Si dans une région $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, il existe une fonction continûment dérivable $V(x)$ avec une région $\Omega_1 \subset \Omega$ telle que :

- $V(x)$ et $\dot{V}(x)$ sont définies positives dans Ω_1
- Sur la frontière de Ω_1 , $V(x) = 0$
- L'origine se trouve sur la frontière de Ω_1

Alors, le point d'équilibre $x_e = 0$ du système $\dot{x} = f(x)$ est **instable**.

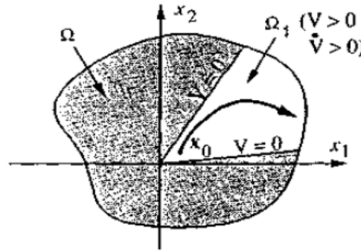


Figure 4.5 : Illustration du théorème de Chetaev.

Exemple 4.18 : Soit le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^4) \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^4) \end{cases}, \quad x_e = 0 \text{ est un point d'équilibre du système.}$$

Le modèle linéarisé autour de l'origine est donné par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_{1,2} = \pm 2j$. Alors, on ne peut pas conclure sur la stabilité de l'origine.

Considérons la fonction de Lyapunov $V(x) = x_1^2/2 + x_2^2/2$, il vient $\dot{V}(x) = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^4)$. $V(x)$ et $\dot{V}(x)$ sont définies positives, alors l'origine est instable.

Exemple 4.19 : Soit le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2^2 x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2 x_2 \end{cases}, \quad x_e = 0 \text{ est un point d'équilibre du système.}$$

Considérons la fonction $V(x) = x_1^2 - x_2^2$. $\dot{V}(x) = 2(x_1^2 + x_2^2)$. $V(x) > 0 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2$, alors $\Omega_1 = \{x \mid x_1^2 > x_2^2\}$. Dans la région Ω_1 , les conditions du théorème de Chetaev sont satisfaites, alors l'origine est instable.

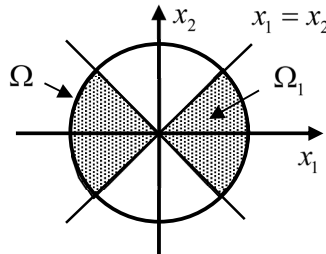


Figure 4.6 : Ensemble Ω_1 pour $V(x) = x_1^2 - x_2^2$.

Exemple 4.20 : Soit le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_1 x_2 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^2 \end{cases}, \quad x_e = 0 \text{ est un point d'équilibre du système.}$$

Considérons la fonction $V(x) = x_1 x_2$. $\dot{V}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$. $V(x) > 0 \Rightarrow x_1 x_2 > 0$, alors $\Omega_1 = \{x \mid x_1 x_2 > 0\}$. Dans la région Ω_1 , les conditions du théorème de Chetaev sont satisfaites, alors l'origine est instable.

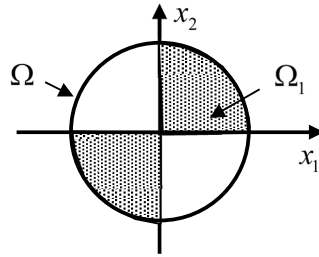


Figure 4.7 : Ensemble Ω_1 pour $V(x) = x_1 x_2$.

Passivité et stabilité absolue

5.1 Passivité

La passivité est une propriété des systèmes qui caractérise leur capacité à dissiper ou à stocker de l'énergie sans en générer. Un système passif ne peut en aucun cas fournir plus d'énergie qu'il n'en reçoit. Cette propriété est couramment observée dans des systèmes physiques tels que les circuits électriques, les systèmes mécaniques et les systèmes thermodynamiques. Elle revêt une importance particulière en ce qui concerne la stabilité et la commande des systèmes.

Un système est dit passif si, dans son comportement dynamique, il ne génère pas d'énergie. En d'autres termes, l'énergie fournie à un tel système ne peut être que dissipée ou conservée, mais jamais amplifiée. Cela se traduit par l'absence de production nette d'énergie.

Il existe différentes façons de formuler la passivité, mais une définition classique repose sur l'idée de l'énergie stockée et de l'énergie dissipée.

5.1.1 Passivité des systèmes statiques

Un système statique avec une entrée u et une sortie $y : y = h(u)$, est :

- Passive si : $u y \geq 0$
- Strictement passif par rapport à l'entrée si : $u y \geq u \varphi(u)$, $u \varphi(u) > 0, \forall u \neq 0$
- Strictement passif par rapport à la sortie si : $u y \geq y \psi(y)$, $y \psi(y) > 0, \forall y \neq 0$

Il convient de souligner qu'une fonction statique est passive si son graphe se situe dans les premier et troisième quadrants.

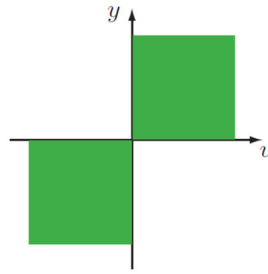


Figure.5.1 : La caractéristique statique doit appartenir au secteur représenté en vert

Exemple 5.1 : La fonction statique $y = h(u) = u + u^3$ est strictement passif par rapport à l'entrée car : $u y = u^2 + u^4 \Rightarrow u y \geq u^2$. La fonction statique $y = h(u) = \frac{u}{1+|u|}$ est strictement passif par rapport à la sortie car : $u y = u \frac{u}{1+|u|} \geq \frac{u}{1+|u|} \frac{u}{1+|u|} \Rightarrow u y \geq y^2$.

5.1.2 Passivité des systèmes dynamiques

Le système non linéaire : $\dot{x} = f(x, u)$, $y = h(x, u)$ est passif s'il existe une fonction $V(x)$ continuellement différentiable et semi-définie positive (appelée fonction de stockage) telle que :

$$u y \geq \dot{V} = \frac{\partial f}{\partial x} f(x, u), \quad \forall (x, u)$$

De plus, le système est :

- Strictement passif par rapport à l'entrée si : $u y \geq \dot{V} + u \varphi(u)$, $u \varphi(u) > 0, \forall u \neq 0$
- Strictement passif par rapport à la sortie si : $u y \geq \dot{V} + y \psi(y)$, $y \psi(y) > 0, \forall y \neq 0$
- Strictement passif par rapport à l'état si : $u y \geq \dot{V} + \rho(x)$, $\rho(0) = 0, \rho(x) > 0, \forall x \neq 0$

Il est à noter qu'il est préférable de formuler la condition de passivité comme suit :

$\dot{V} \leq u y - u \varphi(u) - y \psi(y) - \rho(x)$, $u \varphi(u), y \psi(y), \rho(x)$ sont des fonctions définies positives.

- Strictement passif par rapport à l'entrée si : $\dot{V} \leq u y - u \varphi(u)$, $u \varphi(u) > 0, \forall u \neq 0$
- Strictement passif par rapport à la sortie si : $\dot{V} \leq u y - y \psi(y)$, $y \psi(y) > 0, \forall y \neq 0$
- Strictement passif par rapport à l'état si : $\dot{V} \leq u y - \rho(x)$, $\rho(0) = 0, \rho(x) > 0, \forall x \neq 0$

Exemple 5.2 : Circuit RLC avec entrée u (tension d'alimentation) et sortie y (le courant)

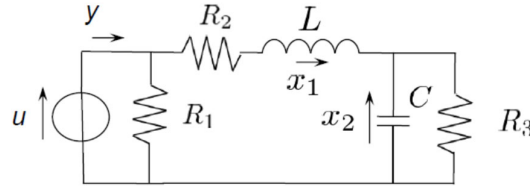


Figure 5.2 : Circuit RLC

$$\begin{cases} L \dot{x}_1 = u - R_2 x_1 - x_2 \\ C \dot{x}_2 = x_1 - \frac{1}{R_3} x_2 \end{cases}, \quad y = x_1 + \frac{1}{R_1} u$$

L'énergie stockée dans le circuit (fonction de stockage) :

$$V(x) = \frac{1}{2} L x_1^2 + \frac{1}{2} C x_2^2$$

Sa dérivée le long des trajectoires du système est donnée par :

$$\dot{V}(x) = L x_1 \dot{x}_1 + C x_2 \dot{x}_2 = u x_1 - R_2 x_1^2 - \frac{1}{R_3} x_2^2 = u y - \frac{1}{R_1} u^2 - R_2 x_1^2 - \frac{1}{R_3} x_2^2$$

$$\text{Il vient alors : } u y = \dot{V}(x) + \frac{1}{R_1} u^2 + R_2 x_1^2 + \frac{1}{R_3} x_2^2$$

Il n'est donc pas surprenant que nous ayons : $u y \geq \dot{V}(x)$. Autrement dit, l'énergie stockée dans le circuit RLC est toujours inférieure ou égale à l'énergie apportée à son entrée (le circuit étant passif, sans génération d'énergie). De plus, le circuit est strictement passif par rapport à l'entrée car : $u y \geq \dot{V}(x) + \frac{1}{R_1} u^2$, et strictement passif par rapport à l'état car : $u y \geq \dot{V}(x) + R_2 x_1^2 + \frac{1}{R_3} x_2^2$.

Exemple 5.3 : On considère le système : $\dot{x} = -x + u, y = x^3$. Soit $V(x) = \frac{1}{4} x^4$,

$\dot{V} = x^3 \dot{x} = -x^4 + u x^3 = u y - x^4 \Rightarrow u y = \dot{V} + x^4 \Rightarrow \dot{V} + y \sqrt[3]{y}$, alors ce système est strictement passif par rapport à la sortie.

Remarque 5.1 : La connexion en rétroaction ou en parallèle de deux systèmes passifs préserve la passivité.

5.1.3 Passivité des système linéaires monovariables

Pour les systèmes linéaires invariants dans le temps, la passivité peut être caractérisée en termes de la fonction de transfert $G(s)$, où s est la variable de Laplace. Les conditions de passivités sont les suivantes :

- Si $G(s)$ est réelle positive, alors le système correspondant est passif.
- Si $G(s)$ est strictement réelle positive (SPR), alors le système est strictement passif par rapport à l'état.

