REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Belhannache Farida

Mesure et intégration

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Ce cours est une introduction à la théorie de la mesure et de l'intégration destinés aux étudiants de troisième année licence de mathématiques.
Le présent polycopié s'articule autour de quatre chapitres et chaque chapitre se termine par une série d'exercices.
Dans le premier chapitre nous commençons par donner un rappel sur la théorie des ensembles, ensuite nous présentons des notions fondamentales sur les tribus, les mesures positives et leurs propiétés et on termine par l'introduction de la mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens.
Nous présentons dans le deuxième chapitre quelques définitions concernant les fonctions étagées, les fonctions mesurables et les convergences presque partout et en mesure.
Le troisième chapitre est consacré aux notions fondamentales concernant les fonctions intégrables ainsi que les théorèmes essentiels qui y sont liés.
La mesure produit et le théorème de Fubini font l'objet du dernier chapitre.

Notations

Dans tout ce cours on utilisera les notaions suivantes

$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs.

$\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

$\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres naturels.

$\mathbb{N}^*$ l'ensemble des nombres naturels non nuls.

$\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.

$\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationels.

$\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

$\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble E.

$\emptyset$ l'ensemble vide.

CHAPITRE 1

Tribus et Mesures

Dans ce chapitre, nous commençons par donner un rappel sur la théorie des ensembles, ensuite nous présentons les notions fondamentales sur les tribus, les mesures positives et leurs propiétés ainsi que la mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens.

1.1 Rappel sur la théorie des ensembles

Définition 1.1.1 *On appelle ensemble toute collection bien définie d'objets. Les objets de cette collection sont appelés les éléments de l'ensemble.*

Remarque 1.1.1 **1)** *L'ensemble noté $\emptyset$ où $\{\}$ est l'ensemble vide, c'est à dire l'ensemble qui ne cotient aucun élément.*

2) $E = \{\emptyset\}$ *n'est pas vide.*

3) *On écrit* $E = \{x, y, z\}$ *si* x, y *et* z *sont les éléments de* E.

4) *On écrit $x \in E$ si x est un élément de l'ensemble E, sinon on écrit $x \notin E$.*

Exemple 1.1.1 **1)** *L'intervalle* $]-3, 8]$ *est l'ensemble* $\{x \in \mathbb{R}, -3 < x \leq 8\}$.

2) *Soit l'ensemble* $E = \{x \in \mathbb{R}, x^2 = -5\}$, *alors* $E = \emptyset$.

Définition 1.1.2 *Soient E, F deux ensembles. On dit que F est un sous-ensemble de E et on écrit $F \subset E$ si tout élément de F est un élément de E, c'est à dire*

$$F \subset E \Leftrightarrow \forall x \in F, x \in E.$$

Exemple 1.1.2

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}.$$

Définition 1.1.3 *Soit E un ensemble. On appelle ensemble des parties de E l'ensemble de tous les sous-ensembles de E et on le note $\mathcal{P}(E)$.*

Remarque 1.1.2 *Soit E un ensemble, alors on a toujours $\emptyset, E \in \mathcal{P}(E)$.*

Définition 1.1.4 *Soit E et F deux ensembles. On dit que E et F sont égaux et on écrit $E = F$ si on a $E \subset F$ et $F \subset E$.*

Proposition 1.1.1 *Soient E, F, G trois ensembles. Si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.*

Démonstration. Supposons que $E \subset F$ et $F \subset G$. Soit $x \in E$, alors $x \in F$ car $E \subset F$, donc $x \in G$ car $F \subset G$, d'où $E \subset G$. ∎

Définition 1.1.5 *Soit E et F deux ensembles.*

1) *On appelle réunion de E et F et on la note $E \cup F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ou à F. C'est à dire $E \cup F = \{x,\ x \in E \text{ ou } x \in F\}$*

2) *On appelle intersection de E et F et on la note $E \cap F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à E et à F. C'est à dire $E \cap F = \{x,\ x \in E \text{ et } x \in F\}$.*

3) *On dit que E et F sont disjoints si* $E \cap F = \emptyset$.

Définition 1.1.6 *Soit E un ensemble et* $\{F_i\}_{1\leq i\leq n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$ *une famille de parties de E. On dit que cette famille forme une partition de E si on a*

a) $F_i \neq \emptyset$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

b) $F_i \cap F_j = \emptyset$, $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j$.

c) $E = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$.

Exemple 1.1.3 *Soient* $E = \mathbb{R}$, $F_1 = \mathbb{R}_+^\star$, $F_2 = \mathbb{R}_-^\star$, $F_3 = \{0\}$, *alors la famille* $\{F_1, F_2, F_3\}$ *forme une partition de E.*

Proposition 1.1.2 *Soient E, F, G trois ensembles. Alors*

a) $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$.

b) $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$.

Définition 1.1.7 *Soit E un ensemble et F un sous-ensemble de E. On appelle complémentaire de F, l'ensemble des éléments qui n'appartiennent pas à F et on le note* F_E^c, *c'est à dire*

$$F_E^c = \{x \in E,\ x \notin F\}.$$

Proposition 1.1.3 *Soit E un ensemble et F et G deux sous-ensembles de E. Alors*

1) $\left(F_E^c\right)_E^c = F$.

2) *Si* $F \subset G$, *alors* $G_E^c \subset F_E^c$.

3) $(F \cup G)_E^c = F_E^c \cap G_E^c$.

4) $(F \cap G)_E^c = F_E^c \cup G_E^c$.

Définition 1.1.8 *Soit E un ensemble et* $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
On appelle différence de A et B, l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B et on le note $A \setminus B$, *c'est à dire*

$$A \setminus B = \{x,\ x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap B_E^c.$$

On appelle différence symétrique de A et B et on la note $A\triangle B$, l'ensemble des éléments appartenant soit à A, soit à B, mais pas aux deux ensembles à la fois, c'est à dire

$$\begin{aligned} A\triangle B &= (A \setminus B)\cup(B\setminus A) \\ &= (A\cap B^c_E)\cup(B\cap A^c_E) \\ &= \{x\in E,\ x\in A \text{ et } x\notin B\}\cup\{x\in E,\ x\in B \text{ et } x\notin A\} \end{aligned}$$

Proposition 1.1.4 *Soit E un ensemble et $A,B,C\in\mathcal{P}(E)$. Alors*

1) $A\triangle B = B\triangle A$, *c'est à dire la différence symétrique est commutative.*

2) $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$, *c'est à dire la différence symétrique est associative.*

3) $A\triangle B = A\triangle C \Leftrightarrow B = C$.

4) $A\triangle B = \emptyset \Leftrightarrow B = A$.

5) $A\triangle B = A \Leftrightarrow B = \emptyset$.

6) $A\triangle B = E \Leftrightarrow B = A^c_E$.

7) $A\triangle B = A^c_E \Leftrightarrow B = E$.

8) $A\triangle B = A\cap B \Leftrightarrow A = B = \emptyset$.

9) $A\triangle B = A\cup B \Leftrightarrow A\cap B = \emptyset$.

10) $(A\triangle B)^c_E = A\triangle B^c_E$.

11) $(A\triangle B)\cup(A\cap B) = A\cup B$.

Exemple 1.1.4 *Soient $E=\{0,2,4,5,6,7,8,9,10\}$, $F=\{2,4,6,8\}$, $G=\{4,5,6,7\}$. Alors*

* $F\subset E$ *et* $G\subset E$.

* $F\cap G=\{4,6\}$ *et* $F\cup G=\{2,4,5,6,7,8\}$.

* $F^c_E=\{0,5,7,9,10\}$ *et* $G^c_E=\{0,2,8,9,10\}$.

* $F\setminus G=\{2,8\}$ *et* $G\setminus F=\{5,7\}$.

* $F\triangle G=\{2,5,7,8\}$.

Définition 1.1.9 *Soit E un ensemble. On dit que E est fini s'il contient n éléments où* $n \in \mathbb{N}$.
Dans ce cas n est appelé cardinal de E et on écrit $Card(E) = n$.
Sinon E est infini.

Exemple 1.1.5 **1)** $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *sont des ensembles infinis.*

2) $E = \{0, 2, 4, 6\}$ *est un ensemble fini et* $Card(E) = 4$.

3) *L'intervalle* $[-5, 6]$ *est un ensemble infini.*

Remarque 1.1.3 *Soit E un ensemble fini tel que* $Card(E) = n \in \mathbb{N}$ *et* $\mathcal{P}(E)$ *l'ensemble des parties de E. Alors* $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Remarque 1.1.4 *Soit E et F deux ensembles finis, alors*

(i) $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$.

(ii) *Si E et F sont disjoints, alors* $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F)$.

Définition 1.1.10 *Soit E un ensemble.*
On dit que E est dénombrable s'il existe une bijection de E dans l'ensemble $\mathbb{N}$.
On dit que E est au plus dénombrable si E est fini ou dénombrable.

Exemple 1.1.6 **1)** *Tout ensemble fini est au plus dénombrable.*

2) $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{Z}$ *sont infinis et dénombrables.*

3) *L'intervalle* $I = [-5, 6]$ *est infini et non dénombrable.*

Définition 1.1.11 *Soit E et F deux ensembles. On appelle produit cartésien de E et F et on le note* $E \times F$ *l'ensemble* $\{(x, y),\ x \in E \text{ et } y \in F\}$.

Remarque 1.1.5 *Soit E un ensemble. On note par* E^2 *le produit cartésien* $E \times E$.

Exemple 1.1.7 *Soit* $E = \{3, 4, 5, 6\}$ *et* $F = \{0, 2\}$. *Alors*

$$E \times F = \{(3, 0), (3, 2), (4, 0), (4, 2), (5, 0), (5, 2), (6, 0), (6, 2)\},$$

$$E^2 = \{(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),$$
$$(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

et

$$F^2 = \{(0,0),(0,2),(2,0),(2,2)\}.$$

Remarque 1.1.6 *Soit E, F deux ensembles et $E \times F$ le produit cartésien de E et F. Alors*

1) $E \times F \neq F \times E$, *c'est à dire le produit cartésien n'est pas commutatif.*

2) *Si $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$, alors $E \times F = \emptyset$.*

3) *Soit (x, y), $(x', y') \in E \times F$, alors $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$.*

Proposition 1.1.5 *Soit E, F deux ensembles finis et $E \times F$ le produit cartésien de E et F. Alors*

$$Card(E \times F) = Card(E).Card(F).$$

Définition 1.1.12 *Soit E, F deux ensembles et $E \times F$ le produit cartésien de E et F. On appelle relation binaire de E vers F toute partie de $E \times F$.*
Si $\mathcal{R}$ est une relation binaire de E vers F et $(x, y) \in \mathcal{R}$ on écrit $x\mathcal{R}y$.

Remarque 1.1.7 *Soit E, F deux ensembles et $\mathcal{R}$ une relation binaire de E vers F. Alors*

1) *Si $E = F$, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E.*

2) *Si $(x, y) \in \mathcal{R}$, on dit que x est en relation $\mathcal{R}$ avec y.*

3) *Si $(x, y) \notin \mathcal{R}$, on dit que x n'est pas en relation $\mathcal{R}$ avec y.*

Exemple 1.1.8 *$\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E dans chacun des cas suivants*

1) $E = \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$.

2) $E = \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x < y$.

3) $E = \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y$.

4) $E = \mathcal{P}(F)$, $G\mathcal{R}H \Leftrightarrow G \subset H$, *où F est un ensemble et $G, H \in \mathcal{P}(F)$.*

5) *E est l'ensemble des fonctions définies de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et*

$$\begin{aligned} f\mathcal{R}g &\Leftrightarrow f \leq g \\ &\Leftrightarrow f(x) \leq g(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Définition 1.1.13 *Soit E un ensembles et* $\mathcal{R}$ *une relation binaire sur E. On dit que* $\mathcal{R}$ *est*

1) *réflexive si* $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$.

2) *symétrique si* $\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

3) *antisymétrique si* $\forall x, y \in E,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.

4) *transitive si* $\forall x, y, z \in E,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Exemple 1.1.9 **1)** *La relation "* $=$ *" sur* $\mathbb{R}$ *est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.*

2) *La relation "* $\leq$ *" sur* $\mathbb{R}$ *est réflexive, antisymétrique, transitive, mais n'est pas symétrique.*

3) *La relation "* $<$ *" sur* $\mathbb{R}$ *est transitive, mais n'est pas réflexive ni symétrique.*

4) *La relation "* $\subset$ *" sur* $\mathcal{P}(E)$ *est réflexive, antisymétrique et transitive.*

Définition 1.1.14 *Soit E un ensemble et* $\mathcal{R}$ *une relation binaire sur E. On dit que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.*

Remarque 1.1.8 *Si* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence sur l'ensemble E et si* $x\mathcal{R}y$ *on dit, dans ce cas, que x et y sont équivalents.*

Exemple 1.1.10 **1)** *La relation "* $=$ *" sur* $\mathbb{R}$ *est une relation d'équivalence.*

2) *Sur* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, *la relation binaire* $\mathcal{R}$ *définie par* $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy > 0$, *est une relation d'équivalence.*

Définition 1.1.15 *Soit E un ensemble et* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence sur E.*
1) On appelle classe d'équivalence de $x \in E$ *modulo* $\mathcal{R}$, *l'ensemble défini par*

$$\dot{x} = \{y \in E,\ x\mathcal{R}y\}.$$

2) On appelle ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$, l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de E modulo "$\mathcal{R}$" et on le note $E/\mathcal{R}$, c'est à dire

$$E/\mathcal{R} = \{\overset{\bullet}{x},\ x \in E\}$$

Proposition 1.1.6 *Soit E un ensemble, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et $x, y \in E$. Alors x et y sont équivalents si et seulement si $\overset{\bullet}{x} = \overset{\bullet}{y}$.*

Démonstration. $\Longrightarrow$? Supposons que x et y sont équivalents, c'est à dire $x\mathcal{R}y$ et montrons que $\overset{\bullet}{x} = \overset{\bullet}{y}$.
Soit $z \in \overset{\bullet}{x}$, alors $x\mathcal{R}z$. Mais $\mathcal{R}$ est symétrique et transitive, donc $z\mathcal{R}y$, alors $z \in \overset{\bullet}{y}$, d'où $\overset{\bullet}{x} \subset \overset{\bullet}{y}$.
De la même manière on peut montrer que $\overset{\bullet}{y} \subset \overset{\bullet}{x}$.
$\Longleftarrow$? Supposons que $\overset{\bullet}{x} = \overset{\bullet}{y}$ et montrons que $x\mathcal{R}y$.
On a $x \in \overset{\bullet}{x} = \overset{\bullet}{y}$, donc $y\mathcal{R}x$, mais $\mathcal{R}$ est symétrique, donc $x\mathcal{R}y$. ■

Proposition 1.1.7 *Soit E un ensemble, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et $x, y \in E$. Si x et y ne sont pas équivalents, alors les classes d'équivalence $\overset{\bullet}{x}$ et $\overset{\bullet}{y}$ sont disjoints.*

Démonstration. Supposons que x et y ne sont pas équivalents et montrons que $\overset{\bullet}{x} \cap \overset{\bullet}{y} = \emptyset$. Supposons que $\overset{\bullet}{x} \cap \overset{\bullet}{y} \neq \emptyset$. Alors il existe un élément z de E tel que $z \in \overset{\bullet}{x}$ et $z \in \overset{\bullet}{y}$, donc $x\mathcal{R}z$ et $y\mathcal{R}z$, mais $\mathcal{R}$ est symétrique et transitive donc $x\mathcal{R}y$ ce qui est contraire à l'hypothèse, d'où $\overset{\bullet}{x} \cap \overset{\bullet}{y} = \emptyset$. ■

Corollaire 1.1.1 *Soit E un ensemble, $x, y \in E$ et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Alors on a $\overset{\bullet}{x} = \overset{\bullet}{y}$ ou $\overset{\bullet}{x} \cap \overset{\bullet}{y} = \emptyset$. De plus l'ensemble des classes d'équivalence associées à $\mathcal{R}$ forme une partition de E, c'est à dire $E = \bigcup\limits_{x \in E} \overset{\bullet}{x}$.*

Définition 1.1.16 *Soit E un ensemble et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de parties de E. On appelle*

1. *limite supérieure de la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et on la note $\limsup\limits_n F_n$ la partie de E définie par* $\limsup\limits_n F_n = \bigcap\limits_{n \geq 1} \bigcup\limits_{k \geq n} F_k$.

2. *limite inférieure de la suite* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, *et on la note* $\liminf_n F_n$ *la partie de E définie par* $\liminf_n F_n = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} F_k$.

Lemme 1.1.1 *Soit E un ensemble et* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de parties de E. Alors*

1) $\liminf_n F_n \subset \limsup_n F_n$.

