Université de Jijel

Département de Mathématiques

Module : Mesure et Intégration

TD N°3

Exercice 1 : Soit μ une mesure finie sur $\mathcal{B}([0,1])$. Montrer que $C([0,1],\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1\left([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\mu\right)$.

Exercice 2 : Soit δ_0 la mesure de Dirac en 0 et soit $f \in \mathcal{M}_+$. Calculer $\int_E f d\delta_0$.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et positive décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) Motrer que f est borélienne.

2) On suppose que $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda < +\infty$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq \frac{C}{x}$, $\forall x > 0$.

3) Montrer que le résultat de la question précédente est faux si f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4 : Soit (E, T, μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1(E, T, \mu)$. On suppose que $0 \leq f \leq 1\, p.p$ et que $\int_E f d\mu = \int_E f^2 d\mu$. Montrer qu'il existe un ensemble mesurable A tel que $f = 1_A\, p.p.$

Exercice 5 : Soit (E, T, μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1(E, T, \mu)$. Montrer que

$$f \geq 0\, p.p \Leftrightarrow \int_A f d\mu \geq 0,\ \forall A \in T.$$

Exercice 6 : Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}([0,1])$ et $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1\left([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda\right)$.

1) Montrer que $x \mapsto e^{nx} f(x)$ appartient à $\mathcal{L}^1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) Supposons que $f \geq 0\, p.p$ et $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tels que $\int_{[0,1]} e^{nx} f(x) d\lambda(x) \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(i) Montrer que $f = 0\, p.p.$

(ii) Montrer que si f est continue, alors $f(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$.

Exercice 7 : Soit (E, T, μ_1) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. On pose $\mu_2(A) = \int_A f d\mu_1$, $\forall A \in T$.

1) Montrer que μ_2 est une mesure sur T.

2) Soit $g \in \mathcal{M}$. Montrer que $g \in \mathcal{L}^1(E, T, \mu_2)$ si et seulement si $fg \in L^1(E, T, \mu_1)$.

Exercice 8 : Soit (E, T, μ) un espace mesuré et L^1 l'espace $L^1(E, T, \mu)$. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f \in L^1$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq 0\, p.p$, $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f\, p.p$ et que $\int f_n d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int f d\mu$. Montrer que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans L^1.