Une fonction de transfert $G(s)$ dont tous les pôles ont une partie réelle strictement négative est

- Réelle positive si : $\operatorname{Re}[G(j\omega)] \geq 0, \forall \omega \geq 0$.
- Strictement réelle positive si : $G(s - \varepsilon)$ est réelle positive pour certaines valeurs de $\varepsilon > 0$.

Théorème de Kalman-Yakubovich-Popov

Soit une fonction de transfert : $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ avec (A, B) commandable et (A, C) observable. $G(s)$ est strictement réelle positive (SPR) si et seulement s'il existe des matrices $P = P^T > 0$ et $Q = Q^T > 0$ telles que $A^T P + P A = -Q$, $P B = C^T$.

5.2 Stabilité absolue

Dans cette partie on étudie le problème de stabilité des systèmes asservis non linéaires ayant la structure de la Figure 5.1. Le système asservi contient un élément linéaire dans la chaîne directe et une non-linéarité statique dans la chaîne de retour. Le système linéaire possède la représentation d'état suivante : $\dot{x} = Ax + bu$ et $y = c^T x$. La fonction de transfert correspondante est : $H(s) = c^T (sI - A)^{-1} b$.

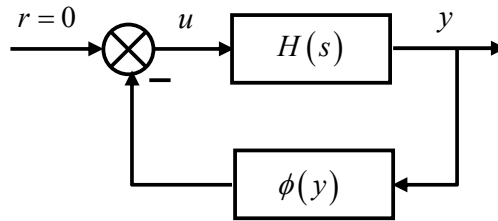


Figure 5.3 : Schéma bloc d'un système linéaire bouclé par une non-linéarité statique.

Cette classe de systèmes a déjà fait l'objet de l'étude par la méthode du premier harmonique. Trois différences essentielles vont apparaître entre les deux traitements :

- La non-linéarité statique $\phi(y)$ appartient à un secteur.
- La stabilité d'un point d'équilibre sera exclusivement traitée.
- Les résultats ne seront pas approximatifs mais exacts.

5.2.2 Non-linéarité statique de secteur

Une non-linéarité $\phi(y)$ est une non-linéarité de type secteur $[k_1, k_2]$ (ou appartient au secteur $[k_1, k_2]$) si : $k_1 y^2 \leq y\phi(y) \leq k_2 y^2$ ou $k_1 \leq \phi(y)/y \leq k_2$ pour $y \neq 0$.

Remarque 5.2 : La condition de secteur implique $\phi(0) = 0$ et $y\phi(y) \geq 0$.

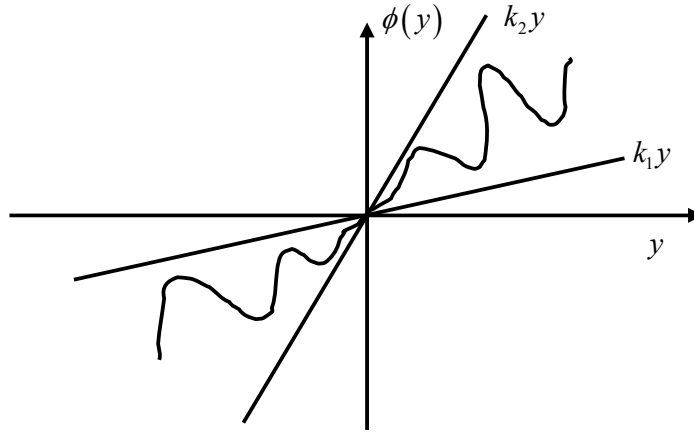


Figure 5.4 : Exemple de non-linéarité de type secteur.

5.2.3 Stabilité absolue

Un système linéaire $\dot{x} = Ax + bu$ avec $y = c^T x$ est dit stable de manière absolue (ou absolument stable) vis-à-vis de la non-linéarité ϕ de secteur $[k_1, k_2]$, si le système bouclé avec $u = -\phi(y)$ est globalement asymptotiquement stable pour toute non-linéarité ϕ appartenant au secteur $[k_1, k_2]$.

Alors, le problème de la stabilité absolue consiste à déterminer des conditions sur le système linéaire $H(s)$ (ou sur (A, b, c)), et à déterminer les gains k_1 et k_2 pour que le système asservi non linéaire soit absolument stable.

5.2.4 Conjectures

Conjecture d'Aizerman (1949) : Si pour tout $k \in [k_1, k_2]$, la matrice $A - bc^T k$ est stable (valeurs propres à partie réelle strictement négative), alors le système asservi non linéaire de la figure 5.1 est globalement asymptotiquement stable pour $\phi \in [k_1, k_2]$.

Conjecture de Kalman (1957) : Si la non-linéarité vérifie : $k_1 \leq \partial\phi(y)/\partial y \leq k_2$ et que la matrice $A - bc^T k$ est stable pour tout $k \in [k_1, k_2]$, alors le système asservi non linéaire de la figure 5.1 est globalement asymptotiquement stable.

De nombreux contre-exemples ont montré que ces deux conjectures sont fausses.

5.2.5 Critère de Popov (1960)

Le système asservi non linéaire de la Figure 5.1 est absolument stable si :

- La non-linéarité $\phi \in [0, k]$, $k > 0$
- $H(s)$ est strictement stable (tous les pôles de $H(s)$ sont à partie réelle strictement négative)
- Il existe $\alpha > 0$ tel que : $\text{Re}[H(j\omega)] - \alpha \omega \text{Im}[H(j\omega)] + \frac{1}{k} > 0, \forall \omega \geq 0$.

Interprétation graphique : On définit dans le plan complexe le tracé de Popov P par :

$$P(j\omega) = \operatorname{Re}[H(j\omega)] + j\omega \operatorname{Im}[H(j\omega)], \quad \omega \geq 0.$$

Graphiquement, le critère de Popov signifie que le tracé de Popov de la fonction de transfert $H(j\omega)$ demeure à droite de la droite définie par l'équation : $x - \alpha y + 1/k = 0$.

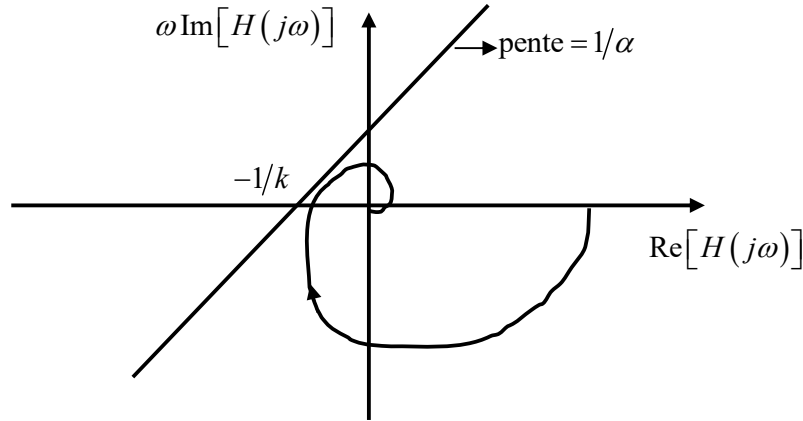


Figure 5.5 : Tracé de popov.

Exemple 5.4 :

Soit $H(s) = \frac{s+3}{s^2+7s+10}$ et $\phi \in [0, k]$. $H(s)$ est strictement stable et :

$$H(j\omega) = H_1(\omega) + jH_2(\omega), \quad H_1(\omega) = \frac{30+4\omega^2}{(10-\omega^2)^2+49\omega^2}, \quad H_2(\omega) = \frac{-\omega(11+\omega^2)}{(10-\omega^2)^2+49\omega^2}.$$

D'où le tracé de Popov de $H(j\omega)$ de la Figure 5.4. Dans ce cas, on peut prendre n'importe quel réel $\alpha > 0$ tel que la droite $x - \alpha y + 1/k = 0$ soit en dessus du tracé de Popov de $H(j\omega)$.

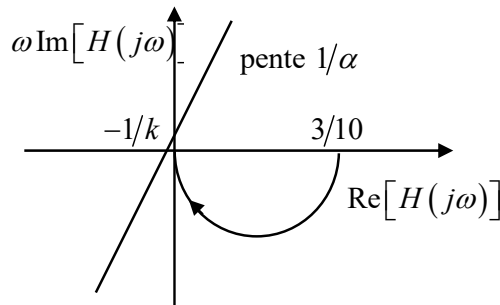


Figure 5.6 : Tracé de Popov de $H(j\omega)$

Remarque 5.3 : Si la non-linéarité $\phi \in [k_1, k_2]$ il est possible d'appliquer le critère de Popov. L'idée consiste à transformer la boucle du système asservi de telle sorte à remplir les conditions d'utilisation du critère de Popov.

Avec cette transformation on obtient : $\phi \in [k_1, k_2] \Rightarrow \bar{\phi} \in [0, k_2 - k_1]$ et $\bar{H}(s) = H(s)/(1 + k_1 H(s))$. On peut alors utiliser le critère de Popov pour $\bar{H}(s)$ et $\bar{\phi}(y)$.

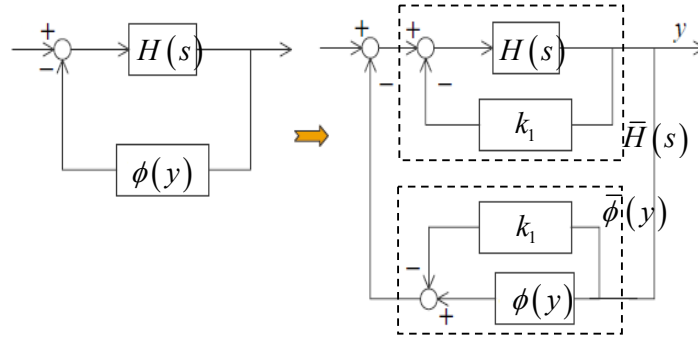


Figure 5.7 : Transformation de la boucle fermée

5.2.6 Critère du cercle

Le système asservi non linéaire de la Figure 5.1 avec la non-linéarité $\phi \in [k_1, k_2]$ est absolument stable si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- 1). Si $0 < k_1 < k_2$, le tracé du lieu Nyquist de $H(j\omega)$ ($-\infty < \omega < \infty$) ne rentre pas dans le disque $D(k_1, k_2)$ et l'encercle ρ fois dans le sens trigonométrique, où ρ est le nombre des pôles instables de $H(s)$.
- 2). Si $0 = k_1 < k_2$, $H(s)$ est strictement stable et le tracé du lieu Nyquist de $H(j\omega)$ se trouve à droite de la ligne verticale définie par $\text{Re}[s] = -1/k_2$.
- 3). Si $k_1 < 0 < k_2$, $H(s)$ est strictement stable et le tracé du lieu Nyquist de $H(j\omega)$ reste à l'intérieur du disque $D(k_1, k_2)$.