2) $\left(\limsup_n F_n\right)^c_E = \liminf_n (F_n)^c_E$ *et* $\left(\liminf_n F_n\right)^c_E = \limsup_n (F_n)^c_E$.

Démonstration.

1) Soit $x \in \liminf_n F_n = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} F_k$, alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^\star,\ x \in \bigcap_{k\geq n_0} F_k \subset \bigcup_{k\geq n} F_k,\ \forall n \geq 1,$$

donc pour tout $n \geq 1$, on a $x \in \bigcup_{k\geq n} F_k$, d'où

$$x \in \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} F_k = \limsup_n F_n,$$

ce qui implique que $\liminf_n F_n \subset \limsup_n F_n$.

2) Soit $x \in \left(\limsup_n F_n\right)^c_E$, alors

$$x \in E \text{ et } x \notin \limsup_n F_n = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} F_k,$$

donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^\star,\ x \notin \bigcup_{k\geq n_0} F_k,$$

alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que pour tout $k \geq n_0$, on a $x \notin F_k$, c'est à dire

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^\star,\ \forall k \geq n_0,\ x \in (F_k)^c_E\,,$$

donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que

$$x \in \bigcap_{k\geq n_0} (F_k)^c_E \subset \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} (F_k)^c_E = \liminf_n (F_n)^c_E,$$

d'où

$$\left(\limsup_n F_n\right)_E^c \subset \liminf_n (F_n)_E^c.$$

Réciproquement, soit $x \in \liminf_n (F_n)_E^c = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n}(F_k)_E^c$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que $x \in \bigcap_{k\geq n_0}(F_k)_E^c$, donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^\star,\ \forall k \geq n_0,\ x \in (F_k)_E^c,$$

alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^\star,\ \forall k \geq n_0,\ x \notin F_k,$$

ce qui implique qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que $x \notin \bigcup_{k\geq n_0} F_k$, c'est à dire

$$x \notin \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} F_k = \limsup_n F_n,$$

d'où

$$x \in \left(\limsup_n F_n\right)_E^c \text{ et } \liminf_n (F_n)_E^c \subset \left(\limsup_n F_n\right)_E^c.$$

De la même manière on peut montrer que $\left(\liminf_n F_n\right)_E^c = \limsup_n (F_n)_E^c$.

■

Corollaire 1.1.2 *De la Proposition 1.1.3 et le Lemme 1.1.1 on trouve*

$$\liminf_n (F_n)_E^c \subset \limsup_n (F_n)_E^c.$$

Définition 1.1.17 *Soit E un ensemble et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de parties de E. On dit que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite $F \in \mathcal{P}(E)$ si on a*

$$\limsup_n F_n = \liminf_n F_n.$$

Dans ce cas, on écrit

$$F = \lim_n F_n = \limsup_n F_n = \liminf_n F_n.$$

Définition 1.1.18 *Soit E un ensemble et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de parties de E. On dit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante (respectivement décroissante) si $F_n \subset F_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (respectivement $F_{n+1} \subset F_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$).*

On dit que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Proposition 1.1.8 *Soit E un ensemble et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite monotone de parties de E. Alors $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite F, c'est à dire,*

$$F = \lim_n F_n = \limsup_n F_n = \liminf_n F_n.$$

Démonstration. Soient E un ensemble et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite monotone de parties de E. Alors

1) Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, alors $F_n \subset F_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, donc

$$\bigcap_{k\geq n} F_k = F_n \text{ et } \bigcup_{k\geq n} F_k = \bigcup_{k\geq 1} F_k.$$

Donc

$$\liminf_n F_n = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} F_k = \bigcup_{n\geq 1} F_n$$

et

$$\limsup_n F_n = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} F_k = \bigcup_{n\geq 1} F_n.$$

D'où

$$\lim_n F_n = \limsup_n F_n = \liminf_n F_n.$$

2) Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, alors $F_{n+1} \subset F_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, donc $(F_n)^c_E \subset (F_{n+1})^c_E$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, donc $\left((F_n)^c_E\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, alors d'après 1) on a $\limsup_n (F_n)^c_E = \liminf_n (F_n)^c_E$. En utilisant le Lemme 1.1.1 on trouve

$$\left(\liminf_n F_n\right)^c = \limsup_n (F_n)^c_E = \liminf_n (F_n)^c_E = \left(\limsup_n F_n\right)^c,$$

d'où

$$\liminf_n F_n = \limsup_n F_n.$$

■

Définition 1.1.19 *Soit E, F deux ensembles, G un sous-ensemble de E et H un sous-ensemble de F. Soit l'application $f : E \longrightarrow F$.*

• *On appelle image directe de G par f l'ensemble*

$$f(G) = \{y \in F, \exists x \in G, f(x) = y\} = \{f(x), x \in G\}.$$

• *On appelle image réciproque de H par f l'ensemble $f^{-1}(H) = \{x \in E, f(x) \in H\}$.*

Exemple 1.1.11 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *l'application définie par* $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *et soient* $G = [0,3]$ *et* $H = [3,9]$, *alors* $f(G) = f([0,3]) = [0,9]$ *et* $f^{-1}(H) = f^{-1}([3,9]) = \left[-3, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, 3\right]$.

Proposition 1.1.9 *Soit* E, F *deux ensembles et* $f : E \to F$ *une application. Alors*

1) $f(G) \subset f(H)$, $\forall G \subset H \subset E$.

2) $f^{-1}(I \cap J) = f^{-1}(I) \cap f^{-1}(J)$ *et* $f^{-1}(I \cup J) = f^{-1}(I) \cup f^{-1}(J)$, $\forall I, J \subset F$.

3) $f(G \cap H) \subset f(G) \cap f(H)$ *et* $f(G \cup H) = f(G) \cup f(H)$, $\forall G, H \subset E$.

4) $f\left(f^{-1}(I)\right) \subset I$, $\forall I \subset F$.

5) $G \subset f^{-1}\left(f(G)\right)$, $\forall G \subset E$.

6) $f^{-1}\left(I_F^c\right) = \left(f^{-1}(I)\right)_E^c$, $\forall I \subset F$.

Démonstration.

1) Supposons que $G \subset H \subset E$. Soit $y \in f(G)$, alors il existe $x \in G$ tel que $y = f(x)$, donc $x \in H$, alors $y \in f(H)$, d'où $f(G) \subset f(H)$.

2) Soit $I, J \subset F$. Alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(I \cap J) &= \{x \in E,\ f(x) \in I \cap J\} \\ &= \{x \in E,\ f(x) \in I\} \cap \{x \in E,\ f(x) \in J\} \\ &= f^{-1}(I) \cap f^{-1}(J) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f^{-1}(I \cup J) &= \{x \in E,\ f(x) \in I \cup J\} \\ &= \{x \in E,\ f(x) \in I\} \cup \{x \in E,\ f(x) \in J\} \\ &= f^{-1}(I) \cup f^{-1}(J). \end{aligned}$$

3) Supposons que $G, H \subset E$. Soit $y \in f(G \cap H)$, alors il existe $x \in G \cap H$ tel que $y = f(x)$, donc $y = f(x)$, $x \in G$ et $y = f(x)$, $x \in H$, alors $y \in f(G) \cap f(H)$. D'où

$f(G \cap H) \subset f(G) \cap f(H)$.

Et

$$\begin{aligned} f(G \cup H) &= \{y \in F,\ y = f(x),\ x \in G \cup H\} \\ &= \{y \in F,\ y = f(x),\ x \in G \text{ ou } x \in H\} \\ &= \{y \in F,\ y = f(x),\ x \in G\} \cup \{y \in F,\ y = f(x),\ x \in H\} \\ &= f(G) \cup f(H). \end{aligned}$$

4) Supposons que $I \subset F$. Soit $y \in f\left(f^{-1}(I)\right)$, alors $y = f(x),\ x \in f^{-1}(I)$, donc $y = f(x),\ x \in E,\ f(x) \in I$, d'où $y = f(x) \in I$, c'est à dire $f(f^{-1}(I)) \subset I$.

5) Supposons que $G \subset E$. Soit $x \in G$, alors $f(x) \in f(G)$, donc $x \in f^{-1}(f(G))$, c'est à dire $G \subset f^{-1}(f(G))$.

6) Soit $I \subset F$. Alors

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(I_F^c\right) &= \left\{x \in E,\ f(x) \in I_F^c\right\} \\ &= \{x \in E,\ f(x) \in F \text{ et } f(x) \notin I\} \\ &= \left\{x \in E,\ x \notin f^{-1}(I)\right\} \\ &= \left(f^{-1}(I)\right)_E^c. \end{aligned}$$

■

Proposition 1.1.10 *Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1) *f est injective.*

2) $f^{-1}(f(G)) = G,\ \forall G \subset E$.

3) $f(G \cap H) = f(G) \cap f(H),\ \forall G, H \subset E$.

4) $f(G) \cap f(H) = \emptyset,\ \forall G, H \subset E$, *avec* $G \cap H = \emptyset$.

5) $f(H \setminus G) = f(H) \setminus f(G),\ \forall G \subset H \subset E$.

Démonstration.

1)$\Longrightarrow$2) ? Supposons que f est injective. D'après la Proposition 1.1.9 on a toujours $G \subset f^{-1}(f(G))$, donc il suffit de montrer que $f^{-1}(f(G)) \subset G$. Soit $x \in f^{-1}(f(G))$, alors $f(x) \in f(G)$, donc $\exists x' \in G$, $f(x) = f(x')$, mais f est injective, donc $x = x' \in G$. D'où 2).

2)$\Longrightarrow$1) ? Soient $x_1, x_2 \in E$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$, alors d'après 2) on a $f^{-1}(f(\{x_1\})) = f^{-1}(\{f(x_1)\}) = \{x_1\}$ et $f^{-1}(f(\{x_2\})) = f^{-1}(\{f(x_2)\}) = \{x_2\}$. Mais $f(x_1) = f(x_2)$, donc $x_1 = x_2$ et f est injective.

1)$\Longrightarrow$3) ? Supposons que f est injective. D'après la Proposition 1.1.9, il suffit de montrer que $f(G) \cap f(H) \subset f(G \cap H)$. Soit $y \in f(G) \cap f(H)$, alors $y \in f(G)$ et $y \in f(H)$, donc $\exists x \in G$, $y = f(x)$ et $\exists x' \in H$, $y = f(x')$. Mais f est injective, donc $x = x' \in G \cap H$ et $y = f(x)$, d'où $y \in f(G \cap H)$.

3)$\Longrightarrow$4) ? Supposons que $G \cap H = \emptyset$. D'après 3) on a $f(G \cap H) = f(G) \cap f(H) = f(\emptyset) = \emptyset$.

4)$\Longrightarrow$5) ? Soit $G \subset H$, alors $H \setminus G \subset H$. En appliquant 1) de la Proposition 1.1.9 on trouve $f(H \setminus G) \subset f(H)$. D'autre part on a $G \cap (H \setminus G) = \emptyset$, alors d'après 4) on obtient $f(H \setminus G) \cap f(G) = \emptyset$, donc $f(H \setminus G) \subset f(H) \setminus f(G)$.

Pour l'autre inclusion, supposons que $f(H) \setminus f(G) \neq \emptyset$. Soit $y \in f(H) \setminus f(G)$, alors $y \in f(H)$ et $y \notin f(G)$, donc $\exists x \in H$, $y = f(x)$ et $x \notin G$. Alors $x \in H \setminus G$ et $y = f(x)$, d'où $f(H) \setminus f(G) \subset f(H \setminus G)$.

5)$\Longrightarrow$1) ? Montrons que si $x_1, x_2 \in E$ tel que $x_1 \neq x_2$, alors $f(x_1) \neq f(x_2)$ c'est à dire f est injective. Soit $x_1 \neq x_2$. En appliquant 5) avec $H = \{x_1, x_2\}$ et $G = \{x_2\}$ on trouve $G \subset H$ et $f(H \setminus G) = f(H) \setminus f(G)$, donc $f(\{x_1\}) = f(\{x_1, x_2\}) \setminus f(\{x_2\})$, alors $\{f(x_1)\} = \{f(x_1), f(x_2)\} \setminus \{f(x_2)\}$, d'où $f(x_1) \neq f(x_2)$, car $\{f(x_1)\} \neq \emptyset$.

■

Définition 1.1.20 *Soit E un ensemble et $A \subset E$. La fonction $1_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in A, \\ 0, & si\ x \in A_E^c. \end{cases}$$

est appelée fonction caractéristique de A.

Proposition 1.1.11 *Soit E un ensemble et $A, B \subset E$. La fonction caractéristique a les propriétés suivantes*

1) $1_{A_E^c} = 1 - 1_A$.

2) $1_{A \cap B} = 1_A 1_B$.

3) $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$.

4) $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B$ *si A et B sont disjoints.*

5) $1_{A \times B}(x, y) = 1_A(x) 1_B(y)$, $\forall (x, y) \in E^2$.

Démonstration.

1) Si $x \in A$, alors $x \notin A_E^c$, donc $1_{A_E^c}(x) = 0 = 1 - 1 = 1 - 1_A(x)$.

Si $x \notin A$, alors $x \in A_E^c$, donc $1_{A_E^c}(x) = 1 = 1 - 0 = 1 - 1_A(x)$.

2) Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $1_{A \cap B}(x) = 1 = 1 \times 1 = 1_A(x) 1_B(x)$.

Si $x \notin A \cap B$, alors $x \notin A$ ou $x \notin B$, donc $1_{A \cap B}(x) = 0 = 1_A(x) 1_B(x)$.

De la même manière que 2) on peut montrer 3), 4) et 5).

■

1.2 Algèbres et tribus

Définition 1.2.1 *Soit E un ensemble et T une famille de sous-ensembles de E. On dit que T est une tribu sur E si on a*

1) $\emptyset \in T$.

2) *Pour toute famille dénombrable $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de T on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \in T$, c'est à dire T est stable par union dénombrable.*

3) *Si $F \in T$, alors $F_E^c \in T$, c'est à dire T est stable par passage au complémentaire.*

Exemple 1.2.1 *Soit E un ensemble, alors $\{\emptyset, E\}$ et $\mathcal{P}(E)$ sont des tribus sur E.*

Remarque 1.2.1 *Si E est un ensemble et T est une tribu sur E, alors les éléments de T sont appelés ensembles mesurables et l'espace (E, T) est dit espace mesurable.*
Si E est l'univers des possibles et T est une tribu sur E, alors les éléments de T sont appelés evenements et l'espace (E, T) est dit espace probabilisable.

Proposition 1.2.1 *Soit E un ensemble et T une tribu sur E. Alors*

1) $E \in T$.

2) *Pour toute famille dénombrable $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de T on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \in T$, c'est à dire T est stable par intersection dénombrable.*

3) *Si $F, G \in T$, alors $F \setminus G \in T$ et $F \triangle G \in T$.*

Démonstration. Soit E un ensemble et T une tribu sur E.

1) On a $E = \emptyset^c_E$ et $\emptyset \in T$, donc $E \in T$ car T est stable par passage au complémentaire.

2) Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On a $(F_n)^c_E \in T$, $\forall n \in \mathbb{N}$ car T est stable par passage au complémentaire, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (F_n)^c_E\right)^c_E \in T$ car T est stable par union dénombrable.

3) On a $F \setminus G = F \cap G^c_E$ et $F \triangle G = (F \cap G^c_E) \cup (G \cap F^c_E)$. En utilisant 2) et la stabilité de T par passage au complémentaire et par union dénombrable on trouve que $F \setminus G \in T$ et $F \triangle G \in T$.

■

Proposition 1.2.2 *Soit E un ensemble et $\{T_i\}_{i\in I}$ une famille de tribus sur E. Alors $T = \bigcap_{i\in I} T_i$ est une tribu sur E.*

Démonstration. D'après la définition de T on a

$$T = \{F \subset E,\ F \in T_i,\ \forall i \in I\}.$$

Alors

1) Pour tout $i \in I$, T_i est une tribu sur E, alors $\emptyset \in T_i$, $\forall i \in I$, donc $\emptyset \in T$.

2) Soit $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de T, alors $F_n \in T_i$, $\forall i \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in T_i$, $\forall i \in I$, car T_i est une tribu sur E pour tout $i \in I$, d'où $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in T$ et T est stable par union dénombrable.

3) Soit $F \in T$, alors $F \in T_i$, $\forall i \in I$, mais pour tout $i \in I$, T_i est une tribu sur E donc elle est stable par passage au complémentair, alors $F_E^c \in T_i$, $\forall i \in I$, d'où $F_E^c \in T$ et T est stable par passage au complémentaire.

De 1)-3) on trouve que l'intersection de tribus sur E est une tribu sur E.

