Année Universitaire 2024/2025

Université de Jijel

Département de Mathématiques

Module : Mesure et Intégration

TD N°1

Exercice 1 : Soit E, F et G trois ensembles. Montrer que

a) $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$.

b) $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$.

Exercice 2 : Soit E un ensemble et F et G deux sous-ensembles de E. Montrer que

1) $(F^c_E)^c_E = F$.

2) $(F \cup G)^c_E = F^c_E \cap G^c_E$.

3) $(F \cap G)^c_E = F^c_E \cup G^c_E$.

4) $F \setminus G = (F \cup G) \setminus G$.

Exercice 3 : Soit E, F et G trois ensembles. Montrer que

a) $E \setminus (F \cup G) = ((E \cup G) \setminus F) \cap ((E \cup F) \setminus G)$.

b) $E \setminus (F \cup G) = (E \setminus F) \cap (E \setminus G)$.

c) $E \setminus (F \cap G) = (E \setminus F) \cup (E \setminus G)$.

d) $E \times (F \cup G) = E \times F \cup E \times G$.

e) $E \times (F \cap G) = E \times F \cap E \times G$.

Exercice 4 : Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que

1) $A \triangle B = B \triangle A$, c'est à dire la différence symétrique est commutative.

2) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$, c'est à dire la différence symétrique est associative.

3) $A \triangle B = A \triangle C \Leftrightarrow B = C$.

4) $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow B = A$.

5) $A \triangle B = A \Leftrightarrow B = \emptyset$.

6) $A \triangle B = E \Leftrightarrow B = A^c_E$.

7) $A \triangle B = A^c_E \Leftrightarrow B = E$.

8) $A \triangle B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \emptyset$.

9) $A \triangle B = A \cup B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

10) $(A \triangle B)^c_E = A \triangle B^c_E$.

11) $(A \triangle B) \cup (A \cap B) = A \cup B$.

Exercice 5 : Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Montrer que si H et H' sont deux sous-ensembles de F tels que $H \subset H'$, alors $f^{-1}(H) \subset f^{-1}(H')$.

Exercice 6 : On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 = y^2$.

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Déterminer $\mathbb{R}/\mathcal{R}$.

Exercice 7 : Soit E un ensemble.

I) Soit $\{T_i\}_{i \in I}$ une famille de tribus sur E et $T = \{A \subset E,\ A \in T_i,\ \forall i \in I\}$. Montrer que T est une tribu sur E.

2) Soit $A \subset \mathcal{P}(E)$ et T_A l'intersection de toutes les tribus sur E contenant A. Montrer que T_A est la plus petite des tribus contenant A.

3) Soit $A, B \subset \mathcal{P}(E)$ et T_A, T_B les tribus engendrées par A et B respectivement. Montrer que si $A \subset B$, alors $T_A \subset T_B$.

Exercice 8 : Soit E, F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et $B \subset \mathcal{P}(F)$. Soit f^{-1} l'application définie de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(E)$ par $f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}$.

1) Soit S une tribu sur F et $T_{f,S} = \{f^{-1}(B),\ B \in S\}$. Montrer que $T_{f,S}$ est une tribu sur E, (c'est la tribu image réciproque).

2) Soit T une tribu sur E et $S_{f,T} = \{B \subset F,\ f^{-1}(B) \in T\}$. Montrer que $S_{f,T}$ est une tribu sur F.

Exercice 9 : Soit E un ensemble.

1) Montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ est une algèbre si et seulement si

(i) $E \in \mathcal{A}$.

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$.

2) Soit $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ une famille d'algèbres sur E. Montrer que $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i = \{A \in \mathcal{P}(E),\ A \in \mathcal{A}_i,\ \forall i \in I\}$ est une algèbre sur E.

Exercice 10 : Soit E un ensemble infini non dénombrable. On définit l'application $\mu : \mathcal{P}(E) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ par $\mu(A) = 0$ si A est au plus dénombrable et $\mu(A) = +\infty$ sinon. Montrer que μ est une mesure sur $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 11 : Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) = 0$. Montrer que A n'est pas nécessairement fermé.