Remarque 5.4 :

- Le critère du cercle peut être étendu au cas des systèmes non autonomes.
- Si la condition du secteur est vérifiée seulement dans un intervalle $[a, b]$, alors le système asservi non linéaire est localement asymptotiquement stable dans une région finie.

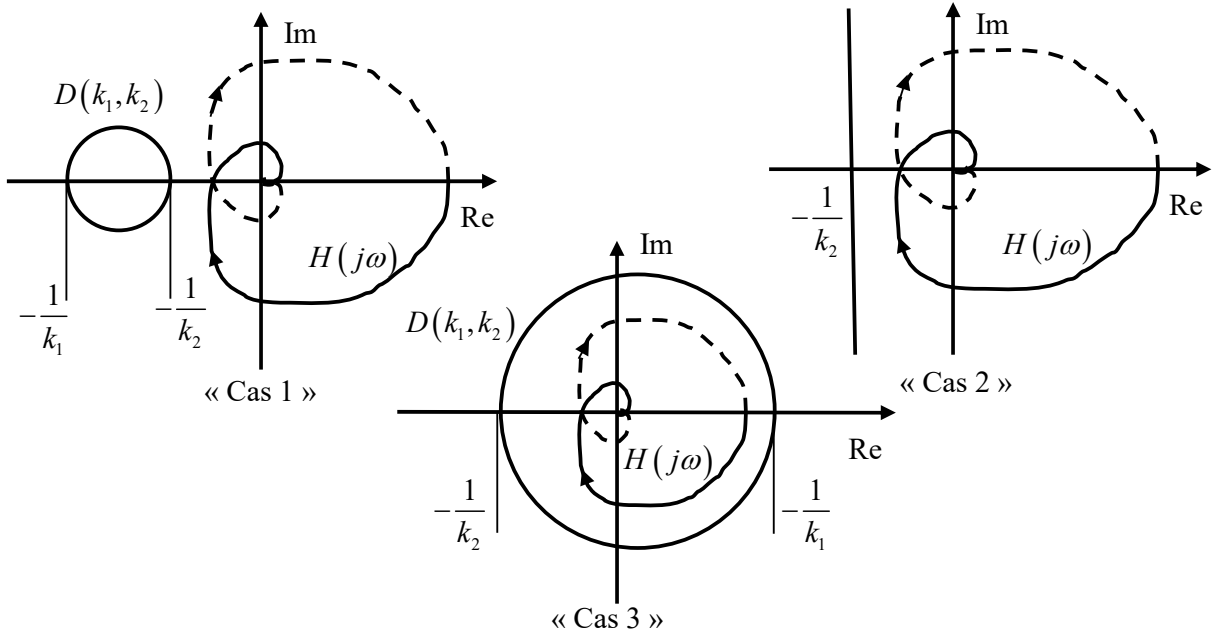
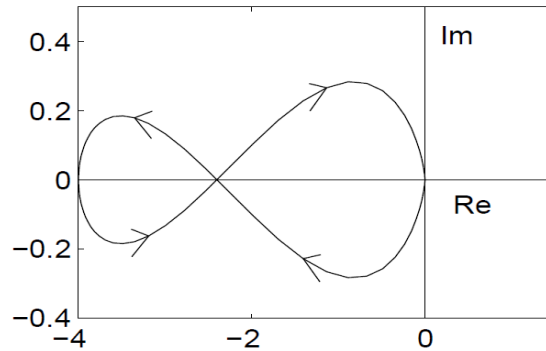


Figure 5.8 : Illustration du critère du cercle.

Exemple 5.5 :

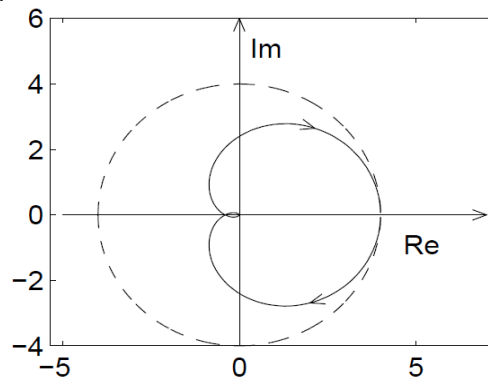
Soit $H(s) = \frac{4}{(s-1)(1+s/2)(1+s/3)}$. La fonction de transfert $H(s)$ possède un pôle instable, alors on doit utiliser le premier cas du critère du cercle pour déterminer $0 < k_1 < k_2$. Le lieu de Nyquist de $H(j\omega)$ est montré en figure 5.7. L'inspection du lieu de Nyquist montre que pour avoir la stabilité absolue, le disque $D(k_1, k_2)$ doit être à l'intérieur du lobe gauche. Car, avec ce choix, le disque est encerclé une fois dans le sens trigonométrique et qui est égal au nombre de pôle instable de $H(s)$. Le disque sera centré à $(-3.2, 0)$ avec un rayon de 0.168. Alors, on obtient $k_1 = 0.2969$ et $k_2 = 0.3298$.

**Figure 5.9 :** Lieu de Nyquist de $H(j\omega)$ **Exemple 5.6 :**

Soit $H(s) = \frac{4}{(s+1)(1+s/2)(1+s/3)}$. La fonction de transfert $H(s)$ est strictement stable. Le lieu de Nyquist de $H(j\omega)$ est montré en figure 5.8.

En appliquant le troisième cas du critère du cercle avec un disque centré à $(0, 0)$ et un rayon de 4, on obtient le secteur $[-0.25, 0.25]$. Si le centre du disque est choisi à $(1.5, 0)$, le secteur sera $[-0.227, 0.714]$.

Par application du deuxième cas, puisque le lieu de Nyquist est à droite de $\text{Re}[s] = -0.857$, on obtient le secteur $[0, 1.166]$.

**Figure 5.10 :** Lieu de Nyquist de $H(j\omega)$

Commande des systèmes non linéaires

6.1 Introduction

Ce chapitre présente les approches couramment utilisées pour la synthèse des lois de commande des systèmes non linéaires. Les méthodes abordées incluent principalement :

- La linéarisation locale autour d'un point de fonctionnement,
- La linéarisation par bouclage, notamment la linéarisation entrée-état et entrée-sortie,
- La commande par backstepping,
- La commande par mode de glissement.

Deux catégories de problèmes de commande peuvent être identifiées :

- La stabilisation, qui consiste à maintenir le système autour d'un point d'équilibre à l'aide d'une loi de commande appropriée,
- La poursuite, qui consiste à définir une loi de commande permettant au système (état ou sortie) de suivre une trajectoire prédéfinie.

6.2 Notions de géométrie différentielle

Champ de vecteur : on appelle champ de vecteurs une fonction $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donnée par :

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Gradient : Pour une fonction scalaire $h(x_1, \dots, x_n) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, le gradient est défini par :

$$\nabla h = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right) \text{ (vecteur ligne).}$$

Jacobien : Le Jacobien (ou matrice Jacobienne) d'un champ de vecteurs $f(x)$ est donné par :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ (matrice } n \times n \text{).}$$

Difféomorphisme : Une fonction $\phi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme si son inverse ϕ^{-1} existe, et $\phi(x)$ et $\phi^{-1}(x)$ sont continûment dérivables.

Remarque 6.1 : $\phi(x)$ est un difféomorphisme si et seulement si $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ est inversible pour tout $x \in \Omega$. Si $\Omega \equiv \mathbb{R}^n$ est $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|\phi(x)\| = \infty$, on parle de difféomorphisme global.

Exemple 6.1 : Soit $\phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$, on a $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 & 2x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = 1 \neq 0$, alors $\phi(x)$ est un difféomorphisme.

Remarque 6.2 : (Transformation d'état, Changement de coordonnées) Une fonction $T(x) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite une transformation d'état si $T(x)$ est un difféomorphisme.

Exemple 6.2 : $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 \\ x_2 \end{pmatrix} = T(x)$ est une transformation d'état sur $\mathbb{R}^2$ puisque $T(x)$ est un difféomorphisme.

Dérivée de Lie : Soit une fonction scalaire $h(x)$ et un champ de vecteurs $f(x)$, la dérivée de Lie de $h(x)$ par rapport à $f(x)$ ou le long de $f(x)$, est une fonction scalaire donnée par :

$$L_f h(x) = \nabla h \cdot f = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i(x)$$

Les dérivées de Lie d'ordre supérieur sont données par :

$$\begin{cases} L_f^0 h = h \\ L_f^i h = L_f(L_f^{i-1} h) = \nabla(L_f^{i-1} h) \cdot f, \quad i \geq 1 \end{cases}$$

Exemple 6.3 : Soit la fonction scalaire $h(x) = x_1^2 + x_1 x_2$, le champ de vecteurs $f(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ -x_2 \cos(x_1) \end{pmatrix}$. Le gradient de $h(x)$ est : $\nabla h = (2x_1 + x_2 \quad x_1)$. Le Jacobien de $f(x)$ est :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ x_2 \sin(x_1) & -\cos(x_1) \end{pmatrix}. \text{ La dérivée de Lie :}$$

$$L_f h(x) = \nabla h \cdot f = \frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} f_2 = (2x_1 + x_2)(-2x_1 + x_2) - x_1 x_2 \cos(x_1) = -4x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 \cos(x_1)$$

Crochet de Lie : Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux champs de vecteurs. Le crochet de Lie entre f et g est un champ de vecteurs défini par

$$[f, g](x) = \text{ad}_f g(x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) = \nabla g \cdot f - \nabla f \cdot g, \quad (\text{ad pour adjoint})$$

$$\text{Notation : } \text{ad}_f^0 g(x) = g(x), \quad \text{ad}_f g(x) = [f, g](x), \quad \text{ad}_f^k g(x) = [f, \text{ad}_f^{k-1} g](x), k \geq 1$$

Propriétés du crochet de Lie :

- $[f, g] = -[g, f]$
- $[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g] = \alpha_1 [f_1, g] + \alpha_2 [f_2, g]$
- $[f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2] = \alpha_1 [f, g_1] + \alpha_2 [f, g_2]$
- $[f, g] = 0$ si $f(x)$ et $g(x)$ sont des champs de vecteurs constants.

