

Université de Jijel

Département de Mathématiques

Module : Mesure et Intégration

TD N°4

Exercice 1 : Pour $A \subset \mathbb{R}^2$, on note $t(A)$ l'ensemble des $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $(x_1, 0) \in A$. On pose $T = \{A \subset \mathbb{R}^2, t(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(x) = (x_1 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta), x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta))$.

- 1) Montrer que T est une tribu contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
- 2) Soit $D \subset \mathbb{R}$ tel que $D \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On suppose $A = D \times \{0\}$.
 - a) Montrer que $A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
 - b) On pose $f = 1_A \circ g$. Montrer que la fonction f n'est pas une fonction borélienne de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} mais que les fonctions $f(x_1, \cdot)$ et $f(\cdot, x_2)$ sont boréliennes de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : Calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 e^{-x} \sin(2xy) dy \right) dx.$$

Déterminer la valeur de

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin^2(x)}{x} dx.$$

Exercice 3 : Calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dy dx.$$

Déterminer la valeur de

$$J = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du.$$

Exercice 4 : Soit $f(x, y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$. Montrer que

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+} f(x, y) dx dy \neq \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^1 f(x, y) dy dx.$$

Pourquoi le théorème de Fubini ne s'applique pas ici ?