■

Définition 1.2.2 *Soit E un ensemble et $C \subset \mathcal{P}(E)$. On appelle tribu engendrée par C l'intersection de toutes les tribus sur E contenant C et on la note $\sigma(C)$.*

Remarque 1.2.2 **1)** *La tribu engendrée par $C \subset \mathcal{P}(E)$ est la plus petite tribu contenant C.*

2) *Si $C_1 \subset C_2 \subset \mathcal{P}(E)$, alors $\sigma(C_1) \subset \sigma(C_2)$.*

Définition 1.2.3 *Soit E un ensemble et $\mathcal{A}$ une famille de sous-ensembles de E. On dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre sur E si on a*

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

2) *Pour tout $F, G \in \mathcal{A}$ on a $F \cup G \in \mathcal{A}$, c'est à dire $\mathcal{A}$ est stable par unions finies.*

3) *Si $F \in \mathcal{A}$, alors $F_E^c \in \mathcal{A}$, c'est à dire $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire.*

Remarque 1.2.3 *Toute tribu est une algèbre, la réciproque est fausse.*

Proposition 1.2.3 *Soit E un ensemble et $\mathcal{A}$ une algèbre sur E tel que si $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{A}$ est une suite croissante, on a $\bigcup_{n\geq 1} G_n \in \mathcal{A}$. Alors $\mathcal{A}$ est une tribu sur E.*

Démonstration. D'après la définition d'une algèbre, pour montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur E il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{A}$, donc si on pose $G_n = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ on obtient que $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{A}$ est une suite croissante, donc $\bigcup_{n\geq 1} G_n \in \mathcal{A}$, mais $\bigcup_{n\geq 1} F_n = \bigcup_{n\geq 1} G_n \in \mathcal{A}$, d'où $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable et donc elle est une tribu sur E. ■

Définition 1.2.4 *Soit E un ensemble et $\tau \subset \mathcal{P}(E)$. On dit que τ est une topologie sur E si elle vérifie les conditions suivantes*

1) $E, \emptyset \in \tau$.

2) *Toute union quelconque d'éléments de τ est un élément de τ.*

3) *Toute intersection finie d'éléments de τ est un élément de τ.*

Remarque 1.2.4 *Si E est un ensemble et τ est une topologie sur E, alors les éléments de τ sont appelés ouverts et l'espace (E, τ) est appelé espace topologique.*

Définition 1.2.5 *Soit (E, τ) un espace topologique. On appelle tribu borélienne sur E la tribu engendrée par τ et on la note $\mathcal{B}(E)$ et les éléments de $\mathcal{B}(E)$ sont appelés ensembles boréliens.*

Lemme 1.2.1 *Soit $\mathcal{I}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Alors $\mathcal{I}$ est l'union dénombrable d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Il suffit de considérer l'ensemble $F = \{(p,q) \in \mathbb{Q}^2,\ p < q,\ ]p,q[\subset \mathcal{I}\}$ et utiliser la densité de l'ensemble $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ pour obtenir que $\mathcal{I} = \bigcup\limits_{p,q \in F}]p,q[$. ■

Proposition 1.2.4 *La famille $\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}$ engendre la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble de tous les ouverts de $\mathbb{R}$, c'est à dire $\mathcal{O}$ est la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$. Alors $\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{O}$, donc $\sigma\left(\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}\right) \subset \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Pour montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma\left(\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}\right)$, il suffit de montrer que $\mathcal{O} \subset \sigma\left(\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}\right)$ car $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{O}$. Soit $I \in \mathcal{O}$, alors d'après le Lemme 1.2.1 on a $I = \bigcup\limits_{n \geq 1}]a_n, b_n[$, avec pour tout $n \geq 1$, a_n, $b_n \in \mathbb{R}$. D'autre part, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ on a

$$]x,y[=]-\infty,y[\cap]x,+\infty[\text{ et } [y,+\infty[=\bigcap_{n\geq 1}\left]y-\frac{1}{n},+\infty\right[$$

avec

$$\left]y-\frac{1}{n},+\infty\right[\in \{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\} \subset \sigma(\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}),$$

donc

$$[y, +\infty[\ \in \sigma(\{]a, +\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}),$$

car $\sigma(\{]a, +\infty[,\ a \in \mathbb{R}\})$ est stable par intersection dénombrable. Donc

$$]-\infty, y[= ([y, +\infty[)^c_{\mathbb{R}} \in \sigma(\{]a, +\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}) \text{ et }]x, +\infty[\in \sigma(\{]a, +\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}),$$

alors

$$]x, y[\in \sigma(\{]a, +\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}) \text{ et } I \in \sigma(\{]a, +\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}),$$

d'où $O \subset \sigma\left(\{]a, +\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}\right)$ et la démonstration est complète. ■

1.3 Mesure positive

Définition 1.3.1 *Soit (E, T) un espace mesurable. On appelle mesure positive, ou seulement mesure, sur E toute application $\mu : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant*

1) $\mu(\emptyset) = 0$.

2) *Pour toute famille dénombrable $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ d'ensembles disjoints deux à deux on a $\mu\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n)$, c'est à dire μ est $\sigma-$additive.*

Définition 1.3.2 *Soit (E, T) un espace mesurable et $\mu : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une mesure.*

• *On dit que μ est une mesure finie si $\mu(E) < +\infty$.*

• *On dit que μ est une probabilité si $\mu(E) = 1$.*

Remarque 1.3.1 *Soit (E, T) un espace mesurable (respectivement espace probabilisable) et μ une mesure (respectivement une probabilité), alors le triplet (E, T, μ) est appelé espace mesuré (respectivement espace probabilisé).*

Définition 1.3.3 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré. On dit que μ est $\sigma-$finie s'il existe une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ et $\mu(F_n) < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Exemple 1.3.1 **1)** *Soit E un ensemble, $T = \mathcal{P}(E)$ et $\mu : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une application avec pour tout $F \in T$,*

$$\mu(F) = \begin{cases} Card(F), & si\ F\ est\ fini, \\ +\infty, & sinon. \end{cases}$$

Alors μ est une mesure sur E et est dite mesure de comptage, de plus cette mesure est finie si E est fini et elle est $\sigma-$finie si E est dénombrable.

2) *Soit (E, T) un espace mesurable et $a \in E$. Alors l'application $\delta_a : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par*

$$\delta_a(F) = \begin{cases} 1, & si\ a \in F, \\ 0, & si\ a \notin F. \end{cases}$$

est une mesure sur E appelée mesure de Dirac, de plus cette mesure est une probabilité.

3) *Soit $E = \mathbb{N}^\star$, $T = \mathcal{P}(\mathbb{N}^\star)$ et $\mu : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une application telle que pour tout $F \in T$,*

$$\mu(F) = \begin{cases} \sum\limits_{n \in F} \frac{1}{n^2}, & si\ F\ est\ fini, \\ +\infty, & sinon. \end{cases}$$

Alors μ n'est pas une mesure car elle n'est pas $\sigma-$additive.
En effet, soit $F_n = \{n\}$, $n \in \mathbb{N}^\star$. Alors $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^\star} \subset T$ est une famille de parties de $\mathbb{N}^\star$ disjointes deux à deux, mais $\mu\left(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^\star} F_n\right) \neq \sum\limits_{n \in \mathbb{N}^\star} \mu(F_n)$.

1.4 Propriétés des mesures, mesure extérieure, mesure complète

Proposition 1.4.1 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré. Si $F, G \in T$ avec $F \subset G$, alors $\mu(F) \leq \mu(G)$. (C'est la monotonie).*

Démonstration. Soient $F, G \in T$ tel que $F \subset G$. On a

$$G = F \cup (G \setminus F) \text{ avec } F \cap (G \setminus F) = \emptyset$$

et

$$G \setminus F = G \cap F_E^c \in T, \text{ car } T \text{ est une tribu sur } E,$$

donc

$$\mu(G) = \mu(F) + \mu(G \setminus F) \geq \mu(F).$$

■

Remarque 1.4.1 *Si $F, G \in T$ avec $F \subset G$ et $0 \leq \mu(F) \leq \mu(G) < +\infty$, alors $\mu(G \setminus F) = \mu(G) - \mu(F)$.*

Proposition 1.4.2 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré. Alors la mesure μ a les propriétés suivantes*

1) *Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, alors $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n)$. (C'est la $\sigma-$sous-additivité).*

2) *Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $F_n \subset F_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(F_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n)$.*

3) *Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $F_{n+1} \subset F_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, et telle que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\mu\left(F_{n_0}\right) < +\infty$, alors $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(F_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n)$.*

Démonstration.

1) Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On considère la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$G_0 = F_0 \text{ et } G_n = F_n \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} G_i\right), \ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Donc $G_n \in T$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, car $G_n = F_n \cap \bigcap_{i=0}^{n-1} (G_i)_E^c$ et T est stable par passage au complémentaire et par intersection dénombrable, de plus

$$G_i \cap G_j = \emptyset \text{ si } i \neq j \text{ et } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n.$$

En utilisant la $\sigma-$additivité de μ on trouve

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(G_n).$$

Mais $G_n \subset F_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donc la monotonie de μ nous donne

$$\mu(G_n) \leq \mu(F_n) \text{ et } \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n).$$

2) Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $F_n \subset F_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En utilisant la monotonie de μ on trouve

$$\mu(F_n) \leq \mu(F_{n+1}),\ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

donc $(\mu(F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathbb{R}$ et donc elle converge vers sa borne supérieure, c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(F_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\mu(F_n) \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{1.2}$$

Soit $F = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ et $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $G_0 = F_0$ et $G_n = F_n \cap (F_{n-1})^c_E$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Donc $G_n \in T$, car T est stable par passage au complémentaire et par intersection dénombrable, de plus $G_i \cap G_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n$.
En utilisant la $\sigma-$additivité de μ on obtient

$$\mu(F) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(G_n) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{p=0}^{n}\mu(G_p).$$

Mais $F_n = \bigcup\limits_{p=0}^{n} G_p$, alors $\sum\limits_{p=0}^{n}\mu(G_p) = \mu(F_n)$, d'où $\mu(F) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\mu(F_n)$.

3) Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $F_{n+1} \subset F_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et telle que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\mu(F_{n_0}) < +\infty$. En utilisant la monotonie de μ on trouve

$$\mu(F_{n+1}) \leq \mu(F_n),\ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.3}$$

donc $(\mu(F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de $\mathbb{R}$ et donc elle converge vers sa borne inférieure, c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(F_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\mu(F_n) \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{1.4}$$

Soit $F = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ et $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$G_n = F_{n_0} \setminus F_n = F_{n_0} \cap (F_n)^c_E,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc $G_n \in T$, car T est stable par passage au complémentaire et par intersection dénombrable, de plus $G_n \subset G_{n+1}$, $\forall n \geq n_0$. D'autre part, on a $F \subset F_n$, donc d'après la $\sigma-$additivité de μ et (1.3) on obtient

$$\mu(F) \leq \mu(F_n) \leq \mu(F_{n_0}) < +\infty,\ \forall n \geq n_0. \tag{1.5}$$

Soit $G = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n$, alors

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (F_{n_0} \setminus F_n) = F_{n_0} \setminus \bigcap_{n\geq n_0} F_n = F_{n_0} \setminus F.$$

En appliquant la question précédente à la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on trouve

$$\mu(G) = \mu(F_{n_0} \setminus F) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu(G_n) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu(F_{n_0} \setminus F_n). \tag{1.6}$$

De (1.5) et la Remarque 1.4.1 on obtient

$$\mu(F_{n_0} \setminus F) = \mu(F_{n_0}) - \mu(F) \tag{1.7}$$

et

$$\mu(F_{n_0} \setminus F_n) = \mu(F_{n_0}) - \mu(F_n). \tag{1.8}$$

Substituons (1.7) et (1.8) dans (1.6) on trouve $\mu(F) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mu(F_n)$.

■

Définition 1.4.1 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré et $F \subset E$. On dit que F est négligeable s'il existe un ensemble mesurable G tel que $F \subset G$ et $\mu(G) = 0$.*

Proposition 1.4.3 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{P}(E)$ une suite d'ensembles négligeables, alors $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} F_n$ est négligeable.*

Démonstration. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{P}(E)$ une suite d'ensembles négligeables, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, F_n est négligeable, c'est à dire

$$\exists G_n \in T,\ F_n \subset G_n \text{ et } \mu(G_n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Alors

$$G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n \in T \text{ et } \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n.$$

En utilisant la monotonie et la $\sigma-$sous-additivité de μ on obtient

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(G_n) = 0.$$

D'où $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} F_n$ est négligeable. ■

Définition 1.4.2 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré. On dit que μ est complète si tous les sous-ensembles négligeables de E sont mesurables et dans ce cas l'espace (E, T, μ) est dit complet.*

Définition 1.4.3 *Soit E un ensemble et $\mu^\star : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une application. On dit que $\mu^\star$ est une mesure extérieure sur E si on a*

1) $\mu^\star(\emptyset) = 0$.

2) *Si $F, G \in \mathcal{P}(E)$ tel que $F \subseteq G$, alors $\mu^\star(F) \leq \mu^\star(G)$. (C'est la monotonie).*

3) *Pour toute suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{P}(E)$ on a $\mu^\star\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^\star} F_n\right) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^\star} \mu^\star(F_n)$. (C'est la $\sigma-$sous-additivité.)*

Remarque 1.4.2 **1)** *Toute mesure positive sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{P}(E))$ est une mesure extérieure sur E, mais la réciproque est fausse.*

2) *Si $\mu^\star$ est une mesure extérieure sur E et si elle est $\sigma-$additive, alors $\mu^\star$ est une mesure positive sur $\mathcal{P}(E)$.*

Proposition 1.4.4 *Soit $\mu^\star$ une mesure extérieure sur l'ensemble non vide E. Alors pour toutes parties A et F de E on a*

$$\mu^\star(A) \leq \mu^\star(A \cap F) + \mu^\star(A \cap F^c_E). \tag{1.9}$$

Démonstration. Soit E un ensemble non vide et $\mu^\star$ une mesure extérieure sur E. Alors pour toutes parties A et F de E on a

$$A = (A \cap F) \cup (A \cap F^c).$$

En utilisant la $\sigma-$sous-additivité de $\mu^\star$ on trouve

$$\mu^\star(A) \leq \mu^\star(A \cap F) + \mu^\star(A \cap F^c_E).$$

■

Définition 1.4.4 *Soit $\mu^\star$ une mesure extérieure sur l'ensemble non vide E. On dit que le sous-ensemble $F \subset E$ est $\mu^\star$-mesurable ou mesurable au sens de Carathéodory si on a*

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap F) + \mu^\star(A \cap F^c_E),\ \forall A \subset E.$$

Remarque 1.4.3 *Soit E un ensemble non vide, $\mu^\star$ une mesure extérieure sur E et $F \subset E$. Se référant à* (1.9), *pour montrer que F soit $\mu^\star$-mesurable il suffit de montrer que*

$$\mu^\star(A) \geq \mu^\star(A \cap F) + \mu^\star(A \cap F_E^c),\ \forall A \subset E. \tag{1.10}$$

Théorème 1.4.1 *Soit E un ensemble non vide, $\mu^\star$ une mesure extérieure sur E et $\mathcal{M}^\star$ l'ensemble des parties $\mu^\star-$mesurables. Alors $\mathcal{M}^\star$ est une tribu sur E et la restriction de $\mu^\star$ sur $\mathcal{M}^\star$ est une mesure positive.*

Démonstration.