Exemple 6.4 : Soient les deux champs de vecteurs $f(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ x_1^2 - x_2 \end{pmatrix}$ et $g(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\text{ad}_f g = [f, g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ x_1^2 - x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2x_1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - 1 \\ -2x_1^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ad}_f^2 g = [f, \text{ad}_f g] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4x_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ x_1^2 - x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2x_1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - 1 \\ -2x_1^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + x_2 - 3 \\ 6x_1^2 - 6x_1 x_2 + 2x_1 + 1 \end{pmatrix}$$

Distribution : Pour les champs de vecteurs $f_1, \dots, f_k$ définis sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. L'ensemble des espaces vectoriels $\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$ pour $x \in \Omega$ est appelé une distribution. Si

$\dim(\Delta(x)) = \text{rang}(f_1, \dots, f_k) = k, \forall x \in \Omega$, alors Δ est une distribution non singulière. Si Δ est une distribution non singulière générée par $f_1, \dots, f_k$, alors elle est involutive si et seulement si : $[f_i, f_j] \in \Delta, \forall 1 \leq i, j \leq k$, i.e. $\text{rang}(f_1, \dots, f_k, [f_i, f_j]) = k$.

Exemple 6.5 : Soient les deux champs de vecteurs $f_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ définis sur

$\mathbb{R}^3$ et $\Delta = \text{span}\{f_1, f_2\}$. On a : $\dim(\Delta) = 2, \forall x \in \mathbb{R}^3$

$$[f_1, f_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [f_1, f_2] = 0 f_1(x) + 0 f_2(x) \Rightarrow [f_1, f_2] \in \Delta$$

(ou $\text{rang}(f_1 \quad f_2 \quad [f_1, f_2]) = \text{rang} \begin{pmatrix} 2x_3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$), alors, Δ est une distribution involutive.

6.3 Linéarisation locale et stabilisation

Une approche courante consiste à linéariser la dynamique non linéaire du système par une approximation du premier ordre autour d'un point de fonctionnement donné, ce qui permet l'utilisation des outils de la commande linéaire pour la conception d'une loi de commande. Toutefois, cette méthode est valable uniquement de manière locale autour du point de fonctionnement choisi.

Soit le système non linéaire suivant : $\dot{x} = f(x, u)$ avec le point de fonctionnement (x_e, u_e) qui vérifie $f(x_e, u_e) = 0$. Si $u_e = 0$, on parle de point d'équilibre. Le système linéarisé autour de ce point de fonctionnement est donné par : $\dot{x}_\delta = Ax_\delta + Bu_\delta$ où $x_\delta = x - x_e$, $u_\delta = u - u_e$,

$$A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{(x=x_e, u=u_e)}, \quad B = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{(x=x_e, u=u_e)}.$$

Si la paire (A, B) est commandable (ou au moins stabilisable, i.e., les modes non commandables sont stables), on peut calculer un retour d'état de la forme : $u_\delta = -Kx_\delta$ par la méthode d'imposition des pôles par exemple.

Exemple 6.6 : Soit le modèle d'un pendule

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a \sin(x_1) - bx_2 + cu \end{cases}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad x_1 = \theta, \quad \dot{x}_1 = \dot{\theta}.$$

Objectif : Stabiliser le pendule à $\theta = \bar{\theta}$. Alors, $x_1 = \theta \Rightarrow x_{1e} = \bar{\theta}$, d'où il vient :

$$\begin{cases} \dot{x}_{1e} = x_{2e} = 0 \\ \dot{x}_{2e} = -a \sin(x_{1e}) - bx_{2e} + cu_e = 0 \end{cases} \Rightarrow x_{1e} = \bar{\theta}, \quad x_{2e} = 0, \quad u_e = \frac{a}{c} \sin(\bar{\theta}).$$

Le système linéarisé autour de ce point de fonctionnement est donné par :

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta + Bu_\delta, \quad x_\delta = x - x_e, \quad u_\delta = u - u_e$$

$$A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{(x=x_e, u=u_e)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos(x_1) & -b \end{pmatrix}_{(x=x_e, u=u_e)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos(\bar{\theta}) & -b \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \bigg|_{(x=x_e, u=u_e)} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

La paire (A, B) est commandable, si on choisit alors une loi de commande linéaire de la forme :

$u_\delta = -Kx_\delta$ où $K = [k_1 \ k_2]$, le système bouclé s'écrit : $\dot{x}_\delta = (A - BK)x_\delta$ où

$$A - BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(a \cos(\bar{\theta}) + ck_1) & -(b + ck_2) \end{pmatrix}. \text{ Les gains } k_1 \text{ et } k_2 \text{ peuvent être calculés par la}$$

méthode d'imposition des pôles. Si on impose au système bouclé les pôles p_1 et p_2 , on obtient :

$$\det(sI - (A - BK)) = (s - p_1)(s - p_2) = s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1p_2, \quad \text{d'où il vient :}$$

$$a \cos(\bar{\theta}) + ck_1 = p_1p_2 \text{ et } b + ck_2 = -(p_1 + p_2), \text{ ce qui donne : } k_1 = (1/c)(p_1p_2 - a \cos(\bar{\theta})) \text{ et}$$

$$k_2 = -(1/c)(p_1 + p_2 + b).$$

La loi de commande finale est donnée par : $u = u_e - k_1(x_1 - \bar{\theta}) - k_2x_2$.

6.4 Linéarisation par bouclage

La linéarisation (exacte) par bouclage statique est une méthode employée dans la synthèse des lois de commande pour les systèmes non linéaires. Cette approche vise à transformer un système non linéaire en un système linéaire équivalent à travers un choix approprié de transformation d'état (changement de coordonnées) et de bouclage statique (retour d'état non linéaire, transformation de l'entrée). Suite à cette linéarisation, il est possible d'appliquer les techniques de synthèse des lois de commande des systèmes linéaires pour atteindre les objectifs de commande en poursuite ou en régulation. Deux types de linéarisation par bouclage peuvent être distingués :

- Linéarisation entrée-état : Cette méthode consiste en une linéarisation exacte de l'ensemble de l'état, impliquant à la fois un changement de coordonnées et un bouclage (retour d'état non linéaire).
- Linéarisation entrée-sortie : Cette technique se limite à la linéarisation du comportement entrée-sortie du système. Elle peut garantir un comportement linéaire pour une partie ou pour l'ensemble de l'espace d'état.

Dans le cadre de ce cours, nous nous intéressons à la classe des systèmes non linéaires monovariabiles, où la dynamique est affine en l'entrée, définis par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

6.4.1 Linéarisation entrée-état

Cette approche explore la possibilité de linéariser un système non linéaire par l'application d'un changement de coordonnées (transformation d'état) et d'une loi de commande par retour d'état statique non linéaire. Plus précisément, un système non linéaire : $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ est dit

linéarisable entrée-état s'il existe un difféomorphisme (transformation d'état) $z = T(x)$ permettant de ramener le système non linéaire à la forme suivante : $\dot{z} = Az + B(\beta(x)u + \alpha(x))$,

avec la paire (A, B) commandable, $\alpha(x), \beta(x)$ fonctions non linéaires avec $\beta(x)$ inversible.

Ensuite, par l'introduction d'une loi de commande par retour d'état non linéaire :

$$\beta(x)u + \alpha(x) = v \Rightarrow u = \beta(x)^{-1}(v - \alpha(x)), \text{ le système non linéaire est transformé à la forme}$$

linéaire suivante : $\dot{z} = Az + Bv$, où v est la nouvelle entrée de commande. Le système linéaire équivalent peut être écrit sous la forme : $z_1^{(n)} = v$. La matrice A et le vecteur B sont donnés

$$\text{par : } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Conditions pour la linéarisation entrée-état :

Le système $\dot{x} = f(x) + g(x)u$, $x \in \mathbb{R}^n$ est linéarisable entrée-état sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- Rang de la matrice $[g(x), ad_f g(x), \dots, ad_f^{n-1} g(x)]$ est égale à n , $\forall x \in \Omega$.
- La distribution $\Delta = \{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\}$ est involutive, $\forall x \in \Omega$.

Remarque 6.3 : La première condition peut être interprétée comme une condition de commandabilité pour le système non linéaire. En revanche, la deuxième condition d'involutivité est moins intuitive. Elle est systématiquement satisfaite pour les systèmes linéaires, mais ne l'est pas nécessairement pour les systèmes non linéaires. En réalité, la condition d'involutivité permet de définir une transformation d'état qui est essentielle à la réalisation de la linéarisation entrée-état.

Remarque 6.4 : Si les deux conditions sont remplies, il convient de déterminer la fonction de sortie $y_n = h(x)$ (qui permettra la linéarisation entrée-état) en résolvant les équations :

$$\begin{cases} \nabla h [g \quad ad_f g \quad \cdots \quad ad_f^{n-2} g] = 0 \\ \nabla h ad_f^{n-1} g \neq 0 \end{cases}. \quad \text{La transformation d'état est donnée par :}$$

$$z = T(x) = \begin{pmatrix} L_f^0 h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix}.$$

Exemple 6.7 : On considère le modèle d'un pendule

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -a \sin(x_1) - bx_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} u = f(x) + g(x)u, \quad a > 0, b > 0, c > 0, \quad x_1 = \theta, \quad \dot{x}_1 = \dot{\theta}.$$

$$ad_f g = [f, g] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ -a \sin(x_1) - bx_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos(x_1) & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ bc \end{pmatrix}$$

Nous pouvons maintenant construire la matrice de commandabilité à partir des champs de vecteurs calculés : $G = [g, ad_f g] = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & bc \end{pmatrix}$. On a $\det(G) = -c^2 \neq 0$, alors $\text{rang}(G) = 2$.

La distribution $\Delta = \text{span}\{g\}$ est involutive.

