Année Universitaire 2024/2025

Université de Jijel

Département de Mathématiques

Module : Mesure et Intégration

TD N°2

Exercice 1 : Soient (E, T) un espace mesurable et $f : E \to \mathbb{R}$ une application.

1) Montrer que $T_f = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), f^{-1}(B) \in T\}$ est une tribu.

2) Soit C une famille qui engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(i) f est mesurable.

(ii) $f^{-1}(A) \in T$, $\forall A \in C$.

Exercice 2 : Soit (E, T) et (F, S) deux espaces mesurables. Soit $f : E \to F$ et $\varphi : F \to \mathbb{R}$ deux applications mesurables. Montrer que $\varphi \circ f : E \to \mathbb{R}$ est mesurable.

Exercice 3 : Soient (E, T), (F, S),(G, O) trois espaces mesurables. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications mesurables. Montrer que $g \circ f : E \to G$ est mesurable.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que f est mesurable.

Exercice 5 : Soit $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne. Montrer que $1_{\mathbb{Q}}$ est mesurable.

Exercice 6 : Soit T une tribu sur un ensemble E et soit $A \in T$ tel que

$$B \in T \text{ et } B \subset A \Rightarrow B = \phi \text{ ou } B = A.$$

Montrer que toute fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$ est constante sur A.

Exercice 7 : 1) Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et λ la mesure de Lebesgue. Montrer que $f = g\ \lambda\ p.p$ si et seulement si $f = g$.

2) Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions et δ_0 la mesure de Dirac en 0. Montrer que $f = g\ \delta_0\ p.p$ si et seulement si $f(0) = g(0)$.

Exercice 8 : Soit (E, T, μ) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, (i.e, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$). Montrer que si $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ presque uniformément, alors $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f\ \mu\ p.p.$

Exercice 9 : Soient (E, T, μ) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$.

a) Montrer que s'il existe deux fonctions mesurables $f, g : E \to \mathbb{R}$ telles que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f et g, alors $f = g\, p.p.$

b) Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers $f \subset \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $g \subset \mathcal{M}$, alors $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f + g \subset \mathcal{M}$.