1) $\emptyset \in \mathcal{M}^\star$ car pour tout $A \subset E$ on a

$$\begin{aligned} \mu^\star(A) &= \mu^\star(A \cap E) \\ &= \mu^\star(\emptyset) + \mu^\star(A \cap \emptyset_E^c) \\ &= \mu^\star(A \cap \emptyset) + \mu^\star(A \cap \emptyset_E^c). \end{aligned}$$

Soit $F \in \mathcal{M}^\star$, alors pour tout $A \subset E$ on a

$$\begin{aligned} \mu^\star(A) &= \mu^\star(A \cap F) + \mu^\star(A \cap F_E^c) \\ &= \mu^\star(A \cap (F_E^c)_E^c) + \mu^\star(A \cap F_E^c) \\ &= \mu^\star(A \cap F_E^c) + \mu^\star(A \cap (F_E^c)_E^c), \end{aligned}$$

c'est à dire $F_E^c \in \mathcal{M}^\star$. Donc $\mathcal{M}^\star$ est stable par passage au complémentaire. Maintenant, montrons que $\mathcal{M}^\star$ est stable par union dénombrable. Tout d'abord, montrons que $\mathcal{M}^\star$ est stable par union finie. Soient $F_1, F_2 \in \mathcal{M}^\star$, alors d'après la Remarque 1.4.3, pour montrer que $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{M}^\star$ il suffit de montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ on a

$$\mu^\star(A) \geq \mu^\star(A \cap (F_1 \cup F_2)) + \mu^\star(A \cap (F_1 \cup F_2)_E^c).$$

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, alors

$$A \cap (F_1 \cup F_2) = (A \cap F_1) \cup (A \cap F_2)$$

et

$$A \cap F_2 = (A \cap F_2 \cap F_1) \cup (A \cap F_2 \cap (F_1)_E^c).$$

Donc

$$\begin{aligned} A \cap (F_1 \cup F_2) &= (A \cap F_1) \cup (A \cap F_2 \cap F_1) \cup (A \cap F_2 \cap (F_1)_E^c) \\ &= (A \cap F_1) \cup (A \cap F_2 \cap (F_1)_E^c), \end{aligned}$$

car $A \cap F_2 \cap F_1 \subset A \cap F_1$, alors

$$\mu^\star(A \cap (F_1 \cup F_2)) = \mu^\star((A \cap F_1) \cup (A \cap F_2 \cap (F_1)_E^c)).$$

En utilisant la $\sigma-$sous-additivité de $\mu^\star$ on obtient

$$\mu^\star(A \cap (F_1 \cup F_2)) \leq \mu^\star(A \cap F_1) + \mu^\star(A \cap F_2 \cap (F_1)_E^c),$$

donc

$$\mu^\star(A\cap(F_1\cup F_2))+\mu^\star(A\cap(F_1\cup F_2)_E^c) \leq \mu^\star(A\cap F_1)+\mu^\star(A\cap F_2\cap(F_1)_E^c)+\mu^\star(A\cap(F_2)_E^c\cap(F_1)_E^c). \tag{1.11}$$

Comme F_1, $F_2 \in \mathcal{M}^\star$, alors

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap F_1) + \mu^\star(A \cap (F_1)_E^c) \tag{1.12}$$

et

$$\mu^\star(A \cap (F_1)_E^c) = \mu^\star(A \cap (F_1)_E^c \cap F_2) + \mu^\star(A \cap (F_1)_E^c \cap (F_2)_E^c). \tag{1.13}$$

De (1.11), (1.12) et (1.13) on trouve que

$$\mu^\star(A \cap (F_1 \cup F_2)) + \mu^\star(A \cap (F_1 \cup F_2)_E^c) \leq \mu^\star(A),$$

c'est à dire $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{M}^\star$.

Montrons que si $(F_i)_{1\leq i\leq n} \subset \mathcal{M}^\star$ avec $F_i \cap F_j = \emptyset$, si $i \neq j$, alors

$$\mu^\star\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^\star(A \cap F_i),\ \forall A \in \mathcal{P}(E). \tag{1.14}$$

Il suffit de montrer (1.14) pour $n = 2$ et par récurrence on peut montrer le cas général. Soient $F_1, F_2 \in \mathcal{M}^\star$ tel que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, alors pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ on a

$$\begin{aligned}\mu^\star(A \cap (F_1 \cup F_2)) &= \mu^\star\left((A \cap F_1) \cup (A \cap F_2)\right)\\ &= \mu^\star\left(((A \cap F_1) \cup (A \cap F_2)) \cap F_1\right)\\ &+ \mu^\star\left(((A \cap F_1) \cup (A \cap F_2)) \cap (F_1)^c_E\right), \text{ car } F_1 \in \mathcal{M}^\star\\ &= \mu^\star\left((A \cap F_1)\right) + \mu^\star\left((A \cap F_2)\right), \text{ car } F_1 \cap F_2 = \emptyset.\end{aligned}$$

Maintenant, on va montrer que $\mathcal{M}^\star$ est stable par union dénombrable. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{M}^\star$ et $F = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^\star} F_n$. On définit la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par

$$H_1 = F_1 \text{ et } H_n = F_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} H_k\right), \forall n \geq 2,$$

donc

$$F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} H_n \quad \text{et } H_n = F_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} H_k\right)^c_E.$$

D'après la stabilité de $\mathcal{M}^\star$ par union finie et par passage au complémentaire on obtient $H_n \in \mathcal{M}^\star$ et comme $H_n \cap H_m = \emptyset$ si $n \neq m$ alors (1.14) nous donne

$$\begin{aligned}\mu^\star(A) &= \mu^\star\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} H_k\right)\right) + \mu^\star\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} H_k\right)^c_E\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu^\star(A \cap H_k) + \mu^\star\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} H_k\right)^c_E\right).\end{aligned}$$

Mais $\bigcup\limits_{k=1}^{n} H_k \subset F$, donc $F^c_E \subset \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} H_k\right)^c_E$, alors $A \cap F^c_E \subset A \cap \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} H_k\right)^c_E$. En utilisant la monotonie de $\mu^\star$ on trouve

$$\mu^\star(A \cap F^c_E) \leq \mu^\star\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} H_k\right)^c_E\right).$$

Donc

$$\mu^\star(A) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu^\star(A \cap H_k) + \mu^\star(A \cap F^c_E).$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ on trouve

$$\mu^\star(A) \geq \mu^\star(A \cap F) + \mu^\star(A \cap F^c_E).$$

Alors $F \in \mathcal{M}^\star$ et $\mathcal{M}^\star$ est stable par union dénombrable, donc $\mathcal{M}^\star$ est une tribu sur E.

2) D'après la Remarque 1.4.2 pour montrer que $\mu^\star$ est une mesure positive, il suffit de montrer que $\mu^\star$ est $\sigma-$additive. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{M}^\star$ tel que $F_i \cap F_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} F_n$, alors par la $\sigma-$sous-additivité de $\mu^\star$ on a

$$\mu^\star(F) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^\star(F_n). \tag{1.15}$$

D'autre part, si on prend $A = E$ dans (1.14) on trouve

$$\mu^\star\left(\bigcup_{n=1}^{k} F_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \mu^\star(F_n).$$

Mais, $\mu^\star$ est monotone et $\bigcup_{n=1}^{k} F_n \subset F$, donc

$$\mu^\star\left(\bigcup_{n=1}^{k} F_n\right) \leq \mu^\star(F),$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{k} \mu^\star(F_n) \leq \mu^\star(F).$$

En passant à la limite dans cette dernière inégalité quand k tend vers l'infini on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^\star(F_n) \leq \mu^\star(F). \tag{1.16}$$

De (1.16) et (1.15) on trouve que $\mu^\star$ est $\sigma-$additive donc $\mu^\star$ est une mesure positive sur $\mathcal{M}^\star$.

■

1.5 La mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens

Théorème 1.5.1 *[1] Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. Alors il existe une unique mesure, notée λ définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ on a $\lambda(]a, b]) = b - a$.*
Cette application est appelée mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Proposition 1.5.1 *[1] Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors*

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda(\{x\}) = 0$.

2) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ on a $\lambda([a, b]) = \lambda(]a, b]) = \lambda([a, b[) = \lambda(]a, b[) = b - a$.

Proposition 1.5.2 *[1] Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et A un ensemble dénombrable. Alors $\lambda(A) = 0$.*

Proposition 1.5.3 *[1] Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors*

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \lambda(A + \alpha) = \lambda(A).$$

C'est à dire la mesure de Lebesgue est invariante par translation.

Proposition 1.5.4 *[1] Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors*

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(-A) = \lambda(A).$$

C'est à dire la mesure de Lebesgue est invariante par symétrie.

Proposition 1.5.5 *[1] Soient λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et f une application affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \alpha x + \beta$, où $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(f(A)) = |\alpha| \lambda(A).$$

1.6 Exercices

Exercice 1.6.1 *Soit E, F et G trois ensembles. Montrer que*

a) $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$.

b) $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$.

Exercice 1.6.2 *Soit E un ensemble et F et G deux sous-ensembles de E. Montrer que*

1) $\left(F^c_E\right)^c_E = F$.

2) $(F \cup G)^c_E = F^c_E \cap G^c_E$.

3) $(F \cap G)^c_E = F^c_E \cup G^c_E$.

4) $F \setminus G = (F \cup G) \setminus G$.

Exercice 1.6.3 *Soit E, F et G trois ensembles. Montrer que*

a) $E \setminus (F \cup G) = ((E \cup G) \setminus F) \cap ((E \cup F) \setminus G)$.

b) $E \setminus (F \cup G) = (E \setminus F) \cap (E \setminus G)$.

c) $E \setminus (F \cap G) = (E \setminus F) \cup (E \setminus G)$.

d) $E \times (F \cup G) = E \times F \cup E \times G$.

e) $E \times (F \cap G) = E \times F \cap E \times G$.

Exercice 1.6.4 *Soit E un ensemble et F et G deux parties de E. Montrer que*

1) *Si $Card(E) = n \in \mathbb{N}$, alors $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.*

2) *Si $F \subset G$, alors $\mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(G)$.*

Exercice 1.6.5 *Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Montrer que si H et H' sont deux sous-ensembles de F tels que $H \subset H'$, alors $f^{-1}(H) \subset f^{-1}(H')$.*

Exercice 1.6.6 *On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 = y^2$.*

1) *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

2) *Déterminer* $\mathbb{R}/\mathcal{R}$.

Exercice 1.6.7 *Soit* E *un ensemble.*
I) Soit $\{T_i\}_{i\in I}$ *une famille de tribus sur* E *et* $T = \{A \subset E,\ A \in T_i,\ \forall i \in I\}$. *Montrer que* T *est une tribu sur* E.
2) Soit $A \subset \mathcal{P}(E)$ *et* T_A *l'intersection de toutes les tribus sur* E *contenant* A. *Montrer que* T_A *est la plus petite des tribus contenant* A.
3) Soit $A, B \subset \mathcal{P}(E)$ *et* T_A, T_B *les tribus engendrées par* A *et* B *respectivement. Montrer que si* $A \subset B$, *alors* $T_A \subset T_B$.

Exercice 1.6.8 *Soit* E, F *deux ensembles,* $f : E \to F$ *une application et* $B \subset \mathcal{P}(F)$. *Soit* f^{-1} *l'application définie de* $\mathcal{P}(F)$ *dans* $\mathcal{P}(E)$ *par* $f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}$.
1) Soit S *une tribu sur* F *et* $T_{f,S} = \{f^{-1}(B),\ B \in S\}$. *Montrer que* $T_{f,S}$ *est une tribu sur* E, *(c'est la tribu image réciproque).*
2) Soit T *une tribu sur* E *et* $S_{f,T} = \{B \subset F,\ f^{-1}(B) \in T\}$. *Montrer que* $S_{f,T}$ *est une tribu sur* F.

Exercice 1.6.9 *Soit* E *un ensemble.*
1) Montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ *est une algèbre si et seulement si*

(i) $E \in \mathcal{A}$.

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$.

2) Soit $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ *une famille d'algèbres sur* E. *Montrer que* $\bigcap\limits_{i\in I}\mathcal{A}_i = \{A \in \mathcal{P}(E),\ A \in \mathcal{A}_i,\ \forall i \in I\}$ *est une algèbre sur* E.

Exercice 1.6.10 *Soit* E *un ensemble infini non dénombrable. On définit l'application* $\mu : \mathcal{P}(E) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *par* $\mu(A) = 0$ *si* A *est au plus dénombrable et* $\mu(A) = +\infty$ *sinon. Montrer que* μ *est une mesure sur* $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 1.6.11 *Soit* λ *la mesure de Lebesgue sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *tel que* $\lambda(A) = 0$. *Montrer que* A *n'est pas nécessairement fermé.*

CHAPITRE 2

Fonctions mesurables

Nous commençons ce chapitre par quelques définitions concernant les fonctions étagées, ensuite nous présentons les fonctions mesurables et la convergence presque partout et la convergence en mesure.

2.1 Fonctions étagées

Définition 2.1.1 *Soit* (E, T) *un espace mesurable et* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction.*

1) On dit que f *est étagée s'il existe une famille finie* $(A_i)_{1 \leq i \leq n} \subset T$ *et des nombres réels* a_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *tels que* $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(x)$, $\forall x \in E$.

Remarque 2.1.1 *Soit* (E, T) *un espace mesurable.*

1) Toute fonction étagée $f : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est appelée fonction étagée positive.*

2) L'ensemble des fonctions étagées est noté $\mathcal{E}$ *et l'ensemble des fonctions étagées positive est notés* $\mathcal{E}_+$.

Proposition 2.1.1 *[1] Soit (E, T) un espace mesurable et $f \in \mathcal{E}_+$. Supposons que f est non identiquement nulle, alors il existe une unique famille $(a_i, A_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \mathbb{R}_+^\star \times T$ telle que $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ et $A_i \neq \emptyset$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(x),\ \forall x \in E.$$

Lemme 2.1.1 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{E}_+$. Supposons que f est non nulle et que*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} = \sum_{i=1}^{p} b_j 1_{B_j} \tag{2.1}$$

avec $(a_i, A_i)_{1 \leq i \leq n}, \left(b_j, B_j\right)_{1 \leq j \leq p} \subset \mathbb{R}_+^\star \times T$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
Alors

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{p} b_j \mu(B_j). \tag{2.2}$$

Démonstration. On a

$$\{x \in E,\ f(x) > 0\} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{p} B_j.$$

Soit $C_{ij} = A_i \cap B_j$, alors

$$C_{ij} \neq \emptyset,\ A_i = \bigcup_{j=1}^{p} C_{ij} \text{ et } B_j = \bigcup_{i=1}^{n} C_{ij}.$$

De plus,

$$C_{ij} \cap C_{ik} = \emptyset, \text{ si } j \neq k \text{ et } C_{ij} \cap C_{lj} = \emptyset, \text{ si } i \neq l.$$

En utilisant la $\sigma-$additivité de μ on obtient

$$\mu\left(A_i\right) = \sum_{j=1}^{p} \mu\left(C_{ij}\right) \text{ et } \mu\left(B_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(C_{ij}\right),$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu\left(A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_i \mu\left(C_{ij}\right)$$

et

$$\sum_{i=1}^{p} b_j \mu\left(B_j\right) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} b_j \mu\left(C_{ij}\right).$$

Comme $C_{ij} \neq \emptyset$, alors $a_i = b_j$, d'où (2.2). ■

Lemme 2.1.2 *[1] Soit* (E,T) *un espace mesurable et* $f \in \mathcal{E}$. *Alors il existe une unique famille*

$$(a_i, A_i) \subset \mathbb{R} \times T,\ a_i \neq a_j,\ \ si\ i \neq j,\ \forall i,j \in \{0,1,\ldots,n\}$$

$$et\ A_i \neq \emptyset,\ \forall i \in \{0,1,\ldots,n\},\ A_i \cap A_j = \emptyset\ si\ i \neq j,\ E = \bigcup_{i=0}^{n} A_i\ et\ f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i 1_{A_i}(x),\ \forall x \in E.$$

Proposition 2.1.2 *Soit* (E,T) *un espace mesurable et* $f, g \in \mathcal{E}$. *Alors* $fg \in \mathcal{E}$ *et pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *on a* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}$.