Les conditions nécessaires étant satisfaites, le système est donc linéarisable entrée-état.

6.4.2 Linéarisation entrée-sortie

Cette approche permet de linéariser le comportement entrée-sortie d'un système non linéaire en effectuant un changement de coordonnées et en sélectionnant un bouclage statique approprié (retour d'état non linéaire). Pour ce faire, dans le cadre d'un système non linéaire d'ordre n donné par : $\dot{x} = f(x) + g(x)u$; $y = h(x)$, la sortie y du système est dérivée à plusieurs reprises jusqu'à ce que l'entrée de commande apparaisse dans la dérivée d'ordre r . Par la suite, cette entrée de commande est utilisée pour établir une relation linéaire sous la forme : $y^{(r)} = v$, où v représente une nouvelle entrée de commande et r désigne le **degré relatif** du système. Lorsque $r = n$, une linéarisation complète de la dynamique du système est obtenue, tandis que pour $r < n$, une linéarisation partielle de la dynamique du système est réalisée. Dans ce dernier cas, il y aura une dynamique interne, également appelée dynamique des zéros.

Remarque 6.5 : Dans le cas où $r = n$, on a : Linéarisation E/S $\equiv$ Linéarisation E/E.

Remarque 6.6 : Une autre condition équivalente pour la linéarisation entrée-état est l'existence d'une fonction (nouvelle sortie) $y_n = h_n(x)$ telle que le système soit linéarisable entrée-sortie avec un degré relatif $r = n$.

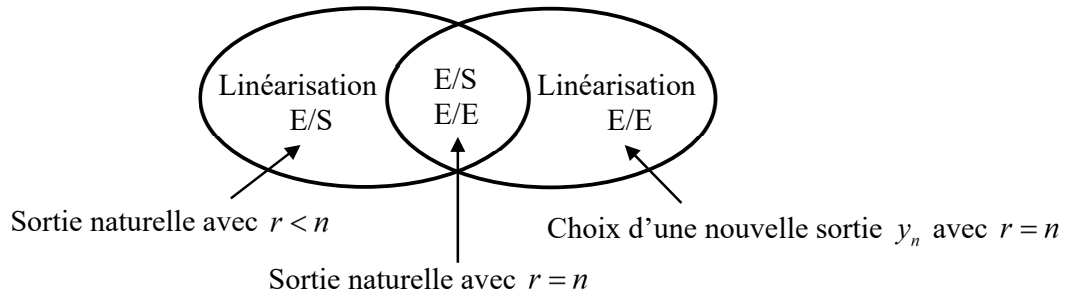


Figure 6.1 : Linéarisation entrée/sortie et entrée/état

6.4.3 Procédure de linéarisation entrée-sortie

Considérons le système :
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}$$

- 1). Dériver la sortie y jusqu'à l'apparition de l'entrée u ;

$$y = h(x),$$

$$\dot{y} = L_f h(x), \quad L_g h(x) = 0$$

$$\ddot{y} = L_f^2 h(x), \quad L_g L_f h(x) = 0, \dots,$$

$$y^{(r-1)} = L_f^{r-1} h(x), \quad L_g L_f^{r-2} h(x) = 0,$$

$$y^{(r)} = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x)u, \quad L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$$

Alors, le degré relatif du système est égal à r .

- 2). Si le degré relatif $r < n$, vérifier la stabilité asymptotique de la dynamique des zéros.

- 3). Choisir une loi de commande linéarisante de la forme : $u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} (-L_f^r h(x) + v)$. On

obtient ainsi le modèle linéaire (chaîne d'intégrateurs) : $y^{(r)} = v$

4). Suivant les objectifs de commande, pour calculer la loi de commande linéaire v du système : $y^{(r)} = v$, on peut utiliser tous les outils de synthèse des systèmes linéaires.

Exemple 6.8 : Soit le système non linéaire $\dot{x} = \cos(x) - x^3 + (1+x^2)u$. Le choix d'un retour d'état non linéaire de la forme : $u = \frac{1}{(1+x^2)}(-\cos(x) + x^3 + v)$ donne le système linéaire : $\dot{x} = v$

Exemple 6.9 : Soit le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3 - x_2 + u \end{cases}, y = x_1$$

$y = x_1 \Rightarrow \dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 \Rightarrow \ddot{y} = \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3 - x_2 + u$, alors le degré relatif du système est $r = 2 = n$.

Si on choisit : $-x_1 - x_2^3 - x_2 + u = v$, c'est-à-dire : $u = -(-x_1 - x_2^3 - x_2) + v$, on obtient le système linéaire : $\ddot{y} = v$.

Exemple 6.10 : Soit le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = \alpha(x) + \beta(x)u \end{cases}, \beta(x) \neq 0, \forall x, y = x_1$$

$y = x_1 \Rightarrow \dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 + x_1^2 \Rightarrow \ddot{y} = \dot{x}_2 + 2x_1\dot{x}_1 = x_3 + 2x_1(x_2 + x_1^2) \Rightarrow y^{(3)} = \dot{x}_3 + 2(x_2 + 3x_1^2)\dot{x}_1 + 2x_1\dot{x}_2$

$y^{(3)} = \alpha(x) + 2(x_2 + 3x_1^2)(x_2 + x_1^2) + 2x_1x_3 + \beta(x)u$. Le degré relatif du system est $r = 3 = n$.

Si on choisit : $\alpha(x) + 2(x_2 + 3x_1^2)(x_2 + x_1^2) + 2x_1x_3 + \beta(x)u = v$, c'est-à-dire :

$u = \frac{1}{\beta(x)}(-(\alpha(x) + 2(x_2 + 3x_1^2)(x_2 + x_1^2) + 2x_1x_3) + v)$, on obtient le système linéaire :

$y^{(3)} = v$.

Exemple 6.11 : $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3 \sin(x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 - x_2 + u \end{cases}, y = x_1$

$y = x_1 \Rightarrow \dot{y} = \dot{x}_1 = 3 \sin(x_2) \Rightarrow \ddot{y} = 3 \cos(x_2)\dot{x}_2 = 3 \cos(x_2)(-x_1^2 - x_2 + u)$, alors le degré relatif du système est $r = 2 = n$. Si on choisit : $3 \cos(x_2)(-x_1^2 - x_2 + u) = v$, c'est-à-dire :

$u = x_1^2 + x_2 + \frac{v}{3 \cos(x_2)}$ avec $|x_2| < \frac{\pi}{2}$, on obtient le système linéaire : $\ddot{y} = v$.

6.4.4 Commande d'une chaîne d'intégrateurs

Soit le système linéaire : $y^{(r)} = v$

Objectif de commande : Poursuite d'une trajectoire désirée ou de référence donnée $y_d(t)$.

Pour cela, on définit l'erreur de poursuite par : $e = y_d - y \Rightarrow e^{(r)} = y_d^{(r)} - y^{(r)} = y_d^{(r)} - v$

Si on choisit v de la forme : $v = y_d^{(r)} + k_{r-1}e^{(r-1)} + \dots + k_1\dot{e} + k_0e$

La dynamique du système bouclé devient : $e^{(r)} + k_{r-1}e^{(r-1)} + \dots + k_1\dot{e} + k_0e = 0$

Le polynôme caractéristique de cette dynamique est donnée par : $P(s) = s^r + k_{r-1}s^{r-1} + \dots + k_1s + k_0$

Les paramètres k_i , $i = 0, \dots, r-1$, peuvent être calculer par la méthode d'imposition des pôles de la boucle fermée. Soit $p_1, \dots, p_r$, les pôles désirés du système en boucle fermée, on a alors : $P(s) = s^r + k_{r-1}s^{r-1} + \dots + k_1s + k_0 = (s - p_1) \cdots (s - p_r)$.

Exemple 6.12 : Pour $r=1$, on a $\dot{y} = v$, $v = \dot{y}_d + k_0e = \dot{y}_d + k_0(y_d - y)$. Le polynôme caractéristique est : $P(s) = s + k_0 = s - p_1$ (on impose un pôle p_1), alors $k_0 = -p_1$. Si $p_1 = -5$, $k_0 = 5$, et si $y_d = \sin(t)$, $\dot{y}_d = \cos(t)$.

Exemple 6.13 : Pour $r=2$, on a $\ddot{y} = v$, $v = \ddot{y}_d + k_1\dot{e} + k_0e = \ddot{y}_d + k_1(\dot{y}_d - \dot{y}) + k_0(y_d - y)$. Le polynôme caractéristique est : $P(s) = s^2 + k_1s + k_0 = (s - p_1)(s - p_2) = s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1p_2$ (on impose deux pôles p_1 et p_2), alors $k_0 = p_1p_2$ et $k_1 = -(p_1 + p_2)$. Si $p_1 = -2 + j$ et $p_2 = -2 - j$, $k_0 = 5$ et $k_1 = 4$, et si $y_d = 1 - e^{-t}$, $\dot{y}_d = e^{-t}$, $\ddot{y}_d = -e^{-t}$.

6.4.5 Forme normale et dynamique des zéros

Considérons le système :
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}$$

Pour un degré relatif r , on a : $y^{(r)} = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x)u$. Lorsque le degré relatif du système est tel que $r < n$, on peut mettre le système sous une forme particulière appelée forme normale qui est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{r-1} = z_r \\ \dot{z}_r = v \\ \dot{q} = \psi(q, z) \end{cases}, \quad y = z_1, \quad z \in \mathbb{R}^r, \quad q \in \mathbb{R}^{n-r}, \quad \begin{pmatrix} z \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \\ \dots \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(r-1)} \\ \dots \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(x) \\ \dots \\ \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-r}(x) \end{pmatrix} = T(x),$$

avec $v = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x)u$. Les fonctions $\phi_1(x), \dots, \phi_{n-r}(x)$, sont choisies telles que :

$\phi_i(0) = 0$ et $\frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} g(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x_j} g_j(x) = 0, 1 \leq i \leq n-r$, et la transformation $T(x)$ est un

difféomorphisme, c'est-à-dire, le Jacobien ∇T est inversible ($\det(\nabla T) \neq 0$).

6.4.5.1 Dynamique interne et dynamique des zéros

L'équation $\dot{q} = \psi(q, z)$ représente la dynamique interne et l'équation $\dot{q} = \psi(q, 0)$ la dynamique des zéros du système. Le système est dit à minimum de phase si l'origine de la dynamique des zéros est asymptotiquement stable.