Démonstration. D'après le Lemme 2.1.2, on a $f = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i 1_{A_i}$ et $g = \sum\limits_{j=0}^{p} b_j 1_{B_j}$ où $(A_i)_{1 \leq i \leq n} \subset T$ est une partition de E telle que $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \neq a_j$, $\forall i \neq j$ et $\left(B_j\right)_{1 \leq j \leq p} \subset T$ est une partition de E telle que $b_j \in \mathbb{R}$, $b_i \neq b_j$, $\forall i \neq j$. Alors de la Proposition 1.1.11 on trouve

$$f = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} a_i 1_{A_i \cap B_j} \text{ et } g = \sum_{j=0}^{p}\sum_{i=0}^{n} b_j 1_{A_i \cap B_j},$$

car

$$A_i = \bigcup_{j=0}^{p} (A_i \cap B_j) \text{ et } B_j = \bigcup_{i=0}^{n} (A_i \cap B_j).$$

Donc

$$\alpha f + \beta g = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} (\alpha a_i + \beta b_j) 1_{A_i \cap B_j},\ \text{ c'est à dire } \alpha f + \beta g \in \mathcal{E}.$$

De plus,

$$fg = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} a_i b_j 1_{A_i \cap B_j},\ \text{ c'est à dire } fg \in \mathcal{E}.$$

■

Corollaire 2.1.1 *Soit* (E,T) *un espace mesurable, alors l'ensemble* $\mathcal{E}$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

2.2 Fonctions mesurables

Définition 2.2.1 *Soit* (E,T_1), (F,T_2) *deux espaces mesurables et* $f : E \longrightarrow F$ *une application. On dit que* f *est mesurable ou* $T_1 - T_2$ *mesurable si on a*

$$\forall A \in T_2,\ f^{-1}(A) \in T_1.$$

Définition 2.2.2 *Soient (E, τ_1), (F, τ_2) deux espaces topologiques. On dit que $f : E \longrightarrow F$ est borélinne si elle est mesurable pour les tribus boréliennes $\mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{B}(F)$.*

Remarque 2.2.1 **1)** *Soit (E, T_1) un espace mesurable, F un ensemble et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors*

- **i)** *Si on prend $T_2 = \{\emptyset, F\}$ on trouve que f est $T_1 - T_2$ mesurable.*
- **ii)** *Si on prend la tribu image de T par f, $T_2 = \{B \subset F,\ f^{-1}(B) \in T_1\}$ on trouve que f est $T_1 - T_2$ mesurable.*

2) *Soit E un ensemble, (F, T_2) un espace mesurable et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors*

- **i)** *Si on prend $T_1 = \mathcal{P}(E)$ on trouve que f est $T_1 - T_2$ mesurable.*
- **ii)** *Si on prend la tribu image réciproque, $T_1 = \{f^{-1}(B),\ B \in T_2\}$ on trouve que f est $T_1 - T_2$ mesurable.*

Proposition 2.2.1 *Soit (E, T) un espace mesurable et $f \in \mathcal{E}$, alors f est mesurable.*

Démonstration. Soit (E, T) un espace mesurable et $f \in \mathcal{E}$, alors d'après le Lemme 2.1.2, il existe une partition $(A_i)_{0 \le i \le n}$ de E telle que $f = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i 1_{A_i}$ où $a_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in T$, $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Donc $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(B) = \bigcup\limits_{i, a_i \in B} A_i \in T$. ∎

Lemme 2.2.1 *Soit (E, T_1) et (F, T_2) deux espaces mesurables avec T_2 est engendrée par $G \subset \mathcal{P}(F)$ et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(B) \in T_1$, $\forall B \in G$.*

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Evident.

$\Longleftarrow$? Supposons que $f^{-1}(B) \in T_1$, $\forall B \in G$ et soit T_3 la tribu image de T_1 par f, c'est à dire $T_3 = \{B \subset F,\ f^{-1}(B) \in T_1\}$, alors $G \subset T_3$, mais T_2 est la plus petite tribu contenant G, alors $T_2 \subset T_3$, d'où $\forall B \in T_2$, $f^{-1}(B) \in T_1$, c'est à dire f est mesurable.

∎

Corollaire 2.2.1 *Soit E et F deux espaces topologiques et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors*

1) *f est borélienne si et seulement si $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}(E)$, pour tout ouvert O de F.*

2) *Si f est continue, alors elle est borélienne.*

3) *Si $F = \mathbb{R}$, alors f est borélienne si et seulement si $f^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{B}(E)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.*

Exemple 2.2.1 *Soit (E, T) un espace mesurable et $A \subset E$, alors $1_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si A est mesurable, car $\forall a \in \mathbb{R}$, $(1_A)^{-1}(]a, +\infty[) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } a \geq 1, \\ A, & \text{si } 0 \leq a < 1, \\ E, & \text{si } a < 0. \end{cases}$*

Proposition 2.2.2 *Soit (E, T_1), (F, T_2), (G, T_3), trois espaces mesurables et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ deux applications mesurables. Alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est mesurable.*

Démonstration. Soit $A \in T_3$, alors $g^{-1}(A) \in T_2$, car g est mesurable, donc $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right) \in T_1$, car f est mesurable. ■

Proposition 2.2.3 *Soit (E, T_1) et (F, T_2), $T_2 = \mathcal{B}(F)$ deux espaces mesurables, et $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications mesurables et $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow F$ une application continue. Si on définit l'application $h : E \longrightarrow F$ par $h(x) = \varphi(f(x), g(x))$, $\forall x \in E$, alors h est mesurable.*

Démonstration. On définit l'application $l : E \longrightarrow \mathbb{R}^2$ par $l(x) = (f(x), g(x))$, $\forall x \in E$, donc $h = \varphi \circ l$. Comme φ est continue, alors elle est mesurable et donc pour montrer que h soit mesurable il suffit de montrer que l est mesurable. Soit $O = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ où I_1 et I_2 sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. Alors $l^{-1}(O) = f^{-1}(I_1) \cap g^{-1}(I_2) \in T_1$. Mais la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^2$ est engendrée par $\{I \times J$, I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}\}$, alors d'après le Lemme 2.2.1 l est mesurable. ■

Corollaire 2.2.2 *Soit (E, T) un espace mesurable et $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications mesurables. Alors*

1) *$f + g$, fg, $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ sont des applications mesurables.*

2) *$f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$ et $|f| = f^+ + f^-$ sont des applications mesurables positives.*

3) *Si* $f(x) \neq 0$, $\forall x \in E$, *alors l'application* $x \longmapsto \frac{1}{f(x)}$ *est mesurable.*

Remarque 2.2.2 *Soit* (E, T) *un espace mesurable. On note* $\mathcal{M} = \mathcal{M}(E, \mathbb{R}) = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R},$ *mesurable* $\}$ *et* $\mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(E, \overline{\mathbb{R}}_+) = \{f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+,$ *mesurable* $\}$.

Proposition 2.2.4 *Soit* (E, T) *un espace mesurable et* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'applications mesurables à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}$. *Alors les applications* $x \longmapsto \sup\limits_{n\geq 1} f_n(x)$, $x \longmapsto \inf\limits_{n\geq 1} f_n(x)$, $x \longmapsto \limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)$ *et* $x \longmapsto \liminf\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)$ *sont mesurables. De plus, si cette suite converge simplement vers une fonction* f, *alors cette dernière est mesurable.*

Démonstration. Soit (E, T) un espace mesurable et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'applications mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On considère l'application $g : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par $\forall x \in E$, $g(x) = \sup\limits_{n\geq 1} f_n(x)$, alors pour montrer que g est mesurable il suffit de montrer que $g^{-1}([-\infty, a[) \in T$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, car la tribu borélienne $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est engendrée par les intervalles de la forme $[-\infty, a[$, $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} g^{-1}([-\infty, a[) &= \{x \in E,\ g(x) < a\} \\ &= \left\{x \in E,\ \sup_{n\geq 1} f_n(x) < a\right\} \\ &= \{x \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ f_n(x) < a\} \\ &= \{x \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ f_n(x) \in [-\infty, a[\} \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star} f_n^{-1}([-\infty, a[) \in T, \end{aligned}$$

car f_n est mesurable et T est stable par intersection dénombrable, donc g est mesurable. En utilisant le résultat obtenu pour l'application $x \longmapsto \sup\limits_{n\geq 1} f_n(x)$, on peut montrer les autres résultats car

$$\inf_{n\geq 1} f_n = -\sup_{n\geq 1}(-f_n),\ \limsup_{n\longrightarrow+\infty} f_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} f_k,\ \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} f_k$$

et si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction f, alors

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n = \limsup_{n\longrightarrow+\infty} f_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n = f.$$

■

Remarque 2.2.3 *On a la même proposition précédente si on prend une suite d'applications à valeurs dans* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ *ou* $\overline{\mathbb{R}}_+$

Proposition 2.2.5 *Soit* (E, T) *un espace mesurable et* $f \in \mathcal{M}_+$. *Alors il existe une suite croissante* $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{E}_+$ *telle que* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge simplement vers* f.

Démonstration. Soit (E, T) un espace mesurable et $f \in \mathcal{M}_+$. On définit, sur E, la suite d'applications $(f_n)_{n\geq 1}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & \text{si } f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[, \ 0 \leq k \leq n2^n - 1, \\ n, & \text{si } f(x) \geq n. \end{cases}$$

Alors cette suite est croissante et on a

$$f_n = n1_{A_n} + \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} 1_{An,k},$$

où

$$A_n = f^{-1}([n, +\infty]), \ A_{n,k} = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right),$$

donc A_n et $A_{n,k}$ sont mesurables car f est mesurable, d'où f_n est étagée positive, de plus Si $f(x) < +\infty$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > f(x)$, donc

$$\forall n \geq n_0, \ 0 \leq f(x) < n,$$

d'où

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

■

Proposition 2.2.6 *Soit* (E, T) *un espace mesurable et* $f \in \mathcal{M}$. *Alors il existe une suite* $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{E}$ *telle que* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge simplement vers* f.

Démonstration. Soit (E, T) un espace mesurable et $f \in \mathcal{M}$. Alors $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+$, en appliquant la Proposition 2.2.5 on trouve l'existence de deux suites croissantes de fonctions étagées positives $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ telles que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement vers f^+ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement vers f^-. On pose $f_n = h_n - g_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{E}$ et cette suite converge simplement vers f. ■

Corollaire 2.2.3 *Soit (E,T) un espace mesurable. Alors $f \in \mathcal{M}$ si et seulement s'il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{E}$ telle que cette suite converge simplement vers f.*

2.3 Convergence presque partout et convergence en mesure

Définition 2.3.1 *Soit F un ensemble et (E,T,μ) un espace mesuré. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies de E dans F et la fonction $f : E \longrightarrow F$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers f et on écrit $f_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} f$ p.p, s'il existe un ensemble négligeable $A \subset E$ tel que*

$$\forall x \in A_E^c,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

Définition 2.3.2 *Soit (E,T,μ) un espace mesuré. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge presque uniformément vers $f \in \mathcal{M}$ et on écrit $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ p.unif, si on a*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in T,\ \mu(A) \leq \varepsilon \text{ et } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } A_E^c.$$

Définition 2.3.3 *Soit (E,T,μ) un espace mesuré. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ si on a*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\left\{x \in E,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Remarque 2.3.1 **1)** *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors elle converge simplement vers f, donc elle converge presque partout vers f.*

2) *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors elle converge presque uniformément vers f, donc elle converge presque partout vers f.*

Exemple 2.3.1 *Soit $E = F = \mathbb{R}$, $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = 1_{[n,n+1]}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Alors si $x \in \mathbb{R}_-^\star$, $f_n(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et si $x \in \mathbb{R}_+$, alors $\exists n_0 = [x] + 1$ tel que $\forall n \geq n_0$, $f_n(x) = 0$. Donc $f_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$ p.p* *car elle converge simplement vers* 0*, mais elle ne converge pas en mesure vers* 0 *car si on prend* $\varepsilon = 1$ *on trouve*

$$\lambda\left(\left\{x \in \mathbb{R},\ \left|f_n(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = \lambda\left([n, n+1]\right) = 1 \neq 0.$$

Exemple 2.3.2 *Soit* $E = [0,1]$, $F = \mathbb{R}$, $T = \mathscr{B}([0,1])$ *et* $\mu = \lambda$ *la mesure de Lebesgue. On considère la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $f_n(x) = 1_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]}(x)$, $\forall x \in [0,1]$. *Cette suite converge simplement vers* 0. *De plus, elle converge en mesure vers* 0 *car*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \{x \in E,\ |f_n(x)| \geq \varepsilon\} \subset \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right].$$

En utilisant la monotonie de λ *on trouve*

$$\lambda\left(\left\{x \in [0,1],\ \left|f_n(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \lambda\left(\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]\right) = \frac{1}{n},$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda\left(\left\{x \in [0,1],\ \left|f_n(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Définition 2.3.4 *Soit* (E, T, μ) *un espace mesuré, F un ensemble et* $f, g : E \longrightarrow F$.
On dit que $f = g$ *presque partout (ou* μ *presque partout) et on écrit* $f = g$ *p.p si*

$$\exists A \in T,\ \mu(A) = 0 \text{ et } f(x) = g(x),\ \forall x \in A^c_E.$$

2.4 Exercices

Exercice 2.4.1 *Soit* (E, T) *un espace mesurable et* $f : E \to \mathbb{R}$ *une application.*

1) *Montrer que* $T_f = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), f^{-1}(B) \in T\}$ *est une tribu sur* $\mathbb{R}$.

2) *Soit* **C** *une famille qui engendre* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

  (i) f *est mesurable.*

  (ii) $f^{-1}(A) \in T$, $\forall A \in$ **C**.

Exercice 2.4.2 *Soit (E,T) et (F,S) deux espaces mesurables. Soit $f : E \to F$ et $\varphi : F \to \mathbb{R}$ deux applications mesurables. Montrer que $\varphi \circ f : E \to \mathbb{R}$ est mesurable.*

Exercice 2.4.3 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que f est mesurable.*

Exercice 2.4.4 *Soit $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne. Montrer que $1_{\mathbb{Q}}$ est mesurable.*

Exercice 2.4.5 *Soit T une tribu sur un ensemble E et soit $A \in T$ tel que*

$$B \in T \text{ et } B \subset A \Rightarrow B = \phi \text{ ou } B = A.$$

Montrer que toute fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$ est constante sur A.

Exercice 2.4.6 *1) Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et λ la mesure de Lebesgue. Montrer que $f = g$ λ p.p si et seulement si $f = g$.*
2) Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions et δ_0 la mesure de Dirac en 0. Montrer que $f = g$ δ_0 p.p si et seulement si $f(0) = g(0)$.

Exercice 2.4.7 *Soit (E,T,μ) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, (i.e, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$). Montrer que si $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ presque uniformément, alors $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ p.p.*

Exercice 2.4.8 *Soit (E,T,μ) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$.*
a) Montrer que s'il existe deux fonctions mesurables $f, g : E \to \mathbb{R}$ telles que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f et g, alors $f = g$ p.p.
b) Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f + g \in \mathcal{M}$.

CHAPITRE 3

Fonctions intégrables

Dans ce chapitre on s'inéresse à donner des notions fondamentales concernant les fonctions intégrables ainsi que les théorèmes essentiels qui y sont liés.

3.1 Intégrale d'une fonction étagée positive

Définition 3.1.1 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré et soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction étagée non nulle. On définit l'intégrale de f par*

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

où $(A_i)_{1 \leq i \leq n} \subset T$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ tels que $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$, $a_i \in \mathbb{R}_+^\star$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. De plus, si $f \equiv 0$, alors $\int_E f d\mu = 0$.

Proposition 3.1.1 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré, $f, g \in \mathcal{E}_+$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$. Alors*

1) $\int_E(\alpha f + \beta g)d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$. *(C'est la linéarité).*

2) *Si* $f \geq g$, *alors* $\int_E f d\mu \geq \int_E g d\mu$. *(C'est la monotonie).*

Démonstration. Soit (E, T, μ) un espace mesuré, f, g deux fonctions étagées non nulles et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$. Alors

1) D'après la Proposition 2.1.1 on a

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \text{ et } g = \sum_{j=1}^{p} b_j 1_{B_j}$$

avec $(A_i)_{1\leq i\leq n}$, $\left(B_j\right)_{1\leq j\leq p} \subset T$ tel que $A_i \cap A_j = \emptyset$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ et $a_i, b_j \in \mathbb{R}_+^\star$, $\forall (i,j) \in \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, p\}$. Soit

$$A_0 = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i)_E^c,\ B_0 = \bigcap_{j=1}^{p} (B_j)_E^c \text{ et } a_0 = b_0 = 0.$$

Donc

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i 1_{A_i} \text{ et } g = \sum_{j=0}^{p} b_j 1_{B_j}$$

avec $(A_i)_{0\leq i\leq n} \subset T$ et $(B_j)_{0\leq j\leq p} \subset T$ sont des partitions de E. De plus,

$$A_i = \bigcup_{j=0}^{p} (A_i \cap B_j) \text{ et } B_j = \bigcup_{i=0}^{n} (A_i \cap B_j).$$

Donc

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i 1_{\bigcup\limits_{j=0}^{p}(A_i\cap B_j)} \text{ et } g = \sum_{j=0}^{p} b_j 1_{\bigcup\limits_{i=0}^{n}(A_i\cap B_j)}.$$

Alors

$$f = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} a_i 1_{A_i\cap B_j} \text{ et } g = \sum_{j=0}^{p}\sum_{i=0}^{n} b_j 1_{A_i\cap B_j},$$

car

$$(A_i \cap B_j) \cap (A_k \cap B_j) = \emptyset \text{ if } i \neq k \text{ et } (A_i \cap B_j) \cap (A_i \cap B_l) = \emptyset \text{ if } j \neq l.$$

D'où

$$\alpha f + \beta g = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} \left(\alpha a_i + \beta b_j\right) 1_{A_i\cap B_j} = \sum_{(i,j)\in I\times J\setminus\{(0,0)\}} \left(\alpha a_i + \beta b_j\right) 1_{A_i\cap B_j}$$

où $I = \{0, 1, \ldots, n\}$ et $J = \{0, 1, \ldots, p\}$, alors $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}_+$ et

$$\begin{aligned}\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu &= \sum_{(i,j)\in I\times J\setminus\{(0,0)\}} \left(\alpha a_i + \beta b_j\right) \mu\left(A_i \cap B_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{p} \alpha a_i \mu\left(A_i \cap B_j\right) + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=0}^{n} \beta b_j \mu\left(A_i \cap B_j\right) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i \mu\left(A_i\right) + \beta \sum_{j=1}^{p} b_j \mu\left(B_j\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu.$$

2) Supposons que $f \geq g$, alors $f - g \geq 0$, donc $f - g \in \mathcal{E}_+$ et d'après la Définition 3.1.1 on a $\int_E (f - g) d\mu \geq 0$. Donc en appliquant le résultat précédent on trouve

$$\int_E f d\mu = \int_E (f - g) d\mu + \int_E g d\mu \geq \int_E g d\mu.$$

■

Corollaire 3.1.1 *De la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ on trouve que pour tout $f \in \mathcal{E}_+$ on a*

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E g d\mu,\ g \in \mathcal{E}_+,\ g \leq f \right\}.$$

3.2 Intégrale d'une fonction mesurable positive

Lemme 3.2.1 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions étagées positives et g une fonction étagée positive. Supposons que*

1) $f_{n+1}(x) \geq f_n(x),\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in E.$

2) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \geq g(x),\ \forall x \in E.$ *Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu \geq \int_E g d\mu.$$

Démonstration. Soit (E, T, μ) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions étagées positives et g une fonction étagée positive. D'après les hypothèses on a $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle positive et croissante, donc $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ existe et $f(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $\forall x \in E$, de plus $f \in \mathcal{M}_+$. Soit

$$A_n = \{x \in E,\ \alpha g(x) \leq f_n(x)\} \subset E \text{ avec } \alpha \in]0,1[,\ n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$A_n = (f_n - \alpha g)^{-1}([0,+\infty[) \in T.$$

Montrons que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Soit $x \in E$, alors

$$x \in A_n,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \text{si } g(x) = 0,\ \text{donc } x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

et si $g(x) > 0$ on a

$$\alpha g(x) \leq g(x),\ \text{car } \alpha \in]0,1[,$$

alors

$$\alpha g(x) \leq g(x) \leq f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x),$$

donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ x \in A_n.$$

D'où

$$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ et } E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

D'autre part, on a $A_n \subset A_{n+1}$, alors $\forall x \in E$, $\alpha g 1_{A_n}(x) \leq \alpha g 1_{A_{n+1}}(x)$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha g 1_{A_n}(x) = \alpha g(x),$$

mais $g \in \mathcal{E}_+$, donc d'après la Propositon 2.1.1 on a

$$g = \sum_{i=1}^{p} b_i 1_{B_i} \text{ avec } b_i \in \mathbb{R}_+^\star,\ B_i \cap B_j = \emptyset \text{ si } i \neq j \text{ et } B_i \neq \emptyset,\ \forall i \in \{1,2,\ldots,p\}.$$

Alors

$$\alpha g 1_{A_n} = \sum_{i=1}^{p} \alpha b_i 1_{B_i \cap A_n},$$

d'où

$$\int_E \alpha g 1_{A_n} d\mu = \sum_{i=1}^{p} \alpha b_i \mu(B_i \cap A_n). \tag{3.1}$$

En utilisant 3) de la Proposition 1.4.2 on trouve

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(B_i\cap A_n)=\mu(B_i) \text{ car } \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(B_i\cap A_n)=B_i\cap\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)=B_i \text{ et } B_i\cap A_n\subset B_i\cap A_{n+1}.$$

En passant à la limite dans (3.1) quand n tend vers $+\infty$ on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E \alpha g 1_{A_n}d\mu=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{p}\alpha b_i\mu\left(B_i\cap A_n\right)=\sum_{i=1}^{p}\alpha b_i\mu\left(B_i\right)=\int_E \alpha g d\mu.$$

Mais

$$\int_E \alpha g 1_{A_n}d\mu\leq\int_E f_n d\mu,$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E \alpha g 1_{A_n}d\mu\leq\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n d\mu.$$

Alors

$$\alpha\int_E g d\mu\leq\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n d\mu, \text{ pour tout } \alpha\in]0,1[,$$

d'où

$$\int_E g d\mu\leq\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n d\mu.$$

■

Corollaire 3.2.1 *Soit (E,T,μ) un espace mesuré et $f\in\mathcal{M}_+$. Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{E}_+$ sont deux suites telles que*

1) $f_{n+1}(x)\geq f_n(x)$, $g_{n+1}(x)\geq g_n(x)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in E$.

2) $f(x)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}g_n(x)$, $\forall x\in E$.

Alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n d\mu=\lim_{n\to+\infty}\int_E g_n d\mu.$$

Définition 3.2.1 *Soit (E,T,μ) un espace mesuré et $f\in\mathcal{M}_+$. On définit l'intégrale de f par*

$$\int_E f d\mu=\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n d\mu$$

où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{E}_+$ est telle que

1) $f_{n+1}(x)\geq f_n(x)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in E$.

2) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, $\forall x \in E$.

Proposition 3.2.1 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré, $f \in \mathcal{M}_+$. Alors*

$$\int_E f d\mu = \sup\left\{\int_E g d\mu,\ g \in \mathcal{E}_+,\ g \leq f\right\}. \tag{3.2}$$

Démonstration. Soit (E, T, μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Soit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ telle que

1) $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in E$.

2) $f(x) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)$, $\forall x \in E$.

Alors d'après le Corollaire 3.1.1 on a

$$\int_E f_n d\mu = \sup\left\{\int_E g d\mu,\ g \in \mathcal{E}_+,\ g \leq f_n\right\}.$$

Donc

$$\int_E f_n d\mu \leq \sup\left\{\int_E g d\mu,\ g \in \mathcal{E}_+,\ g \leq f\right\},$$

car $f_n \leq f$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ on trouve

$$\int_E f d\mu \leq \sup\left\{\int_E g d\mu,\ g \in \mathcal{E}_+,\ g \leq f\right\}. \tag{3.3}$$

Maintenant, soit $g \in \mathcal{E}_+$ telle que $g \leq f$. Alors d'après le Lemme 3.2.1 on trouve

$$\int_E g d\mu \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu,$$

donc

$$\sup\left\{\int_E g d\mu,\ g \in \mathcal{E}_+,\ g \leq f\right\} \leq \int_E f d\mu. \tag{3.4}$$

De (3.3) et (3.4) on obtient (3.2). ■

Remarque 3.2.1 *On a les mêmes propriétés données dans la Proposition 3.1.1 si on prend $f, g \in \mathcal{M}_+$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$.*

Proposition 3.2.2 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré, $f \in \mathcal{M}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$, alors*

$$\mu\left(\{x \in E,\ f(x) \geq \alpha\}\right) \leq \frac{1}{\alpha}\int_E f d\mu.$$

Démonstration. Soit $A_\alpha = \{x \in E,\ f(x) \geq \alpha\}$, alors

$$A_\alpha = f^{-1}([\alpha, +\infty]) \in T, \text{ car } f \in \mathcal{M}_+.$$

De plus, $f \geq \alpha 1_{A_\alpha}$, donc d'après la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ on trouve

$$\int_E f d\mu \geq \int_E \alpha 1_{A_\alpha} d\mu = \alpha\mu(A_\alpha).$$

■

3.3 Mesure et densité de probabilité

Définition 3.3.1 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré, $A \in T$ et $f \in \mathcal{M}_+$. On définit la fonction $f1_A : E \longrightarrow \overline{R}_+$ par*

$$f1_A(x) = \begin{cases} f(x), & si\ x \in A, \\ 0, & si\ x \in A_E^c. \end{cases} \tag{3.5}$$

Remarque 3.3.1 *La fonction $f1_A$ définie par* (3.5) *est mesurable positive.*

Définition 3.3.2 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré, $f \in \mathcal{M}_+$. On appelle mesure de densité f par rapport à μ l'application $m : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par*

$$m(A) = \int_E f1_A d\mu = \int_A f d\mu,\ \forall A \in T.$$

Lemme 3.3.1 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré, $A \in T$, $\mu(A) = 0$, $f \in \mathcal{M}_+$ et m la mesure de densité f par rapport à μ. Alors $m(A) = 0$.*

Démonstration. Soit $A \in T$ tel que $\mu(A) = 0$ et soit I_A la fonction définie par

$$I_A(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \in A_E^c. \end{cases}$$

Alors $I_A \in \mathcal{M}_+$ et I_A est la limite simple de la suite croissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ tel que $f_n = n1_A$. Donc d'après la définition de l'intégrale d'une fonction étagée positive on a

$$\int_E I_A d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_E f_n d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty} n\mu(A) = 0.$$

D'autre part, pour tout $f \in \mathcal{M}_+$ on a $f1_A \leq I_A$, donc d'après la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ on trouve $\int\limits_A f d\mu = 0$. ■

Proposition 3.3.1 *Soit* (E, T, μ) *un espace mesuré et* $f, g \in \mathcal{M}_+$. *Alors*

1) *Si* $f = g$ *p.p, alors* $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$.

2) *Si* $f = 0$ *p.p, alors* $\int_E f d\mu = 0$.

Démonstration.

1) Supposons que $f, g \in \mathcal{M}_+$ tel que $f = g$ *p.p*, alors

$$\exists A \in T,\ \mu(A) = 0 \text{ et } f(x) = g(x),\ \forall x \in A_E^c.$$

Donc

$$f1_{A_E^c} = g1_{A_E^c} \text{ avec } f1_{A_E^c},\ g1_{A_E^c} \in \mathcal{M}_+,$$

alors

$$\int_E f1_{A_E^c} d\mu = \int_E g1_{A_E^c} d\mu.$$

D'autre part, d'après le Lemme 3.3.1, on a

$$\int_E f1_A d\mu = \int_E g1_A d\mu = 0.$$

En utilisant la Proposition 1.1.11 on trouve

$$\int_E f d\mu = \int_E f1_{A_E^c} d\mu + \int_E f1_A d\mu = \int_E f1_{A_E^c} d\mu$$

et

$$\int_E g d\mu = \int_E g1_{A_E^c} d\mu + \int_E g1_A d\mu = \int_E g1_{A_E^c} d\mu.$$

2) C'est un cas particulier de la question précédente.

■

3.4 Convergence monotone et lemme de Fatou

Théorème 3.4.1 (de convergence monotone) *Soit (E, T, μ) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ telle que pour tout $x \in E$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f. Alors*

$$f \in \mathcal{M}_+ \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Démonstration. En utilisant la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ et la croissance de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ on trouve que

$$\int_E f_n d\mu \leq \int_E f_{n+1} d\mu, \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.6}$$

donc $\left(\int_E f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et comme $\int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$, $\forall n \in \mathbb{N}$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu. \tag{3.7}$$

Maintenant, montrons que $\int_E f d\mu \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu$. Soit $g \in \mathcal{E}_+$ telle que $g \leq f$. Alors

$$\forall x \in E, \ \forall \alpha \in]0, 1[, \ f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \geq g(x) > (1-\alpha)g(x).$$

En utilisant la définition de la limite on trouve

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall x \in E, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_0, \ f_n(x) > \lim_{n\to+\infty} f_n(x) - \varepsilon > (1-\alpha)g(x) - \varepsilon.$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ on obtient

$$\forall x \in E, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_0, \ f_n(x) \geq (1-\alpha)g(x). \tag{3.8}$$

Considérons l'ensemble

$$A_n = \{x \in E, \ f_n(x) \geq (1-\alpha)g(x)\},$$

alors

$$A_n = (f_n - (1-\alpha)\,g)^{-1}\,([0, +\infty[) \in T.$$

De plus, si $x \in E$, alors d'après (3.8) on a

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_0, \ f_n(x) \geq (1-\alpha)g(x),$$

donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ x \in (f_n - (1-\alpha)g)^{-1}([0,+\infty[) = A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$

comme $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset E$, alors $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
D'autre part, on a

$$f_n \geq (1-\alpha)g1_{A_n} \text{ avec } g = \sum_{i=1}^{p} b_i 1_{B_i} \text{ et } g1_{A_n} = \sum_{i=1}^{p} b_i 1_{B_i\cap A_n},$$

donc

$$\int_E f_n d\mu \geq \int_E (1-\alpha)g1_{A_n} d\mu = (1-\alpha)\sum_{i=1}^{p} b_i \mu(B_i \cap A_n). \tag{3.9}$$

On a aussi

$$B_i \cap A_n \subset B_i \cap A_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ car } A_n \subset A_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

et

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_i \cap A_n) = B_i,\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, p\},$$

donc d'après la Proposition 1.4.2 on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(B_i \cap A_n) = \mu(B_i),\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, p\}.$$

En passant à la limite, dans (3.9), quand n tend vers $+\infty$ on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu \geq (1-\alpha)\sum_{i=1}^{p} b_i \mu(B_i) = (1-\alpha)\int_E g d\mu.$$

Comme $\alpha \in]0,1[$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu \geq \int_E g d\mu,$$

d'après la Proposition 3.2.1 on obtient

$$\int_E f d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu.$$

■

Corollaire 3.4.1 *Soit* (E, T, μ) *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. *Supposons que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x),\ \forall x \in E.$$

Alors

$$f \in \mathcal{M}_+ \text{ et } \int_E f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Démonstration. On définit la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \ \forall x \in E,$$

alors

$$g_n \in \mathcal{M}_+ \text{ et } \lim_{n\to+\infty} g_n(x) = f(x), \ \forall x \in E.$$

De plus,

$$g_{n+1}(x) = g_n(x) + f_{n+1}(x) \geq g_n(x),$$

donc d'après le Théorème 3.4.1 on trouve

$$f \in \mathcal{M}_+ \text{ et } \int_E f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E g_n d\mu,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_E f d\mu &= \lim_{n\to+\infty} \int_E \sum_{k=0}^{n} f_k d\mu \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_E f_k d\mu \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_E f_k d\mu.
\end{aligned}$$

■

Lemme 3.4.1 (de Fatou) *Soit (E, T, μ) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. Si on pose*

$$\forall x \in E, \ f(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(\inf_{p\geq n} f_p(x) \right).$$

Alors

$$f \in \mathcal{M}_+ \text{ et } \int_E f d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} \left(\inf_{p\geq n} \int_E f_p d\mu \right).$$

Démonstration. Soit la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall x \in E, \ g_n(x) = \inf_{p\geq n} f_p(x),$$

donc

$$g_n \in \mathcal{M}_+,\ g_{n+1}(x) \geq g_n(x) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} g_n(x) = f(x),\ \forall x \in E.$$

Donc d'après le Théorème 3.4.1 on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E g_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Mais

$$g_n \leq f_p,\ \forall p \geq n,$$

alors d'après la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ on a

$$\int_E g_n d\mu \leq \int_E f_p d\mu,\ \forall p \geq n,$$

donc

$$\int_E g_n d\mu \leq \inf_{p\geq n} \int_E f_p d\mu.$$

D'où

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_E g_n d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \left(\inf_{p\geq n} \int_E f_p d\mu\right) = \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu.$$

■

3.5 L'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables

Définition 3.5.1 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que f est intégrable par rapport à μ (ou Lebesgue intégrable) si $\int_E |f| d\mu < +\infty$ et dans ce cas on a*

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

L'ensemble des fonctions intégrables par rapport à μ est noté $\mathcal{L}^1(E, T, \mu)$.

Proposition 3.5.1 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré. Alors*

1) *$\mathcal{L}^1(E, T, \mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

2) *L'application $In : \mathcal{L}^1(E, T, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $In(f) = \int_E f d\mu$, $\forall f \in \mathcal{L}^1(E, T, \mu)$ est linéaire.*

3) $\forall f \in \mathcal{L}^1(E,T,\mu)$, $\left|\int_E f d\mu\right| \leq \int_E |f| d\mu$.

4) $\forall f,g \in \mathcal{L}^1(E,T,\mu)$, $f \leq g \Longrightarrow \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.

5) $\forall f,g \in \mathcal{L}^1(E,T,\mu)$, $f = g\, p.p \Longrightarrow \int_E f d\mu = \int_E g d\mu$.

Démonstration. (Exercice) ■

Lemme 3.5.1 *[1] Soit (E,T,μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$, alors*

$$\int_E f d\mu < +\infty \Longrightarrow f < +\infty\, p.p.$$

Proposition 3.5.2 *[1] Soit (E,T,μ) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables définies sur E et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{L}^1(E,T,\mu)$ telle que*

1) $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ *pour presque tout $x \in E$.*

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g\, p.p$

Alors $f \in \mathcal{L}^1(E,T,\mu)$, $\int_E |f_n - f| d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\int_E f_n d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_E f d\mu$.