Remarque 6.7 :

- Le degré relatif r est égale au nombre de fois de dérivation de la sortie y pour faire apparaître l'entrée de commande u .
- L'ordre du système linéarisé correspond au degré relatif r .
- La dynamique des zéros correspond à la dynamique du système quand la sortie y est ses dérivées jusqu'à l'ordre $r-1$ sont maintenues à zéro ($z \equiv 0$).
- Pour un système dont la dynamique des zéros n'est pas asymptotiquement stable, la méthode de linéarisation entrée-sortie ne peut pas être utilisée.
- La méthode de la linéarisation entrée-sortie peut être utilisée si la bornitude des variables $z(t)$ implique la bornitude des variables d'état de la dynamique internes $q(t)$.
- Après la linéarisation entrée-sortie, la dynamique des zéros devient une dynamique non observable dans le système.
- La méthode de la linéarisation exacte par bouclage est également applicable aux systèmes non linéaires MIMO.

Exemple 6.14 : Considérons le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + (1-x_1^2)x_2 + u, \quad y = x_2 \end{cases}$$

$y = x_2 \Rightarrow \dot{y} = \dot{x}_2 = -x_1 + (1-x_1^2)x_2 + u$, alors le degré relatif $r = 1 < n = 2$.

Pour trouver la forme normale, on introduit : $\begin{pmatrix} z \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \phi(x) \end{pmatrix} = T(x)$. La fonction $\phi(x)$ vérifie

les conditions : $\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} g(x) = 0$ où $g(x) = (0 \ 1)^T$ et $\phi(0) = 0$.

Il vient alors : $\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \phi(x) = x_1$ et $T(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\nabla T) = -1 \Rightarrow$

$T(x)$ est un difféomorphisme.

$\begin{cases} z = x_2 \\ q = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = q \\ x_2 = z \end{cases}$ ce qui donne la forme normale suivante : $\begin{cases} \dot{z} = v \\ \dot{q} = z \end{cases}$ avec

$$v = -x_1 + (1-x_1^2)x_2 + u.$$

La dynamique des zéros est définie par : $\dot{q} = 0$ qui est un système linéaire avec un pôle à 0. Cette dynamique des zéros est donc stable mais pas asymptotiquement stable. Alors, le système non linéaire est à non minimum de phase.

Exemple 6.15 : Considérons le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \\ \dot{x}_2 = u, \quad y = x_1 + x_2 \end{cases}$$

$y = x_1 + x_2 \Rightarrow \dot{y} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = x_2^3 + u$, alors le degré relatif $r = 1 < n = 2$.

Pour trouver la forme normale, on introduit : $\begin{pmatrix} z \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ \phi(x) \end{pmatrix} = T(x)$. La fonction $\phi(x)$ vérifie

les conditions : $\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} g(x) = 0$ où $g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ et $\phi(0) = 0$.

Il vient alors : $\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \phi(x) = x_1$ et

$T(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\nabla T) = -1 \Rightarrow T(x)$ est un difféomorphisme.

$\begin{cases} z = x_1 + x_2 \\ q = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = q \\ x_2 = z - q \end{cases}$ ce qui donne la forme normale suivante : $\begin{cases} \dot{z} = v \\ \dot{q} = (z - q)^3 \end{cases}$ avec

$$v = x_2^3 + u.$$

La dynamique des zéros est définie par : $\dot{q} = -q^3$. Si on considère $V(q) = 0.5q^2 \Rightarrow \dot{V}(q) = -q^4 \Rightarrow$ la dynamique des zéros est asymptotiquement stable. Alors, le système non linéaire est à minimum de phase.

Exemple 6.16 : Considérons le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \frac{2+x_3^2}{1+x_3^2}u \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1x_3 + u \end{cases}, y = x_2$$

$y = x_2 \Rightarrow \dot{y} = \dot{x}_2 = x_3 \Rightarrow \ddot{y} = \dot{x}_3 = x_1x_3 + u$, alors le degré relatif $r = 2 < n = 3$.

Pour trouver la forme normale, on introduit : $\begin{pmatrix} z \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \phi(x) \end{pmatrix} = T(x)$.

La fonction $\phi(x)$ vérifie les conditions : $\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} g(x) = 0$ où $g(x) = \begin{pmatrix} \frac{2+x_3^2}{1+x_3^2} & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ et

$\phi(0) = 0$. Il vient alors : $\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1} \frac{2+x_3^2}{1+x_3^2} + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1} + \frac{1+x_3^2}{2+x_3^2} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_3} = 0$

Nous allons appliquer la méthode de séparation des variables pour résoudre cette équation aux dérivées partielles. Cette méthode consiste à rechercher une solution sous la forme suivante (on sépare les variables x_1 et x_3) : $\phi(x) = \phi_{x_1}(x_1) + \phi_{x_3}(x_3)$ avec $\phi_{x_1}(0) = 0, \phi_{x_3}(0) = 0$,

$$\frac{\partial(\phi_{x_1}(x_1) + \phi_{x_3}(x_3))}{\partial x_1} + \frac{1+x_3^2}{2+x_3^2} \frac{\partial(\phi_{x_1}(x_1) + \phi_{x_3}(x_3))}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \frac{1+x_3^2}{2+x_3^2} \frac{\partial \phi_{x_3}(x_3)}{\partial x_3} = -\frac{\partial \phi_{x_1}(x_1)}{\partial x_1}$$

Les variables sont correctement séparées, apparaissant de part et d'autre de l'égalité. Cette relation impose que les rapports soient constants, ce qui représente la seule solution possible pour des fonctions dépendant de variables distinctes.

$$\frac{1+x_3^2}{2+x_3^2} \frac{\partial \phi_{x_3}(x_3)}{\partial x_3} = -\frac{\partial \phi_{x_1}(x_1)}{\partial x_1} = C = 1 \quad (C \text{ est une constante quelconque choisie ici égale à } 1)$$

$$-\frac{\partial \phi_{x_1}(x)}{\partial x_1} = 1 \Rightarrow \frac{\partial \phi_{x_1}(x)}{\partial x_1} = -1 \Rightarrow \phi_{x_1}(x) = -x_1$$

$$\frac{1+x_3^2}{2+x_3^2} \frac{\partial \phi_{x_3}(x)}{\partial x_3} = 1 \Rightarrow \frac{\partial \phi_{x_3}(x)}{\partial x_3} = \frac{2+x_3^2}{1+x_3^2} = 1 + \frac{1}{1+x_3^2} \Rightarrow \phi_{x_3}(x) = x_3 + \arctan(x_3) ; \text{ On a utilisé : }$$

$$\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2} .$$

Alors, la solution de l'équation aux dérivées partielles est : $\phi(x) = -x_1 + x_3 + \arctan(x_3)$. D'où

$$T(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -x_1 + x_3 + \arctan(x_3) \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 + 1/(1+x_3^2) \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\nabla T) = -1 \Rightarrow T(x) \text{ est}$$

un difféomorphisme.

$$\begin{cases} z_1 = x_2 \\ z_2 = x_3 \\ q = -x_1 + x_3 + \arctan(x_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = z_2 + \arctan(z_2) - q \\ x_2 = z_1 \\ x_3 = z_2 \end{cases} \quad \text{ce qui conduit à la forme normale}$$

$$\text{suivante : } \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = v \\ \dot{q} = (-q + z_2 + \arctan(z_2)) \left(1 + \frac{2+z_2^2}{1+z_2^2} z_2 \right) \end{cases} \quad \text{avec } v = x_1 x_3 + u .$$

La dynamique des zéros est donnée par : $\dot{q} = -q$ qui est un système linéaire avec un pôle à -1. La dynamique des zéros est donc asymptotiquement stable. Alors, le système non linéaire est à minimum de phase.

6.5 Commande par backstepping

La technique de commande par backstepping permet de construire de manière récursive une loi de commande stabilisante pour les systèmes ayant la forme triangulaire inférieure suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) + g_3(x_1, x_2, x_3)x_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})x_n \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) + g_n(x_1, \dots, x_n)u \end{cases} , \quad g_i(\cdot) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \quad y = x_1 .$$

L'objectif consiste à déterminer une loi de commande u de telle sorte que la sortie $y = x_1$ suit une trajectoire de référence x_{1d} . La synthèse de la loi de commande s'effectue en n étapes.

Exemple 6.17 : Considérons le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u \end{cases} .$$

Objectif : Forcer x_1 à suivre une trajectoire désirée x_{1d} .

Etape 1 : On considère le 1^{er} sous-système : $\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2$, soit l'erreur : $e_1 = x_1 - x_{1d} \Rightarrow \dot{e}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 - \dot{x}_{1d}$. On considère x_2 comme une entrée de commande virtuelle et sa valeur désirée est notée x_{2d} , il vient : $\dot{e}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_{2d} - \dot{x}_{1d} + g_1(x_1)e_2$ où $e_2 = x_2 - x_{2d}$. Soit $V_1 = \frac{1}{2}e_1^2 \Rightarrow \dot{V}_1 = e_1\dot{e}_1 = e_1(f_1(x_1) + g_1(x_1)x_{2d} - \dot{x}_{1d} + g_1(x_1)e_2)$. Alors, si on choisit $x_{2d} : x_{2d} = \frac{1}{g_1(x_1)}(-f_1(x_1) + \dot{x}_{1d} - k_1e_1)$ avec $k_1 > 0$, on obtient : $\dot{V}_1 = -k_1e_1^2 + g_1(x_1)e_1e_2$. Si $e_2 = 0$ (si $x_2 = x_{2d}$), i.e., $\dot{V}_1 = -k_1e_1^2$, l'origine du sous-système (e_1) est G. A. stable.

Etape 2 : Avec $e_2 = x_2 - x_{2d}$, il vient alors : $\begin{cases} \dot{e}_1 = -k_1e_1 + g_1(x_1)e_2 \\ \dot{e}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u - \dot{x}_{2d} \end{cases}$. Considérons :

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}e_2^2 = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 \Rightarrow \dot{V}_2 = e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 = -k_1e_1^2 + e_2(g_1(x_1)e_1 + f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u - \dot{x}_{2d})$$

Si on choisit une loi de commande : $u = \frac{1}{g_2(x_1, x_2)}(-g_1(x_1)e_1 - f_2(x_1, x_2) + \dot{x}_{2d} - k_2e_2)$, $k_2 > 0$,

On obtient : $\dot{V}_2 = -k_1e_1^2 - k_2e_2^2$, ce qui implique que l'origine du système (e_1, e_2) est G. A. stable.

Dans la loi de commande u , le terme $\dot{x}_{2d}$ est donné par :

$$\dot{x}_{2d} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{g_1(x_1)}(-f_1(x_1) + \dot{x}_{1d} - k_1e_1) \right).$$

Exemple 6.18 : Considérons le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) + g_3(x_1, x_2, x_3)u \end{cases}$$

Objectif : Forcer x_1 à suivre une trajectoire désirée x_{1d} .

Etape 1 : On considère le 1^{er} sous-système : $\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2$, soit l'erreur : $e_1 = x_1 - x_{1d} \Rightarrow \dot{e}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 - \dot{x}_{1d}$. On considère x_2 comme une entrée de commande virtuelle et sa valeur désirée est notée x_{2d} , il vient : $\dot{e}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_{2d} - \dot{x}_{1d} + g_1(x_1)e_2$ où $e_2 = x_2 - x_{2d}$. Soit $V_1 = \frac{1}{2}e_1^2 \Rightarrow \dot{V}_1 = e_1\dot{e}_1 = e_1(f_1(x_1) + g_1(x_1)x_{2d} - \dot{x}_{1d} + g_1(x_1)e_2)$. Alors, si on choisit $x_{2d} : x_{2d} = \frac{1}{g_1(x_1)}(-f_1(x_1) + \dot{x}_{1d} - k_1e_1)$ avec $k_1 > 0$, on obtient : $\dot{V}_1 = -k_1e_1^2 + g_1(x_1)e_1e_2$. Si $e_2 = 0$ (si $x_2 = x_{2d}$), i.e., $\dot{V}_1 = -k_1e_1^2$, l'origine du sous-système (e_1) est G. A. stable.

Etape 2 : Avec $e_2 = x_2 - x_{2d}$, on obtient : $\begin{cases} \dot{e}_1 = -k_1e_1 + g_1(x_1)e_2 \\ \dot{e}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_{3d} - \dot{x}_{2d} \end{cases}$. On considère x_3 comme une entrée de commande virtuelle et sa valeur désirée est notée x_{3d} , il vient alors :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -k_1 e_1 + g_1(x_1) e_2 \\ \dot{e}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2) x_{3d} - \dot{x}_{2d} + g_2(x_1, x_2) e_3 \end{cases}, \text{ où } e_3 = x_3 - x_{3d}. \text{ Considérons la fonction :}$$

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} e_2^2 \Rightarrow \dot{V}_2 = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 = -k_1 e_1^2 + e_2 (g_1(x_1) e_1 + f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2) x_{3d} - \dot{x}_{2d} + g_2(x_1, x_2) e_3)$$

Si on choisit une commande virtuelle : $x_{3d} = \frac{1}{g_2(x_1, x_2)} (-g_1(x_1) e_1 - f_2(x_1, x_2) + \dot{x}_{2d} - k_2 e_2)$,

$k_2 > 0$, on obtient : $\dot{V}_2 = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 + g_2(x_1, x_2) e_2 e_3$. Si $e_3 = 0$ (si $x_3 = x_{3d}$), i.e., $\dot{V}_2 = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2$, l'origine du sous-système (e_1, e_2) est globalement asymptotiquement stable.

Etape 3 : Posons $e_3 = x_3 - x_{3d}$, il vient alors :
$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -k_1 e_1 + g_1(x_1) e_2 \\ \dot{e}_2 = -k_2 e_2 - g_1(x_1) e_1 + g_2(x_1, x_2) e_3 \\ \dot{e}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) + g_3(x_1, x_2, x_3) u - \dot{x}_{3d} \end{cases}. \text{ Soit :}$$

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} e_3^2 \Rightarrow \dot{V}_3 = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 + e_3 (g_2(x_1, x_2) e_2 + f_3(x) + g_3(x) u - \dot{x}_{3d}).$$

Si on choisit une loi de commande :

$$u = \frac{1}{g_3(x_1, x_2, x_3)} (-g_2(x_1, x_2) e_2 - f_3(x_1, x_2, x_3) + \dot{x}_{3d} - k_3 e_3), \quad k_3 > 0, \quad \text{on obtient :}$$

$\dot{V}_3 = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2$, alors l'origine du système (e_1, e_2, e_3) est G. A. stable.

6.6 Commande par mode de glissement

La commande par mode de glissement (Sliding Mode Control, SMC) est une stratégie de commande non linéaire robuste utilisée pour les systèmes non linéaires, incertains ou soumis à des perturbations. Elle force le système à converger vers une surface de glissement prédéfinie, puis à glisser le long de cette surface pour atteindre l'objectif de commande.

La méthode de commande par mode de glissement repose sur les deux concepts suivants :

- **Surface de glissement** : Une surface définie dans l'espace d'état du système. Une fois que le système atteint cette surface, il y reste et évolue de manière prévisible, indépendamment des perturbations.
- **Loi de commande** : Une loi de commande visant à forcer le système à atteindre et à maintenir son état sur la surface de glissement. Cette loi doit assurer une convergence rapide en temps fini vers la surface de glissement et garantir que le système y reste de manière asymptotique, indépendamment des perturbations et des incertitudes. Ce type de commande a en général deux modes de fonctionnement :
 - Le mode d'accès (reaching mode) : Le système converge vers la surface de glissement.
 - Le mode de glissement (sliding mode) : Le système évolue le long de la surface de glissement, ce qui implique que son comportement dynamique est contraint de glisser sur cette surface.

Le système en mode de glissement présente deux propriétés remarquables :

- Réduction de l'ordre : le système en mode glissant subit une réduction de son ordre, passant de n à $n-1$ (pour un système monovariable).

- Propriété d'invariance : il démontre une insensibilité aux incertitudes et perturbations apparées, c'est-à-dire aux termes incertains et perturbations affectant le système au niveau du canal de commande.

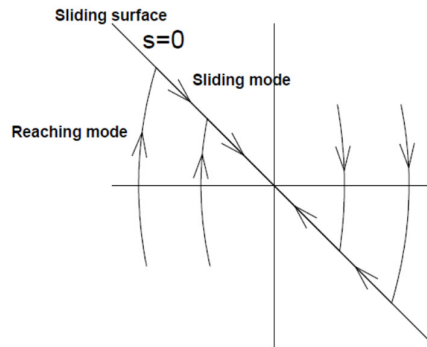


Figure 6.2 : Principe de la commande par mode glissement

6.6.1 Etapes de conception de la commande

La synthèse de la commande par mode de glissement se déroule en trois étapes principales : la conception de la surface de glissement, l'élaboration de la loi de commande et l'analyse de la stabilité du système en boucle fermée.

Choix de la surface de glissement

La surface de glissement notée $s(x)$ est une fonction des états du système. Elle est choisie de manière à ce que, lorsque $s(x) = 0$, le système atteigne l'objectif de commande (par exemple, une trajectoire de référence ou un point d'équilibre).

Dans le cadre de ce cours, nous considérons les systèmes non linéaires monovariables d'ordre n , de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(x) + g(x)u \end{cases}, \quad x = (x_1 \quad \cdots \quad x_n)^T, \quad y = x_1$$

La surface de glissement est généralement définie de la manière suivante :

$$s = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e$$

$e = y - y_d$ est l'erreur de poursuite avec y la sortie du système et y_d la sortie désirée.

λ est un paramètre positif qui détermine la dynamique de convergence.

Par exemple :

- $s = e$, pour un système du premier ordre
- $s = \dot{e} + \lambda e$, pour un système du deuxième ordre
- $s = \ddot{e} + 2\lambda\dot{e} + \lambda^2 e$, pour un système de troisième ordre

Il convient de noter que l'unique solution de l'équation différentielle $s = 0$ est $e = 0$.

Elaboration de la loi de commande

La commande par mode de glissement utilise une loi de commande conçue pour forcer l'état du système à converger vers la surface de glissement et à y rester. La loi de commande non linéaire u est composée de deux parties : $u = u_{eq} + u_{disc}$

- u_{eq} : La commande équivalente assure le maintien du système sur la surface de glissement. Elle est obtenue en résolvant l'équation $\dot{s} = 0$, tout en négligeant les termes associés aux incertitudes.
- u_{disc} : La commande discontinue garantit la convergence en temps fini vers la surface de glissement, même en présence d'incertitudes et de perturbations externes. La commande discontinue prend toujours la forme : $u_{disc} = -K(x)\text{sign}(s)$, où $K(x)$ est une fonction positive choisie pour compenser les effets des incertitudes et des perturbations externes, $\text{sign}(s)$ représente la fonction signe de la variable s .

Analyse de la stabilité

Le calcul de la loi de commande, ainsi que l'analyse de la stabilité du système en boucle fermée, peuvent être effectués à l'aide de la théorie de Lyapunov. Dans ce cadre, la fonction de Lyapunov est définie, pour un système monovariante, par $V = \frac{1}{2}s^2$. La propriété de convergence en temps fini vers la surface est garantie si la condition suivante est remplie : $\dot{V} = s\dot{s} \leq -\eta|s|$, avec $\eta > 0$.

Il convient de noter que le raisonnement ci-dessus repose sur le fait que $\dot{s}$ est une fonction de u . Cet aspect doit être pris en compte lors de la conception de la surface de glissement s .

6.6.2 Avantages et inconvénients

Avantages :

- Robustesse : La commande par mode de glissement est robuste aux incertitudes et perturbations externes. En effet, une fois que le système atteint la surface de glissement, son comportement est indépendant de ces perturbations.
- Simplicité : Facile à mettre en œuvre pour des systèmes non linéaires.
- Convergence en temps fini : Le système atteint la surface de glissement en temps fini.

Inconvénients :

- Phénomène de broutement (réticence, chattering) : L'un des principaux inconvénients de la commande par mode de glissement est le phénomène de chattering, qui se manifeste par des oscillations rapides autour de la surface de glissement en raison de la discontinuité dans la loi de commande. Ce problème peut être atténué en remplaçant la fonction signe par des fonctions continues, telles que $\text{sat}(s/\phi)$ ou $\tanh(s/\phi)$, $\phi > 0$, ce qui permet de réduire les oscillations indésirables et de rendre la commande plus lisse. Cependant, cette approche peut entraîner la perte de convergence vers zéro, ce qui peut affecter la performance de la commande dans certaines situations.

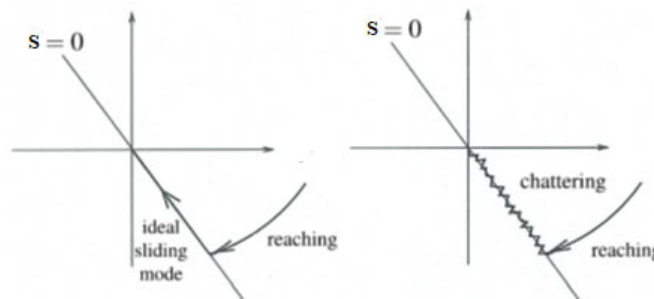


Figure 6.3 : Phénomène de chattering

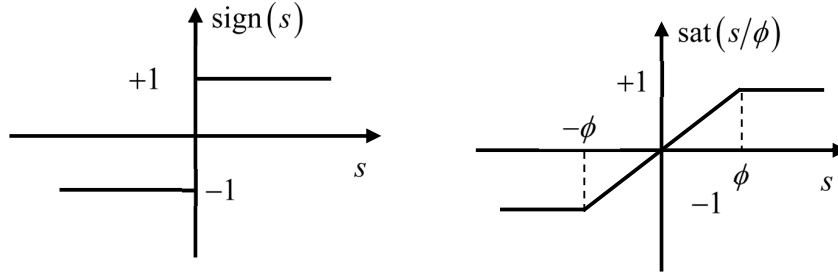


Figure 6.3 : Illustration des fonctions $\text{sign}()$ et $\text{sat}()$

Exemple 6.19 : Considérons un système d'ordre 2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x) + g(x)u + d(x, t) \end{cases}, \quad y = x_1$$

avec $f(x)$ et $g(x) > 0$ sont des fonctions connues, $d(x, t)$ est un terme inconnu qui englobe les incertitudes et les perturbations externes bornée par $|d(x, t)| \leq D(x)$ où $D(x)$ est une fonction connue. L'objectif de la commande est de forcer la sortie y à suivre la trajectoire désirée y_d .

On considère la surface de glissement suivante :

$$s = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{2-1} e = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right) e = \dot{e} + \lambda e, \quad e = y - y_d = x_1 - y_d$$

La dérivée de la surface de glissement est :

$$\dot{s} = \ddot{e} + \lambda \dot{e} = \ddot{x}_1 - \ddot{y}_d + \lambda \dot{e} = \dot{x}_2 - \ddot{y}_d + \lambda \dot{e}$$

$$\dot{s} = f(x) + g(x)u - \ddot{y}_d + \lambda \dot{e} + d(x, t)$$

On considère la fonction de Lyapunov : $V = \frac{1}{2}s^2$. Sa dérivée temporelle est : $\dot{V} = s\dot{s}$

$$\dot{V} = s(f(x) + g(x)u - \ddot{y}_d + \lambda \dot{e} + d(x, t))$$

avec : $u = u_{eq} + u_{disc}$

$$\dot{V} = s(f(x) + g(x)u_{eq} - \ddot{y}_d + \lambda \dot{e}) + s(g(x)u_{disc} + d(x, t))$$

$$\text{Si on choisit : } f(x) + g(x)u_{eq} - \ddot{y}_d + \lambda \dot{e} = 0 \Rightarrow u_{eq} = \frac{1}{g(x)}(-f(x) + \ddot{y}_d - \lambda \dot{e})$$

$$\text{Il vient : } \dot{V} = s(g(x)u_{disc} + d(x, t)) \leq s g(x)u_{disc} + |s||d(x, t)| \Rightarrow \dot{V} \leq s g(x)u_{disc} + |s|D(x)$$

$$\text{Si on choisit : } u_{disc} = -\frac{1}{g(x)}(\eta + D(x))\text{sign}(s), \quad \eta > 0.$$

Il vient : $\dot{V} \leq -\eta|s|$, ainsi, la condition de stabilité et de convergence est bien satisfaite.

L'expression finale de la loi de commande est la suivante :

$$u = u_{eq} + u_{disc} = \frac{1}{g(x)}(-f(x) + \ddot{y}_d - \lambda \dot{e}) - \frac{1}{g(x)}(\eta + D(x))\text{sign}(s)$$

Les résultats de simulation présentés ci-dessous ont été obtenus à partir des données suivantes :

$$f(x) = x_1 x_2 + x_1^2; \quad g(x) = 2 + \cos(x_1); \quad d(x, t) = 0.5 x_1 x_2 + 0.3 x_2 \cos(x_1) + 1.5 \cos(0.2t);$$

$$D(x) = 2 + |x_1| + |x_2|; \quad \lambda = 2; \quad \eta = 5; \quad y_d(t) = \sin(t); \quad x_1(0) = 0.2; \quad x_2(0) = 0.$$

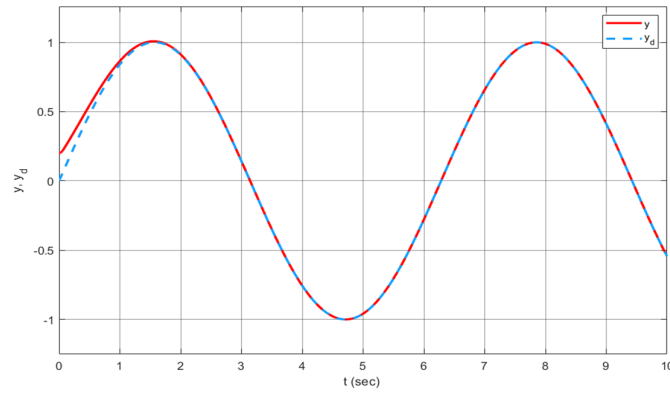


Figure 6.4 : Réponse du système sortie (y) et sortie désirée (y_d)

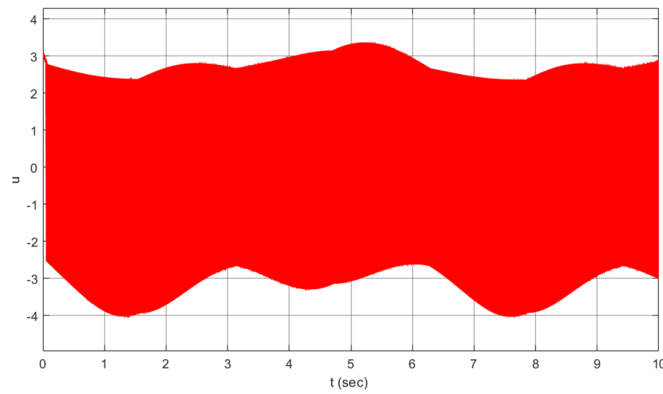


Figure 6.5 : Signal de commande

La Figure 6.5 illustre clairement le problème du chattering dans la commande par mode de glissement. Pour atténuer ce phénomène indésirable, on remplace la fonction $\text{sign}(s)$ par la fonction continue $\tanh(s/0.01)$.

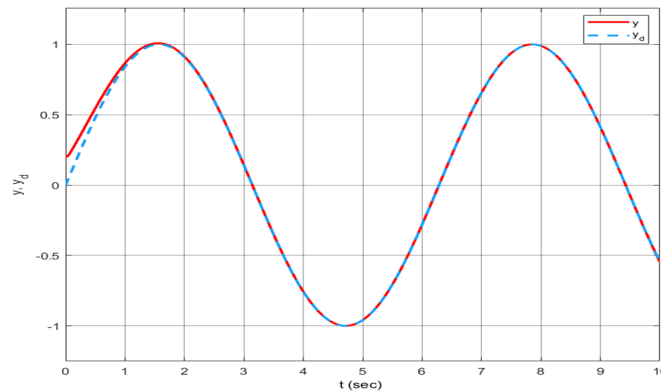


Figure 6.6 : Réponse du système sortie (y) et sortie désirée (y_d)

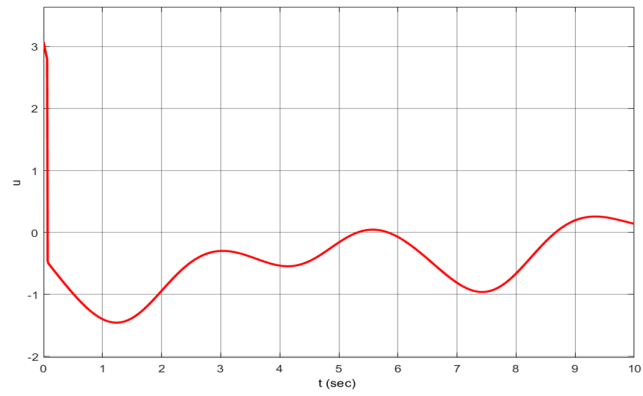


Figure 6.7 : Signal de commande

Bibliographie

- [1] H. K. Khalil, Nonlinear systems, Prentice Hall, 2002.
- [2] H. K. Khalil, Nonlinear control, Pearson Education, 2015.
- [3] J. J. E. Slotine and W. Li, Applied nonlinear control, Prentice Hall, 1991.
- [4] H. J. Marquez, Nonlinear control systems: Analysis and design, John Wiley & Sons, 2003.
- [5] J. La Salle and S. Lefschetz, Stability by Liapunov's direct method with applications, Academic Press, 1964.
- [6] H. G. Lee, Linearization of nonlinear control systems, Springer, 2022.
- [7] P. Mullhaupt, Introduction à l'analyse et à la commande des systèmes non linéaires, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2009.
- [8] Y. Granjon, Automatique : Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état, cours et exercices corrigés, Dunod, 2010.
- [9] S. Sastry, Nonlinear system analysis: Stability and control, Springer, 1999.
- [10] G. Chen, Nonlinear Systems: Stability, dynamics and control, WSPC, 2024.