Proposition 3.5.3 *Soit (E,T,μ) un espace mesuré. Alors*

1) *Si $f \in \mathcal{M}_+$, alors $\int_E f d\mu = 0$ si et seulement si $f = 0\, p.p.$*

2) *Si $f \in \mathcal{L}^1(E,T,\mu)$, alors $\int_E |f| d\mu = 0$ si et seulement si $f = 0\, p.p.$*

Démonstration.

1) Soit $f \in \mathcal{M}_+$.

- $\Longrightarrow$? Supposons que $\int_E f d\mu = 0$, alors d'après la Proposition 3.2.2 on trouve

$$\int_E f d\mu \geq \frac{1}{n}\mu\left(\left\{x \in E,\ f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right),\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,$$

donc

$$\mu\left(\left\{x \in E,\ f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0.$$

D'autre part, on a

$$\{x \in E,\ f(x) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} \left\{x \in E,\ f(x) \geq \frac{1}{n}\right\},$$

en utilisant la $\sigma-$sous-additivité de μ on obtient

$$\mu\left(\{x \in E,\ f(x) > 0\}\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^\star} \mu\left(\left\{x \in E,\ f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0,$$

donc

$$\mu\left(\{x \in E,\ f(x) > 0\}\right) = 0.$$

Comme

$$\{x \in E,\ f(x) = 0\}_E^c = \{x \in E,\ f(x) > 0\}\,, \text{ alors } f = 0\, p.p$$

- $\Longleftarrow$? Voir la preuve de la Proposition 3.3.1.

2) On a

$$|f| = 0\, p.p \Longleftrightarrow f = 0\, p.p,$$

donc en appliquant 1) à $|f|$ on trouve le résultat.

■

3.6 L'espace L^1

Proposition 3.6.1 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré et $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathcal{L}^1(E, T, \mu)$ par*

$$f \mathcal{R} g \Longleftrightarrow f = g\, p.p,\ \forall f, g \in \mathcal{L}^1(E, T, \mu).$$

Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^1(E, T, \mu)$.

Démonstration. (Exercice) ■

Remarque 3.6.1 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré et $\mathcal{R}$ la relation binaire définie dans la Proposition précédente et $f \in \mathcal{L}^1(E, T, \mu)$, alors la classe d'équivalence de f modulo $\mathcal{R}$ est*

$$\dot{f} = \left\{g \in \mathcal{L}^1(E, T, \mu),\ g = f\, p.p\right\}.$$

Définition 3.6.1 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré, $\mathcal{R}$ la relation binaire définie dans la Proposition 3.6.1. L'espace $L^1 = L^1(E, T, \mu)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$, c'est à dire $L^1(E, T, \mu) = \mathcal{L}^1(E, T, \mu)/\mathcal{R}$.*

Remarque 3.6.2 **1)** *Un élément de L^1 est un ensemble de fonctions de $\mathcal{L}^1(E, T, \mu)$ qui sont égales presque partout.*

2) *On dit qu'une fonction f est dans L^1 pour dire que la classe d'équivalence de f modulo $\mathcal{R}$ est dans L^1.*

Proposition 3.6.2 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré et $\|.\| : L^1(E, T, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par*

$$\|F\| = \|f\|_1 = \int_E |f| d\mu, \ \forall F \in L^1(E, T, \mu)$$

avec f est un représentant de F, c'est à dire $F = \dot{f}$. Alors $\|.\|$ est une norme sur $L^1(E, T, \mu)$.

Démonstration. Tout d'abord, $\|.\|$ est bien définie car si $F, G \in L^1(E, T, \mu)$ tel que $F = G$, $F = \dot{f}$ et $G = \dot{g}$, alors $f = g \, p.p$, donc $|f| - |g| = 0 \, p.p$ et $\int_E (|f| - |g|) \, d\mu = 0$, c'est à dire $\|F\| = \|G\|$. De plus, on a

1) Pour tout $F = \dot{f} \in L^1(E, T, \mu)$, $\|F\| = \int_E |f| d\mu \geq 0$.

2)

$$\begin{aligned} \forall F = \dot{f} \in L^1(E, T, \mu), \ \|F\| = 0 &\iff \int_E |f| d\mu = 0 \\ &\iff |f| = 0 \, p.p \\ &\iff f = 0 \, p.p \\ &\iff F = \dot{f} = \dot{0}. \end{aligned}$$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall F \in L^1(E, T, \mu)$, $F = \dot{f}$,

$$\|F\| = \|\lambda f\|_1 = \int_E |\lambda f| d\mu = |\lambda| \int_E |f| d\mu = |\lambda| \times \|f\|_1 = |\lambda| \times \|F\|.$$

4) $\forall F, G \in L^1(E, T, \mu)$, $F = \dot{f}$, $G = \dot{g}$,

$$\|F + G\| = \|f + g\|_1 = \int_E |f + g| d\mu \leq \int_E (|f| + |g|) d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1 = \|F\| + \|G\|.$$

■

Proposition 3.6.3 *Soit* (E, T, μ) *un espace mesuré, alors* $(L^1(E, T, \mu), \|.\|)$ *est un espace de Banach.*

3.7 Théorèmes de convergence dans L^1

Théorème 3.7.1 *[1]***(de Beppo-Levi)** *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(E, T, \mu)$. *Supposons qu'on a*

$$f_{n+1} \geq f_n \text{ p.p}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \text{ p.p.}$$

Alors

a) $f \in L^1(E, T, \mu)$ *si et seulement si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu \in \mathbb{R}$.

b) *Si* $f \in L^1(E, T, \mu)$, *alors* $\int_E \left|f_n - f\right| d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *c'est à dire* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* f *quand* n *tend vers* $+\infty$ *pour la norme* $\|.\|$.

Théorème 3.7.2 (de la convergence dominée de Lebesgue) *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $L^1(E, T, \mu)$. *Supposons que* $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ *p.p et qu'il existe* $F \in L^1(E, T, \mu)$ *tel que* $|f_n| \leq F$ *p.p*, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Alors*

$$f \in L^1(E, T, \mu) \text{ et } \int_E \left|f_n - f\right| d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^1(E, T, \mu)$ et soit f_n un représentant de f_n, alors il existe un ensemble mesurable A de mesure nulle avec $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$, $\forall x \in A^c_E$. D'autre part, on a $f_n 1_{A^c_E} \in \mathcal{M}$ est un représentant de la même classe que f_n, alors on peut remplacer f_n par $f_n 1_{A^c_E}$ et on la note f_n. Maintenant, on définit g sur E par

$$g(x) = f(x) \text{ si } x \in A^c_E \text{ et } g(x) = 0 \text{ si } x \in A$$

et on choisit un représentant de F noté aussi F, donc

1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(E, T, \mu)$,

2) $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x)$, $\forall x \in E$.

3) $F \subset \mathcal{L}^1(E, T, \mu)$ et $f_n \leq F\, p.p,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

En appliquant la Proposition 3.5.2 on obtient

$$g \in \mathcal{L}^1(E, T, \mu) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E g d\mu,$$

mais $g = f\ p.p$, donc

$$f \in L^1(E, T, \mu) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

■

Théorème 3.7.3 *[1] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^1. Supposons que $\sum_{n\geq 0} \|f_n\| < +\infty$. Alors il existe $F \in L^1$ tel que $\left|\sum_{k=0}^{n} f_k\right| \leq F\ p.p,\ \forall n \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $x \in E$, la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge dans $\mathbb{R}$ et sa somme f est définie presque partout dans E par $f(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$. De plus, $f \in L^1$ avec $\sum_{k=0}^{n} f_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans L^1 et presque partout.*

3.8 Continuité et dérivabilité sous le signe $\int$

Soit (E, T, μ) un espace mesuré, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et $f : E \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit la fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par $F(t) = \int_E f(x, t) d\mu(x)$.

Théorème 3.8.1 *Soit $t_0 \in I$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable tels que*

1) *$f(., t)$ est mesurable pour tout $t \in I$.*

2) *$f(x, t) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} g(x)$ pour presque tout $x \in E$.*

3) *Il existe une fonction intégrable $h : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $|f(x, t)| \leq h(x)$ pour tout $t \in I$ et pour presque tout $x \in E$. Alors*

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = \lim_{t\to t_0} \int_E f(x, t) d\mu(x) = \int_E g(x) d\mu(x).$$

Démonstration. De 1) et 3) on a $x \longmapsto f(x, t)$ est intégrable sur E pour tout $t \in I$, donc F est bien définie. De 3) on trouve que $|g(x)| \leq h(x)\ p.p$, donc g est intégrable. D'autre part, si on prend une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset I$ telle que $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t_0$, on obtient

$$\left|f(x,t_n)\right| \le h(x)\, p.p \text{ et } f(x,t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x)\, p.p.$$

En appliquant le théorème de la convergence dominée on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} F(t_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_E f(x,t_n)d\mu(x) = \int_E g(x)d\mu(x).$$

■

Théorème 3.8.2 *Supposons que*

1) $f(.,t)$ *est mesurable pour tout* $t \in I$.

2) $f(x,.)$ *est continue pour presque tout* $x \in E$.

3) *Il existe une fonction intégrable* $h : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *telle que* $|f(x,t)| \le h(x)$ *pour tout* $t \in I$ *et pour presque tout* $x \in E$.

Alors F est continue sur I.

Démonstration. Soit $t_0 \in I$. On a $f(x,.)$ est continue donc pour presque tout $x \in E$, $\lim_{t\to t_0} f(x,t) = f(x,t_0) = g(x)$ et par 3) on obtient que $|g(x)| \le h(x)$. En appliquant le Théorème 3.8.1 on trouve le résultat. ■

Théorème 3.8.3 *Supposons que*

1) $f(.,t)$ *est intégrable pour tout* $t \in I$.

2) $f(x,.)$ *est de classe* $\mathbf{C}^1$ *pour presque tout* $x \in E$.

3) *Il existe une fonction intégrable* $g : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *telle que* $|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \le g(x)$ *pour tout* $t \in I$ *et pour presque tout* $x \in E$.

Alors F est bien définie et elle est de classe $\mathbf{C}^1$ *sur I. De plus,*

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\mu(x).$$

Démonstration. D'après 2) on trouve qu'il existe un ensemble mesurable $A \in T$ tel que $\mu(A^c_E) = 0$ et $f(x, .)$ est dérivable pour tout $x \in A$. Donc si on prend une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset I$ avec $t_n \neq t_0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $t_0 \in I$ et $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t_0$, on trouve pour tout $x \in A$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0).$$

Soit $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0), & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \notin A, \end{cases}$$

alors pour presque tout $x \in E$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} = h(x).$$

D'autre part, d'après 3), on a

$$\exists B \subset A,\ \mu(B^c_E) = 0 \text{ et } \forall x \in B,\ \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x),\ \forall t \in I.$$

En utilisant le théorème des accroissements finis on trouve

$$\left|\frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}\right| \leq \sup_{t\in I}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x),\ \forall x \in B,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

En appliquant le théorème de la convergence dominée on obtient que h est intégrable sur E et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{n\to+\infty} \int_E \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} d\mu(x) = \int_E h(x) d\mu(x),$$

c'est à dire F est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) d\mu(x).$$

De plus, d'après le Théorème 3.8.2 on trouve que F est de classe $\mathbf{C}^1$ sur I. ∎

3.9 Comparaison de l'intégrale de Lebesgue avec l'intégrale de Riemann

Définition 3.9.1 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On appelle subdivision de l'intervalle $[a,b]$, toute famille finie de réels $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.*

Le nombre $p = \max_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1})$ *est le pas de la subdivision.*

Définition 3.9.2 *Soit* $a,\, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *et* $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ *une subdivision de l'intervalle* $[a, b]$. *On dit que la famille* $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ *est adaptée à* σ *si pour tout* $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ *on a* $\lambda_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Définition 3.9.3 *Soit* $a,\, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ *une subdivision de l'intervalle* $[a, b]$ *et* $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ *une famille de réels adaptée à* σ. *Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction. On appelle somme de Riemann de la fonction* f *associée à* σ *et à* Λ *le nombre*

$$S(f, \sigma, \Lambda) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\lambda_k).$$

Définition 3.9.4 *Soit* $a,\, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *et* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction bornée. On dit que* f *est intégrable au sens de Riemann sur* $[a, b]$ *s'il existe un nombre réel* ℓ *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$, *pour toute subdivision* σ *de pas* $p < \delta$ *et pour toute famille* Λ *adaptée à* σ *on a*

$$|S(f, \sigma, \Lambda) - \ell| < \varepsilon.$$

Dans ce cas on écrit $\int_a^b f(x)dx = \ell$.

Théorème 3.9.1 *[3] soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction et* λ *la mesure de Lebesgue définie sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, *alors*

1) *f est Riemann intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si elle est bornée et presque partout continue sur $[a, b]$.*

2) *Si f est Riemann intégrable sur $[a, b]$, alors elle est Lebesgue intégrable sur $[a, b]$ et*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

Remarque 3.9.1 *L'inverse de la propriété 2) n'est pas vrai.*

Exemple 3.9.1 *Soit* $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ -1, & si\ x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrons que cette fonction n'est pas Riemann intégrable mais elle est Lebesgue intégrable. On a f est bornée et pour tout $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ telle que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, car $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Mais $f(x_n) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq f(x)$, donc f n'est pas continue en x et par conséquent elle n'est pas continue sur $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Comme $\lambda([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = \lambda([0,1]) = 1$, alors d'après le Théorème 3.9.1 f n'est pas intégrable au sens de Riemann. D'autre part, on a $|f| = 1$, donc $f \in \mathcal{L}^1([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ avec $\int_{[0,1]} |f| d\lambda = \int\limits_{[0,1]} d\lambda = \lambda([0,1]) = 1$.

Exemple 3.9.2 *On considère la fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & si\ x \in]0,1], \\ 0, & si\ x = 0. \end{cases}$$

On a $|\sin x| \leq |x|$, $\forall x \in [0,1]$, donc $|f(x)| \leq 1$, $\forall x \in [0,1]$, alors f est bornée. D'autre part, f est continue sur $]0,1]$ mais elle n'est pas continue en $x = 0$, car $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = 1 \neq f(0)$. Mais $\lambda(\{0\}) = 0$, donc f est presque partout continue sur $[0,1]$. D'où, d'après le Théorème 3.9.1, f est intégrable au sens de Riemann et elle est intégrable au sens de Lebesgue, de plus $\int_0^1 f(x)dx = \int\limits_{[0,1]} f d\lambda$.

Proposition 3.9.1 *[3] Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b \leq +\infty$ et $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$. Alors f est Lebesgue intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ (au sens de Riemann) est absolument convergente. De plus*

$$\int_a^b f(t)dt = \int\limits_{[a,b[} f d\lambda.$$

Exemple 3.9.3 *On a $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ n'est pas absolument convergente, donc d'après la Proposition 3.9.1 la fonction $t \longmapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas Lebesgue intégrable sur $]0, +\infty[$.*

Exemple 3.9.4 *Soit la fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par $f(t) = \frac{\sin t}{t^2}$, $\forall t \in [2, +\infty[$. Alors pour tout $t \in [2, +\infty[$ on a $|f(t)| \leq \frac{1}{t^2}$. Comme $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[2, +\infty[$, alors $\int_2^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ est absolument convergente, donc d'après la Proposition 3.9.1 la fonction f est Lebesgue intégrable sur $[2, +\infty[$.*

3.10 Exercices

Exercice 3.10.1 *Soit μ une mesure finie sur $\mathcal{B}([0,1])$. Montrer que* $C([0,1],\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1\left([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\mu\right)$.

Exercice 3.10.2 *Soit δ_0 la mesure de Dirac en 0 et soit $f \in \mathcal{M}_+$. Calculer $\int_{\mathbb{R}} f d\delta_0$.*

Exercice 3.10.3 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et positive décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.*

1) *Montrer que f est borélienne.*

2) *On suppose que $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda < +\infty$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq \frac{C}{x}$, $\forall x > 0$.*

Exercice 3.10.4 *Soit (E,T,μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1(E,T,\mu)$. On suppose que $0 \leq f \leq 1$ p.p et que $\int_E f d\mu = \int_E f^2 d\mu$. Montrer qu'il existe un ensemble mesurable A tel que $f = 1_A$ p.p.*

Exercice 3.10.5 *Soit (E,T,μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1(E,T,\mu)$. Montrer que*

$$f \geq 0 \; p.p \Leftrightarrow \int_A f d\mu \geq 0, \; \forall A \in T.$$

Exercice 3.10.6 *Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}([0,1])$ et $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1\left([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda\right)$.*

1) *Montrer que $x \mapsto e^{nx} f(x)$ appartient à $\mathcal{L}^1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

2) *Supposons que $f \geq 0$ p.p et $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tels que $\int_{[0,1]} e^{nx} f(x) d\lambda(x) \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

- **(i)** *Montrer que $f = 0$ p.p.*
- **(ii)** *Montrer que si f est continue, alors $f(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$.*

Exercice 3.10.7 *Soit (E,T,μ_1) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. On pose $\mu_2(A) = \int_A f d\mu_1$, $\forall A \in T$.*

1) *Montrer que μ_2 est une mesure sur T.*

2) *Soit $g \in \mathcal{M}$. Montrer que $g \in \mathcal{L}^1(E,T,\mu_2)$ si et seulement si $fg \in L^1(E,T,\mu_1)$.*

Exercice 3.10.8 *Soit (E,T,μ) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f \in L^1$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq 0$ p.p, $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ p.p et que $\int_E f_n d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_E f d\mu$. Montrer que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans L^1.*

CHAPITRE 4

Produit d'espaces mesurés

L'objectif de ce chapitre est de présenter la mesure produit et le théorème de Fubini.

4.1 Mesure produit

Définition 4.1.1 *Soit* (E_1, T_1) *et* (E_2, T_2) *deux espaces mesurables. La tribu engendrée par la famille*

$$C = \{F_1 \times F_2,\ F_1 \in T_1,\ F_2 \in T_2\} \tag{4.1}$$

est appelée tribu produit de T_1 *par* T_2 *et elle est notée par* $T_1 \otimes T_2$.

Remarque 4.1.1 *En général, le produit de deux tribus n'est pas commutatif.*

Définition 4.1.2 *Soit* E_1, E_2 *deux ensembles et* $F \subset E_1 \times E_2$.
On appelle section de F *en* $x \in E_1$, *l'ensemble noté* F_x *tel que* $F_x = \{y \in E_2,\ (x, y) \in F\}$.
On appelle section de F *en* $y \in E_2$, *l'ensemble noté* F_y *tel que* $F_y = \{x \in E_1,\ (x, y) \in F\}$.

Lemme 4.1.1 *Soit E_1, E_2 deux ensembles, F, G, $(F_i)_{i\in I} \subset E_1 \times E_2$ et $x \in E_1$. Alors*

(1) $((E_1 \times E_2) \setminus F)_x = E_2 \setminus F_x$.

(2) $(G \setminus F)_x = G_x \setminus F_x$.

(3) $\left(\bigcup_{i\in I} F_i\right)_x = \bigcup_{i\in I} (F_i)_x$.

(4) $\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)_x = \bigcap_{i\in I} (F_i)_x$.

Démonstration. On a

(1)

$$\begin{aligned} E_2 \setminus F_x &= E_2 \setminus \{y \in E_2,\ (x,y) \in F\} \\ &= \{y \in E_2,\ (x,y) \notin F\} \\ &= \{y \in E_2,\ (x,y) \in E_1 \times E_2 \setminus F\} \\ &= ((E_1 \times E_2) \setminus F)_x . \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} (G \setminus F)_x &= \{y \in E_2,\ (x,y) \in G \setminus F\} \\ &= \{y \in E_2,\ (x,y) \in G \text{ et } (x,y) \notin F\} \\ &= \{y \in E_2,\ (x,y) \in G\} \cap \{y \in E_2,\ (x,y) \notin F\} \\ &= G_x \setminus F_x. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i\in I} F_i\right)_x &= \left\{y \in E_2,\ (x,y) \in \bigcup_{i\in I} F_i\right\} \\ &= \{y \in E_2,\ \exists i \in I,\ (x,y) \in F_i\} \\ &= \bigcup_{i\in I} \{y \in E_2,\ (x,y) \in F_i\} \\ &= \bigcup_{i\in I} (F_i)_x . \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)_x &= \left(\left(\bigcup_{i\in I} (F_i)^c_{E_1\times E_1}\right)^c_{E_1\times E_1}\right)_x \\
&\overset{(1)}{=} E_2 \setminus \left(\bigcup_{i\in I} (F_i)^c_{E_1\times E_1}\right)_x \\
&\overset{(3)}{=} E_2 \setminus \left(\bigcup_{i\in I} \left((F_i)^c_{E_1\times E_1}\right)_x\right) \\
&\overset{(1)}{=} E_2 \setminus \left(\bigcup_{i\in I} (E_2 \setminus (F_i)_x)\right) \\
&= E_2 \cap \left(\bigcup_{i\in I} (E_2 \setminus (F_i)_x)\right)^c_{E_2} \\
&= E_2 \cap \left(\bigcap_{i\in I} (E_2 \setminus (F_i)_x)^c_{E_2}\right) \\
&= E_2 \cap \left(\bigcap_{i\in I} (F_i)_x\right) \\
&= \bigcap_{i\in I} (F_i)_x\,,\ \text{car} \bigcap_{i\in I} (F_i)_x \subset E_2.
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.1.1 *Soit (E_1, T_1) et (E_2, T_2) deux espaces mesurables et $F \in T_1 \otimes T_2$. Alors pour tout $x \in E_1$, $y \in E_2$, on a $F_x \in T_2$ et $F_y \in T_1$.*

Démonstration. Soit $x \in E_1$. On considère $\tau = \{F \subset E_1 \times E_2,\ F_x \in T_2\}$. Montrons que τ est une tribu sur $E_1 \times E_2$ contenant la famille $\mathcal{C}$ définie par (4.1).
Soit $F_1 \times F_2 \in \mathcal{C}$, alors $F_1 \in T_1$ et $F_2 \in T_2$, donc

$$\begin{aligned}
(F_1 \times F_2)_x &= \{y \in E_2,\ (x, y) \in F_1 \times F_2\} \\
&= \{y \in E_2,\ x \in F_1 \text{ et } y \in F_2\} \\
&= \begin{cases} \emptyset, & \text{si } x \notin F_1\,; \\ F_2, & \text{si } x \in F_1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Alors $(F_1 \times F_2)_x \in T_2$, d'où $\mathcal{C} \subset \tau$. De plus

1. $\emptyset \in \tau$, car $\emptyset \subset E_1 \times E_2$, $\emptyset_x = \emptyset \in T_2$.

2. Soit $F \in \tau$, donc $F \subset E_1 \times E_2$ avec $F_x \in T_2$. D'après le Lemme 4.1.1, on a $\left(F^c_{E_1\times E_2}\right)_x = ((E_1 \times E_2) \setminus F)_x = E_2 \setminus F_x \in T_2$, car T_2 est une tribu sur E_2, donc τ est stable par passage au complémentaire.
3. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \tau$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $F_n \subset E_1 \times E_2$ et $(F_n)_x \in T_2$. En utilisant le Lemme 4.1.1, on trouve $\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)_x = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (F_n)_x \in T_2$, car T_2 est une tribu sur E_2, donc τ est stable par union dénombrable, alors τ est une tribu sur $E_1 \times E_2$ contenant C, mais $T_1 \otimes T_2$ est la plus petite tribu contenant C, donc $T_1 \otimes T_2 \subset \tau$, d'où $\forall x \in E_1$, $\forall F \in T_1 \otimes T_2$, $F_x \in T_2$.

   De la même manière on peut montrer que $\forall y \in E_2$, $\forall F \in T_1 \otimes T_2$, $F_y \in T_1$.

■

Proposition 4.1.2 *Soit (E, T) un espace mesurable, $E_1, E_2 \subset E$ et $f : E_1\times E_2 \longrightarrow E$ une fonction mesurable. Alors pour chaque $x \in E_1$, fixé la fonction $f_x : E_2 \longrightarrow E$, où $f_x(y) = f(x, y)$, $\forall y \in E_2$ est mesurable et pour chaque $y \in E_2$, fixé la fonction $f_y : E_1 \longrightarrow E$, où $f_y(x) = f(x, y)$, $\forall x \in E_1$ est mesurable.*

Démonstration. Montrons que $f_x : E_2 \longrightarrow E$ est mesurable et de la même manière on peut montrer que la fonction $f_y : E_1 \longrightarrow E$ est mesurable.
Soit $B \in T$, alors

$$\begin{aligned} f_x^{-1}(B) &= \{y \in E_2,\ f_x(y) \in B\} \\ &= \{y \in E_2,\ f(x, y) \in B\} \\ &= \{y \in E_2,\ (x, y) \in f^{-1}(B)\} \\ &= \left(f^{-1}(B)\right)_x. \end{aligned}$$

Mais f est mesurable donc $f^{-1}(B) \in T_1\otimes T_2$, alors, d'après la Proposition 4.1.1, on trouve que $\left(f^{-1}(B)\right)_x \in T_2$, d'où $f_x : E_2 \longrightarrow E$ est mesurable. ■

Proposition 4.1.3 *[1] Soit (E_1, T_1), (E_2, T_2) deux espaces mesurables et μ_i une mesure positive $\sigma-$finie sur T_i, $i = 1, 2$. Alors il existe une unique mesure positive μ sur $T_1 \otimes T_2$ telle que pour tout $(F_1, F_2) \in T_1 \times T_2$, $\mu_i(F_i) < +\infty$, $i = 1, 2$, de plus $\mu(F_1 \times F_2) = \mu_1(F_1) \times \mu_2(F_2)$.*
Cette mesure est appelée mesure produit de μ_1 par μ_2 et elle est notée $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$.

Définition 4.1.3 *Soient (E_1, T_1, μ_1) et (E_2, T_2, μ_2) deux espaces mesurés. On appelle espace mesuré produit des espaces (E_1, T_1, μ_1) et (E_2, T_2, μ_2), l'espace $(E_1 \times E_2, T_1 \otimes T_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$.*

4.2 Théorème de Fubini et conséquences

Théorème 4.2.1 *[3]***(Fubini-Tonelli)** *Soit (E, T, μ) l'espace mesuré produit de deux espaces mesurés $\sigma-$finis (E_1, T_1, μ_1) et (E_2, T_2, μ_2) et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive. Alors*

1) *Les applications g_1 et g_2 définies respectivement par*

$$g_1(x) = \int_{E_2} f(x, y) d\mu_2(y),\ \forall x \in E_1$$

et

$$g_2(y) = \int_{E_1} f(x, y) d\mu_1(x),\ \forall y \in E_2$$

sont mesurables positives.

2) $\displaystyle\int_{E_1 \times E_2} f(x, y) d\mu = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x).$

Corollaire 4.2.1 *Soit (E, T, μ) l'espace mesuré produit de deux espaces mesurés $\sigma-$finis (E_1, T_1, μ_1) et (E_2, T_2, μ_2) et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable. Alors*

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{L}^1(E, T, \mu) \quad &\Leftrightarrow \quad \int_{E_2} \left(\int_{E_1} |f(x, y)| d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) < +\infty \\ &\Leftrightarrow \quad \int_{E_1} \left(\int_{E_2} |f(x, y)| d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) < +\infty. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème 4.2.1 à l'application $x \longmapsto |f(x)|$. ■

Théorème 4.2.2 **(Fubini)** *Soit (E, T, μ) l'espace mesuré produit de deux espaces mesurés $\sigma-$finis (E_1, T_1, μ_1) et (E_2, T_2, μ_2) et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $T-$mesurable et intégrable pour la mesure μ. Alors*

1) *l'application* $y \longmapsto f_x(y) = f(x,y)$ *(respectivement* $x \longmapsto f_y(x) = f(x,y)$*) est* μ_2 *intégrable pour* μ_1-*presque tout* $x \in E_1$ *(respectivement est* μ_1 *intégrable pour* μ_2-*presque tout* $y \in E_2$*).*

Les applications $G_i : E_i \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ *où*

$$G_1(x) = \int_{E_2} f(x,y)d\mu_2(y) \text{ et } G_2(y) = \int_{E_1} f(x,y)d\mu_1(x)$$

sont définies presque partout sur E_1 *et* E_2 *respectivement et elles sont intégrables.*

2) $\int_{E_1\times E_2} f(x,y)d\mu(x,y) = \int_{E_1}\left(\int_{E_2} f(x,y)d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x) = \int_{E_2}\left(\int_{E_1} f(x,y)d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y).$

Démonstration.

1) On a f est intégrable donc d'après le Corollaire 4.2.1 on trouve que

$$\int_{E_1}\left(\int_{E_2} |f(x,y)|d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x) < +\infty,$$

alors

$$\int_{E_2} |f(x,y)|d\mu_2(y) < +\infty,\ \mu_1\, p.p,$$

donc

$$\exists A \in T_1,\ \mu_1(A) = 0,\ \forall x \in E_1 \setminus A,\ \int_{E_2} |f(x,y)|d\mu_2(y) < +\infty.$$

Alors $y \longmapsto f_x(y) = f(x,y)$ est μ_2 intégrable pour μ_1-presque tout $x \in E_1$, d'où G_1 est définie presque partout sur E_1.

De la même manière on peut montrer que $x \longmapsto f_y(x) = f(x,y)$ est μ_1 intégrable pour μ_2-presque tout $y \in E_2$ et que G_2 est définie presque partout sur E_2.

Soit G_1^+ et G_1^- les applications définies par

$$G_1^+(x) = \int_{E_2} f^+(x,y)d\mu_2(y) \text{ et } G_1^-(x) = \int_{E_2} f^-(x,y)d\mu_2(y).$$

D'après le Théorème 4.2.1 on trouve que G_1^+ et G_1^- sont mesurables et pour tout $x \in E_1 \setminus A$ on a

$$0 \le G_1^{\pm}(x) \le \int_{E_2} |f(x,y)|d\mu_2(y) < +\infty.$$

D'autre part on a

$$G_1(x) = \begin{cases} G_1^+(x) - G_1^-(x), & \text{si } x \in E_1 \setminus A, \\ 0, & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Alors $G_1 : E_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable et

$$\begin{aligned} \int_{E_1} |G_1(x)| d\mu_1(x) &= \int_{E_1} \left| \int_{E_2} f(x,y) d\mu_2(y) \right| d\mu_1(x) \\ &\leq \int_{E_1} \left(\int_{E_2} |f(x,y)| d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) < +\infty. \end{aligned}$$

Alors G_1 est μ_1-intégrable. De la même manière on peut montrer que G_2 est μ_2-intégrable.

2) En appliquant le Théorème 4.2.1 à f^+ et à f^- on obtient

$$\begin{aligned} \int_{E_1} G_1(x) d\mu_1(x) &= \int_{E_1} G_1^+(x) d\mu_1(x) - \int_{E_1} G_1^-(x) d\mu_1(x) \\ &= \int_{E_1 \times E_2} f^+(x,y) d\mu(x,y) - \int_{E_1 \times E_2} f^-(x,y) d\mu(x,y) \\ &= \int_E f(x,y) d\mu(x,y). \end{aligned}$$

De la même manière on trouve que $\int_{E_2} G_2(x) d\mu_2(x) = \int_E f(x,y) d\mu(x,y)$. ■

4.3 Exercices

Exercice 4.3.1 *Pour $A \subset \mathbb{R}^2$, on note $t(A)$ l'ensemble des $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $(x_1, 0) \in A$. On pose $T = \{A \subset \mathbb{R}^2, t(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(x) = (x_1 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta), x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta))$.*

1) *Montrer que T est une tribu contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.*

2) *Soit $D \subset \mathbb{R}$ tel que $D \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On suppose $A = D \times \{0\}$.*

a) *Montrer que* $A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

b) *On pose* $f = 1_A \circ g$. *Montrer que la fonction* f *n'est pas une fonction borélienne de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *mais que les fonctions* $f(x_1, .)$ *et* $f(., x_2)$ *sont boréliennes de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.3.2 *Calculer de deux façons différentes l'intégrale*

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 e^{-x} \sin(2xy) dy \right) dx.$$

Déterminer la valeur de

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin^2(x)}{x} dx.$$

Exercice 4.3.3 *Calculer de deux façons différentes l'intégrale*

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dy dx.$$

Déterminer la valeur de

$$J = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du.$$

Exercice 4.3.4 *Soit* $f(x, y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$. *Montrer que*

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+} f(x, y) dx dy \neq \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^1 f(x, y) dy dx.$$

Pourquoi le théorème de Fubini ne s'applique pas ici ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Gallouët, R. Herbin, Mesure, intégration, probabilités, Ellipses, 2013.

[2] D. REVUZ, Mesure et intégration, Paris : Hermann, 1997.

[3] S. Axler, Mesure, Intégration and Real Analysis , Graduate texts in Mathematics 282, https ://doi.org/10.1007/978-3-030-33143-6, 2020.

[4] E. Stein, R. Shakarchi, Real analysis, Measure theory, integration, and Hilbert spaces, Princeton Lectures in Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ.